

立体骨組の弾塑性解析

森 野 捷 輔

ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF SPACE FRAMES

By Shosuke MORINO

Synopsis

This paper deals with the methods for the analysis of elastic-plastic behavior of space frames for the following three types of failure: 1) plastic mechanism failure, 2) buckling failure, and 3) overall instability failure. The frames are assumed to be rigidly jointed and to be made of material with elastic and perfectly plastic properties. All loads statically increase (or decrease) in fixed proportions and their directions remain unchanged during the entire history of loading. Numerical examples are given to illustrate application of the methods developed, and to discuss elastic-plastic behavior of space frames.

1. 序

通常の建築構造物は Fig. 1 に示すような柱およびはり材の 3 次元的な集合体と考えられ、鉛直荷重と任意方向に作用する水平荷重を受けている。従来の構造設計法では、このような立体的な構造物を平面骨組の集合として設計して来たが、実際の構造物における各部材は軸力、2 軸曲げモーメントに加えて振りモーメントを受けていて、各部材の複合的な抵抗力が全体として作用荷重を支持している。この作用荷重に対する抵抗形式は非常に複雑であるが、本報告は建築構造物を立体骨組としてとらえ、骨組の静的荷重下における挙動を、大変形域まで含めて追跡しようとする目的で行われた理論的研究の報告である。ここでとり扱われている立体骨組は剛な接合部を有する鉄骨骨組とし、作用荷重はすべて静的かつ比例的に漸増かつ減少するものとしている。このような骨組構造物の崩壊形式としては、水平

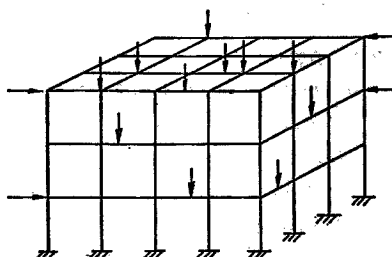


Fig. 1 Typical space frame.

荷重だけを受ける骨組では塑性崩壊機構の発生による崩壊、鉛直荷重だけを受ける骨組では座屈による崩壊、また鉛直および水平荷重が同時に作用する骨組では、上記 2 種の崩壊形式の組み合わせによる、不安定現象を伴った崩壊の 3 種に大別できる。本報告では、これらの崩壊形式に対応した、不安定現象、すなわち骨組形の幾何学的変化の影響を考慮しない解析、弾性座屈問題の解析および不安定現象を考慮にいたした解析の 3 種を示し、これらの方法を数例の鉄骨立体骨組に適用して鉄骨骨組の弾塑性挙動を論じた。

従来、不安定現象を伴わない簡単な 3 次元的骨組、たとえば肘型骨組、グリッド、曲がりばりなどの終局耐力に関する研究は、多数報告されているが¹⁾、これらの研究では構造物の弾塑性挙動よりも、ある載荷条件下での構造物の終局耐力あるいは終局耐力におよぼす降伏条件式の影響を論じたものが多い。塑性ヒンジの形成を塑性崩壊機構にいたるまで追跡して構造物の弾塑性挙動を明らかにしようとする、いわゆる Hinge Method を採用して門型骨組、4 角柱型立体骨組、あるいは任意の幾何学的形状を直線材で構成して得られた立体骨組などを解析した研究があるが、いずれも不安定現象を考慮に入れず、軸力、2 軸曲げモーメント、振りモーメントを受ける断面の降伏条式を球型に仮定している^{2), 3)}。

立体骨組の弾塑性座屈に関しては、従来 2 軸曲げと捩りが連成しないと仮定して、それぞれが独立して作用した場合の変形した部材の、軸力による部材剛性の低減率、Stability Function を適用して、弾性座屈問題の解析が行われて来た⁴⁾。しかし座屈以前に 1 次的な曲げあるいは捩りが生ずる場合については、軸力、2 軸曲げおよび捩りをうけて変形した状態での部材の釣合を表わす微分方程式の解析解が得られないため、弾性および弾塑性座屈解析とともに平面骨組の場合ほど既往の研究は多くない。立体骨組の座屈に関する理論的研究では、各部材端での反りの拘束条件を完全拘束あるいは完全自由としてとりあつかっており、反り拘束条件の座屈荷重におよぼす影響を論じたものは、簡単な肘型骨組についての研究があるが⁵⁾、一般的な立体骨組についてはその例をみない。

骨組形状の幾何学的変化によって生ずる不安定現象を考慮に入れた立体骨組の弾塑性挙動に関する研究はわずかに数編を数えるにすぎない。これは前述のように、立体骨組が変形した状態で、各部材の釣合を表わす 3 個の微分方程式が連立しているため、解析解を得ることができない点に原因がある。既往の組合せ荷重下での柱単一材の弾塑性挙動の研究では、断面を数個の要素に分割して得た応力分布の近似解と、柱材を材軸方向にさらに数個の要素に分割して得られるたわみ形の近似解とを、試錯法によって釣合条件を矛盾なく満たすように決めていく手法がとられている⁶⁾。この方法を剛な床板を有する 4 本の柱より構成された立体骨組に応用した研究に参考文献(7)、(8)がある。これらの研究では実験をも行って、上記の数値解が実験結果をよく予測することを確かめている。

本報告では節点釣合式だけで構造物の弾塑性挙動を把握しようとする、これまで平面骨組の解析によく応用されてきた Hinge Method の特徴を生かすため、前述の連立微分方程式を近似的に解くことにより、Stability Function に相当する、断面力によって低減された部材剛性を得て、不安定現象を伴った立体骨組の弾塑性挙動を解析するとともに、種々の異なった載荷状態にある立体骨組の挙動を把握する目的で、いくつかの例題について、不安定現象を無視した解析、および弾性座屈問題の解析をもあわせて行った。

2. 不安定現象を考慮しない立体骨組の弾塑性解析

2.1 仮定

立体骨組の骨組形状の幾何学的変化によって生ずる不安定現象を無視した弾塑性挙動の解析にあたって、次のような仮定が設けられた。

a. 材料

1. 応力—ひずみ関係は完全弾塑性型である。
2. Von Mises の降伏条件によって $\tau_0 = \sigma_0 / \sqrt{3}$ 。ここで σ_0 は降伏応力度、 τ_0 は降伏せん断応力度である。

b. 塑性ヒンジと降伏条件

1. すべての断面において初期降伏条件と限界降伏条件とは同一である。
2. 降伏条件は、一般化応力空間における球面あるいは後述する多項式曲面で表わされる。
3. 曲げモーメントによって生ずるせん断力は降伏条件に影響しない。
4. 塑性ヒンジにおける一般化歪の戻りは考慮しない。

c. 部材および骨組

1. 部材はすべて 2 軸対称断面の等断面材である。
2. 反り剛性は無視する。
3. せん断変形は無視する。
4. 残留応力、元たわみなどの初期不完全性はないものとする。

d. 載荷

1. 荷重は節点に載荷されるか、もしくは部材中間に載荷される有限個の集中荷重だけとし、分布荷重は考慮しない。

2. すべての荷重は比例的に漸増する。

2.2 部材剛性行列

Fig. 2 に示されるように、ある部材が両端に組合わせ断面力を受けている場合、断面力と部材端部の変形との間には

$$\left. \begin{aligned} F_a &= k_{aa} u_a + k_{ab} u_b \\ F_b &= k_{ba} u_a + k_{bb} u_b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

なる関係が成立する。ここで、 F, u および k はそれぞれ部材座標軸 $x-y-z$ にもとづいて導かれた、断面力ベクトル、部材端部における変形ベクトルおよび部材剛性行列で、添字は部材端部を識別する。 F, u および k_{bb} はそれぞれ以下に示すような要素を有している。

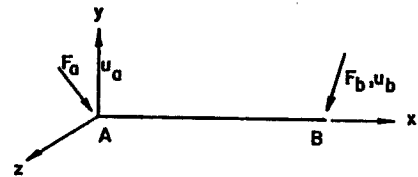


Fig. 2 Member subjected to force and deformation vectors.

$$F = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

$$k_{bb} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、部材座標軸は x 軸が材軸と一致するものとし、 y および z 軸は部材断面の主軸と一致するようになるものとする。また、(2)、(3) 式中各項は、

- | | |
|------------------------|--------------------------------|
| P_x : 軸力 | u_x : 軸方向変位 |
| P_y, P_z : 2方向せん断力 | u_y, u_z : 2方向横変位 |
| M_x : 振りモーメント | θ_x : 振り角 |
| M_y, M_z : 2軸曲げモーメント | θ_y, θ_z : 2方向たわみ角 |
| E : ヤング係数 | G : せん断弾性係数 |
| A : 部材断面積 | L : 部材長 |
| J : St. Venant の振り定数 | I_x, I_y : 2軸断面2次モーメント |

k_{bb} が (3) 式のように定められると、部材端部に作用する断面力の釣合より Transformation Matrix T を導入して、

$$F_a = -TF_b \dots\dots\dots (4)$$

なる関係式が得られ、(1) 式を (4) 式に代入し、また剛性行列の性質 $k_{ba} = (k_{ab})^t, k_{bb} = (k_{bb})^t$ を利用して、 k_{bb} 以外の部材剛性行列は、

$$k_{ab} = -Tk_{bb}, k_{ba} = -k_{bb} T^t, k_{aa} = Tk_{bb} T^t \quad \dots\dots\dots (5)$$

のように書き表わされる。添字 t は Transposed Matrix を表わすものとし、 T の各要素は

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L & 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

以上の諸量は部材座標軸にもとづくものであるが、立体骨組全体について釣合方程式をたてるときに、これらの諸量を基礎座標軸 $x-y-z$ にもとづく諸量に変換しておく都合が良い。部材座標軸 $x-y-z$ を基礎座標軸 $x-y-z$ に変換する Rotation Matrix を R と定義すると、基礎座標軸にもとづく断面力ベクトル $\bar{F}$ および変形ベクトル $\bar{u}$ とは

$$\begin{aligned} \bar{F} &= RF \\ \bar{u} &= Ru \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

と書き表わされる。行列 R は

$$R = \begin{bmatrix} \nu_{\bar{x}x} & \nu_{\bar{y}x} & \nu_{\bar{z}x} & & & \\ \nu_{\bar{x}y} & \nu_{\bar{y}y} & \nu_{\bar{z}y} & & & \\ \nu_{\bar{x}z} & \nu_{\bar{y}z} & \nu_{\bar{z}z} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \nu_{\bar{x}z} & \nu_{\bar{y}x} & \nu_{\bar{z}x} \\ & 0 & & & \nu_{\bar{x}y} & \nu_{\bar{y}y} & \nu_{\bar{z}y} \\ & & & & \nu_{\bar{x}z} & \nu_{\bar{y}z} & \nu_{\bar{z}z} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

で与えられ、 $\nu_{ij} (i = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \text{ } j = x, y, z)$ は i 軸と j 軸のなす角の余弦である。(7) 式に(1)式を代入すると、基礎座標軸にもとづく部材剛性行列 $\bar{k}$ は

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_{aa} &= Rk_{aa}R^t & \bar{k}_{ba} &= Rk_{ba}R^t \\ \bar{k}_{ab} &= Rk_{ab}R^t & \bar{k}_{bb} &= Rk_{bb}R^t \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

のように求まり、 $\bar{F}$ と $\bar{u}$ の関係は $\bar{k}$ を介して次のように定まる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_a &= \bar{k}_{aa}\bar{u}_a + \bar{k}_{ab}\bar{u}_b \\ \bar{F}_b &= \bar{k}_{ba}\bar{u}_a + \bar{k}_{bb}\bar{u}_b \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

2.3 塑性ヒンジの発生した部材の部材剛性行列

Fig. 3 に示すような部材 AB にある載荷後、塑性ヒンジが両端に形成された場合を想定する。部材端部に作用する断面力ベクトル F_a および F_b はともに、一般化応力空間で表現された降伏曲面上に達している。この部材の荷重増分に対する部材剛性は、荷重増分の載荷に対して生ずる断面力の増分 dF と部材端部における変形の増分 du の関係を考慮することによって導くことができる。 dF と du の関係は基本的に

条件 1. 変形増分は弾性部分と塑性部分とに分割できる。

条件 2. 変形増分の弾性部分と断面力増分の間には弾性的な関係が成立する。

条件 3. 変形増分の塑性部分は Flow Rule により断面力が降伏曲面上に達している点における降伏曲面に対する法線と同じ向きをもつベクトルである (Fig. 4)

条件 4. 断面力の増分は断面力が降伏曲面上に達している点における降伏曲面に対する接面上にある (Fig. 4)。

の 4 条件より導くことができる。まず条件 1 から部材端部 A および B に発生した塑性ヒンジでの変形増分

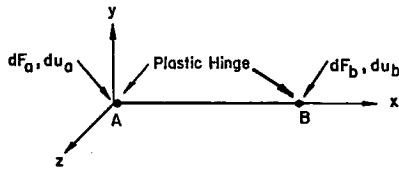


Fig. 3 Member with plastic hinges at ends A and B.

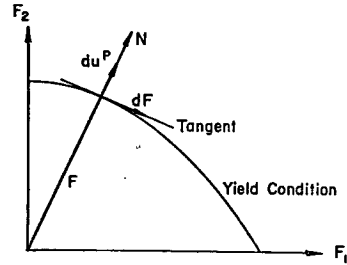


Fig. 4 Yield condition and plastic hinge action.

du_a および du_b は

$$du_a = du_a^e + du_a^p \quad du_b = du_b^e + du_b^p \quad \dots (11)$$

と書き表わされる。ここで添字 e は弾性部分、 p は塑性部分を示している。次に条件 2 から

$$\left. \begin{aligned} dF_a &= k_{aa} du_a^e + k_{ab} du_b^e \\ dF_b &= k_{ba} du_a^e + k_{bb} du_b^e \end{aligned} \right\} \quad \dots (12)$$

条件 3 から

$$du_a^p = \mu_a N_a \quad du_b^p = \mu_b N_b \quad \dots (13)$$

が導かれる。ここで N は降伏曲面に対する法線ベクトル、 μ は未知のスカラー量である。条件 4 から

$$N_a^t dF_a = 0 \quad N_b^t dF_b = 0 \quad \dots (14)$$

が導かれ、(11), (12), (13), (14) 式より、 $\mu_a, \mu_b, du_a^e, du_a^p, du_b^e, du_b^p$ を消去すれば断面力増分と変形増分の関係式が導かれ、塑性ヒンジのある部材の部材剛性行列 k^M は次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} k_{aa}^M &= k_{aa} - k_{aa} N_a (e_3 N_b^t k_{ba} - e_4 N_a^t k_{aa}) - k_{ab} N_b (e_1 N_b^t k_{ba} - e_2 N_a^t k_{aa}) \\ k_{ab}^M &= k_{ab} - k_{ab} N_b (e_1 N_b^t k_{bb} - e_2 N_a^t k_{ab}) - k_{aa} N_a (e_3 N_b^t k_{bb} - e_4 N_a^t k_{ab}) \\ k_{ba}^M &= k_{ba} - k_{ba} N_a (e_3 N_b^t k_{ba} - e_4 N_a^t k_{aa}) - k_{bb} N_b (e_1 N_b^t k_{ba} - e_2 N_a^t k_{aa}) \\ k_{bb}^M &= k_{bb} - k_{bb} N_b (e_1 N_b^t k_{bb} - e_2 N_a^t k_{ab}) - k_{ba} N_a (e_3 N_b^t k_{bb} - e_4 N_b^t k_{bb}) \end{aligned} \right\} \quad \dots (15)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= N_a^t k_{aa} N_a / c \\ e_2 &= N_b^t k_{ba} N_a / c \\ e_3 &= N_a^t k_{ab} N_b / c \\ e_4 &= -N_b^t k_{bb} N_b / c \\ c &= (N_b^t k_{bb} N_b) \times (N_a^t k_{aa} N_a) - (N_b^t k_{ba} N_a) \times (N_a^t k_{ab} N_b) \end{aligned} \right\} \quad \dots (16)$$

である。なお (15) 式の部材剛性行列は部材座標軸にもとづいて導かれたが、基礎座標軸への変換は (9) 式と同様に行える。

2.4 降伏条件式

降伏条件式は塑性ヒンジの形成を規定する条件であり、またすでに述べたように塑性ヒンジが発生した部材の、荷重増分の载荷に対する部材剛性を決定する条件でもあるため、立体骨組の弾塑性挙動を解析する上で、きわめて重要な役割を演ずると言える。従来、軸力と曲げ、あるいは曲げと捩りをうける断面の降伏条件に関してはいくつかの研究が見られるが、軸力、2 軸曲げおよび捩りをうける場合については、研究が十分なされたとはいえず、既往の研究のいずれもが断面を細分することによって、応力分布の近似解を求めようとする数値解法を試みている。本報告では、降伏条件式の重要性は認識しているものの、骨組解析への応用という点で降伏条件の数値解は複雑すぎるため、以下に述べる 2 種の解析的に表現された降伏条件式を採用している。

a. 球型降伏条件式

降伏条件式は無次元化された一般化応力空間での球面として表現されたもので、次式で与えられる。

$$\left(\frac{P_x}{P_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{z0}}\right)^2 = 1 \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで P_x, M_x, M_y, M_z は断面力ベクトルの要素で、それぞれ軸力、振りモーメント、2軸曲げモーメントである。また $P_{x0}, M_{x0}, M_{y0}, M_{z0}$ は対応する断面力要素が、単独で作用したときに断面全体を塑性化する量である。 M_x, M_{x0} については、St. Venant の振りだけを考慮した。

Fig. 5 にはいくつかの断面が組合わせ応力の作用下にある場合の降伏条件式の厳密解、あるいは数値解

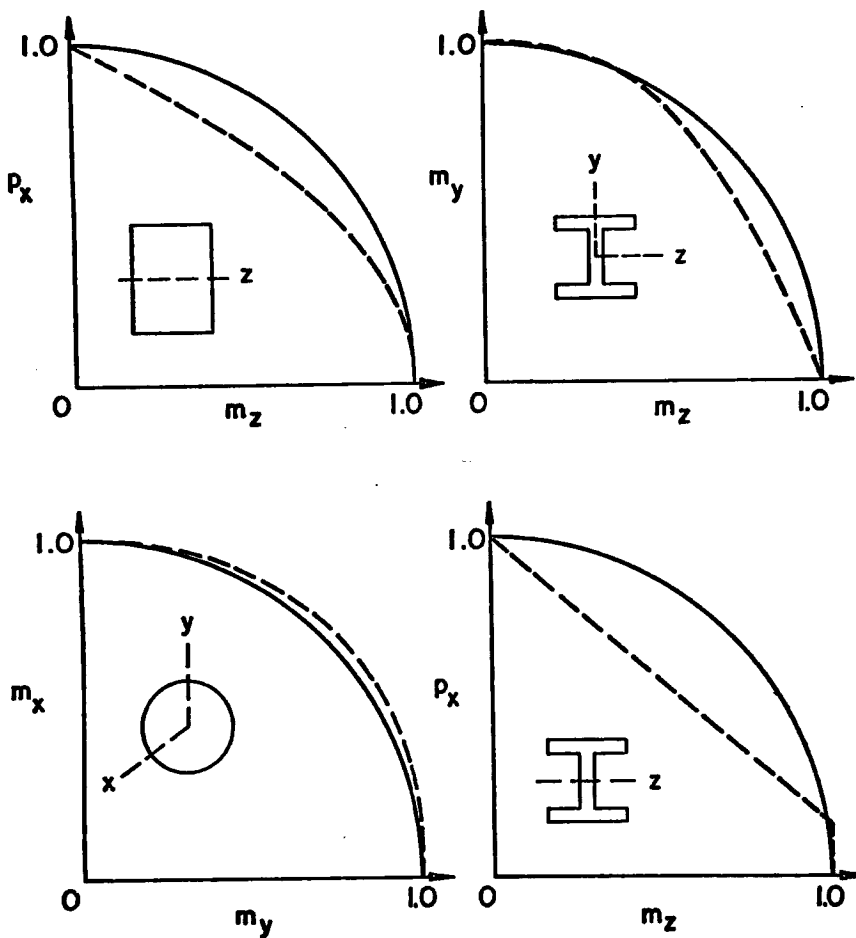


Fig. 5 Spherical and other yield conditions.

より近似されたもの(点線)と降伏球面(実線)との比較がなされている。球面に仮定した降伏条件式は、断面の最大耐力を大きく見積りすぎる場合もあるが、立体骨組の解析にあたって非常にとりあつかいが簡単であるという利点がある。

b. 多項式型降伏条件式

ここで示す降伏条件式は、軸力、2軸曲げおよび振りモーメントをうける断面の数値解を次に示すような

多項式を用いて近似したものである。数値解は参考文献(9)で Santathadaporn が示したものであり、多項式型の近似法は参考文献(2)で Bruinette が提案したものである。

$$\left. \begin{aligned} & (A_1 p^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2)(1-x^2)^2 + (A_4 p^4 + A_5 y^4 + A_6 z^4 + A_7 p^2 y^2 \\ & + A_8 p^2 z^2 + A_9 y^2 z^2)(1-x^2) + A_{10} p^6 + A_{11} y^6 + A_{12} z^6 + A_{13} p^2 y^4 \\ & + A_{14} p^2 z^4 + A_{15} y^2 z^4 + A_{16} y^2 z^4 + A_{17} p^4 z^2 + A_{18} y^4 z^2 + A_{19} p^2 y^2 z^2 \\ & + 3x^2 - 3x^4 + x^6 = 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここで $x = M_x/M_{x0}$, $y = M_y/M_{y0}$, $z = M_z/M_{z0}$, $P = P_x/P_{x0}$ である。係数 $A_1 \sim A_{19}$ の実際の数値は最小2乗法によって次のように得られた。

$$\left. \begin{array}{lll} A_1 = 3.489708 & A_8 = -6.738113 & A_{15} = 3.143256 \\ A_2 = 2.523469 & A_9 = -5.210651 & A_{16} = 2.521178 \\ A_3 = 3.398369 & A_{10} = 1.540177 & A_{17} = 3.106264 \\ A_4 = -4.028799 & A_{11} = 0.522171 & A_{18} = 1.812010 \\ A_5 = -2.045988 & A_{12} = 1.408034 & A_{19} = 4.453830 \\ A_6 = -3.804714 & A_{13} = 2.209103 & \\ A_7 = -5.688665 & A_{14} = 2.864298 & \end{array} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

(18)式の左辺の値が1.0に比較してどの程度異なるかを, Santathadaporn の x, y, z, p に対する数値解を代入して調べたが, 最大誤差約±5%という良好な結果を得た。

2.5 骨組全体の釣合方程式と弾塑性解析法

Fig. 6 に示すように, 節点 h, j, k より部材 l, m, n が節点 i に向って集まっている場合の, 節点 i における釣合を考える。各部材の i 端での断面力の総和は節点 i に作用する外荷重ベクトル $\bar{P}_i$ に等しいから, 釣合式は,

$$\bar{P}_i = \bar{F}_i^l + \bar{F}_i^m + \bar{F}_i^n \dots\dots\dots (20)$$

と書ける。ここで肩についた添字は部材を表わしている。各部材断面力と, その部材が結んでいる2節点における変位との関係は(10)式で与えられているから, (20)式の右辺各項について(10)式に相当する関係式を求めて(20)式に代入すれば, 結局

$$P = KU \dots\dots\dots (21)$$

のように骨組全体の釣合式が得られる。ここで P, U はそれぞれ外荷重および節点変位ベクトルで, 骨組が n 節点を有する場合には,

$$P = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{P}_n \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{u}_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

である。 K は骨組全体に対する剛性行列で, その要素は各部材剛性行列 $\bar{k}$ より構成されている。

(21)式で表わされた釣合式は外荷重 P と変位 U の間の線型な関係式であり, すべての荷重は比例的に増加することを考え合わせると, 塑性ヒンジが発生するまではいかなる荷重レベルに対する変位の解も, 単位荷重に対する変位の解に荷重係数 λ を乗じて得られる。いま, 単位荷重 P^0 に対する変位の解を U^0 とする

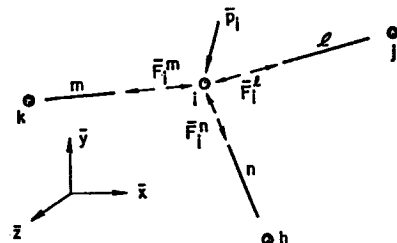


Fig. 6 Equilibrium at joint i in global coordinate.

と、 P^0 および U^0 は (21) 式を満足している。また節点変位 u_i^0 から部材剛性を使って各部材断面力 F_j^0 が決まる。任意荷重 $P^{(1)}$ に対する $U^{(1)}$, $u_i^{(1)}$, $F_j^{(1)}$ は荷重係数 λ_1 を使って

$$\left. \begin{aligned} P^{(1)} &= \lambda_1 P^0 \\ U^{(1)} &= \lambda_1 U^0 \\ u_i^{(1)} &= \lambda_1 u_i^0 \\ F_j^{(1)} &= \lambda_1 F_j^0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

と表現される。

さて最初の塑性ヒンジを生ずる荷重を $P^{(1)}$ と定義すると、対応する荷重係数 λ_1 は降伏条件式から求めることができる。降伏条件式を一般的に $G(F)=1.0$ と表わすことにすると塑性ヒンジ発生可能な点 m 個のすべてについて求められた断面力を降伏条件式に代入して

$$G(\lambda F_j^0)=1.0 \quad (j=1, 2, \dots, m) \dots\dots\dots (24)$$

が得られるが、(24) 式より m 個の λ が決定され、このうち最小のものが最初の塑性ヒンジを生ずる荷重係数 λ_1 である。

以上が最初の塑性ヒンジが発生するまでの計算操作であるが、塑性ヒンジが発生するとにヒンジの発生した部材の部材剛性を 2.3 節で述べた方法で修正して、(21) 式に相当する骨組全体の釣合式をたて、荷重増分に対する骨組の応答を求める操作を繰返し行うことによって、骨組の荷重変形曲線を描くことができる。いま、 $(n-1)$ 個の塑性ヒンジが骨組中に形成されており、 n 回目の荷重増分を載荷する場合を考える。骨組にはすでに $P^{(n-1)}$ なる荷重が載荷されており、変位 $U^{(n-1)}$, $u_j^{(n-1)}$ および断面力 $F_j^{(n-1)}$ が生じている。 $(n-1)$ 個の塑性ヒンジの形成を考慮して得られた骨組全体に対する剛性行列を $K^{(n)}$ と定義すると、単位

Table 1 Properties of sample frames.

Examples	2.6.1		2.6.2	2.6.3
	Beams	Columns		
A in ²	41.76	22.94	0.8351	0.075
J in ⁴	—	—	0.4773	2.78×10^{-4}
I _w in ⁶	—	—	—	—
I _y in ⁴	—	—	0.2419	3.906×10^{-4}
I _z in ⁴	3403.1	851.2	0.2419	5.625×10^{-3}
Z _x in ³	—	—	0.3635	3.909×10^{-3}
Z _y in ³	—	—	0.4039	4.688×10^{-3}
Z _z in ³	357.0	134.0	0.4039	5.625×10^{-3}
r ₀ ² in ²	—	—	—	—
h in	—	180.0	48.0	9.5
l in	36.0	—	55.6	9.5
E ksi	30000.0	30000.0	30000.0	30000.0
σ ₀ ksi	36.0	36.0	36.0	36.0
Cross section	21WF142	14WF78	Circular Tube	Rectangular
$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$				
ν=0.3				

荷重増分 P^0 と骨組応答の増分 $dU^{0(n)}$ との間には (21) 式と同様の関係式

$$P^0 = K^{(n)} dU^{0(n)} \quad \dots\dots\dots (25)$$

が成立している。(25) 式の解から、 n 回目の単位荷重増分に対する節点変位増分 $du_i^{0(n)}$ および部材断面力増分 $dF_j^{0(n)}$ とが求められるが、荷重係数 λ_n は (24) 式に相当する

$$G(F_j^{(n-1)} + \lambda_n dF_j^{0(n)}) = 1.0 \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad \dots\dots\dots (26)$$

から求まる m 個の λ の最小値として与えられる。従って n 回目の塑性ヒンジを生ずる荷重および骨組応答諸量は、

$$\left. \begin{aligned} P^{(n)} &= P^{(n-1)} + \lambda_n P^0 \\ U^{(n)} &= U^{(n-1)} + \lambda_n dU^{0(n)} \\ u_i^{(n)} &= u_i^{(n-1)} + \lambda_n du_i^{0(n)} \\ F_j^{(n)} &= F_j^{(n-1)} + \lambda_n dF_j^{0(n)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

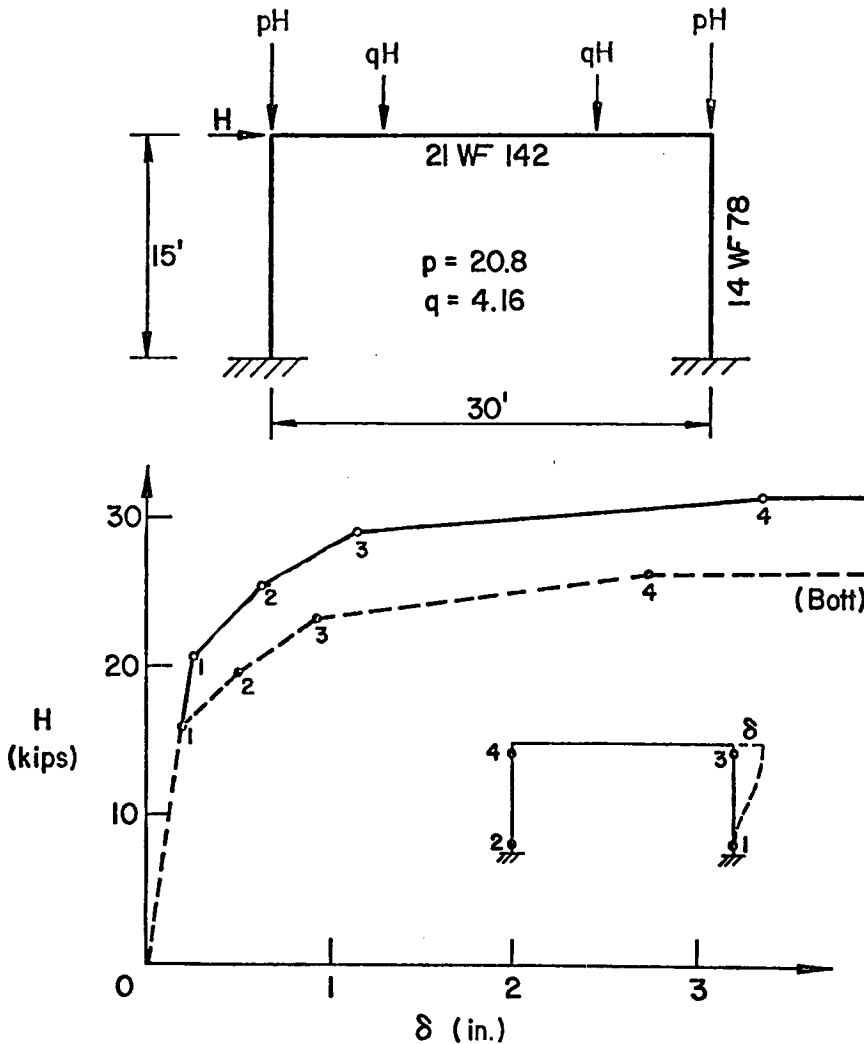


Fig. 7 Load-deflection curves of portal frame under in-plane loading.

のように決定される。

2.6 計算例

2.5節まで記述された不安定現象を考慮しない解析法を用いて数例の立体骨組が解析された。降伏条件式は特に指定しないかぎり(17)式で与えられる球型の降伏条件式を仮定した。骨組形状、部材の断面性能に関する諸量は Table 1 に示されている。 Z_y , Z_x は塑性弾面係数, Z_x はこれに σ_0 を乗ずると全塑性振りモーメントとなる量である。

2.6.1 門型骨組

Fig. 7 に水平荷重およびはりの中間に鉛直荷重を受ける門型骨組の水平荷重—変位曲線が示されている。点線で示された解析結果は, Fig. 5 に示された軸力と曲げをうける H 形断面の Interaction を2本の直線で近似した降伏条件式を使って Bott によって得られたものである¹⁰⁾。今回の解析(実線)では球型の条件式を仮定しているため骨組の耐力はかなり高くなっている。しかし, 塑性ヒンジの発生順位は全く Bott の解析結果と同様であり, 荷重—変位曲線の形もよく似ている。Fig. 8 は最初に発生した風下側柱脚ヒンジにおける断面力ベクトルの推移を示したもので, 図中の番号は塑性ヒンジの発生時点を表わしている。

2.6.2 3角柱型立体骨組

Harrison が実験を行った水平荷重だけを受ける3角柱型立体骨組の水平荷重—変位曲線が Fig. 9 に示されている¹¹⁾。実験値(点線)は解析値(実線)よりも, 弾性域においてさへかなり高い耐力を示している。これは実験において各部材接合用に使われた大きな鉄骨ブロックが部材の実長を短くしており, 部材軸線

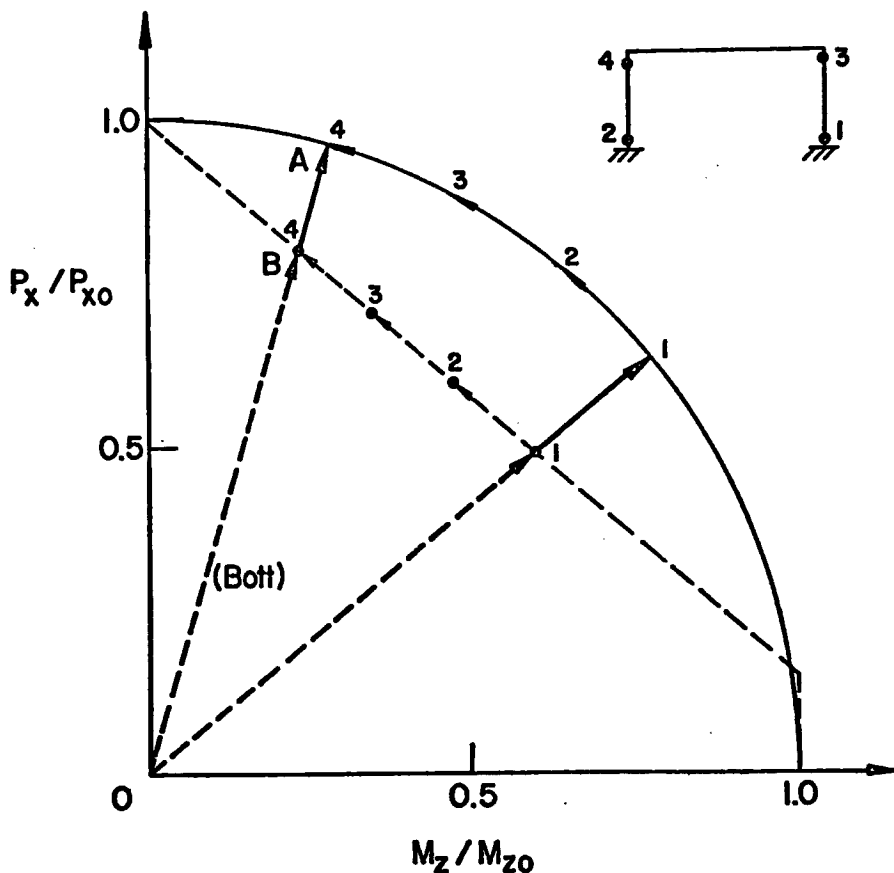


Fig. 8 Movement of force vector at plastic hinge 1.

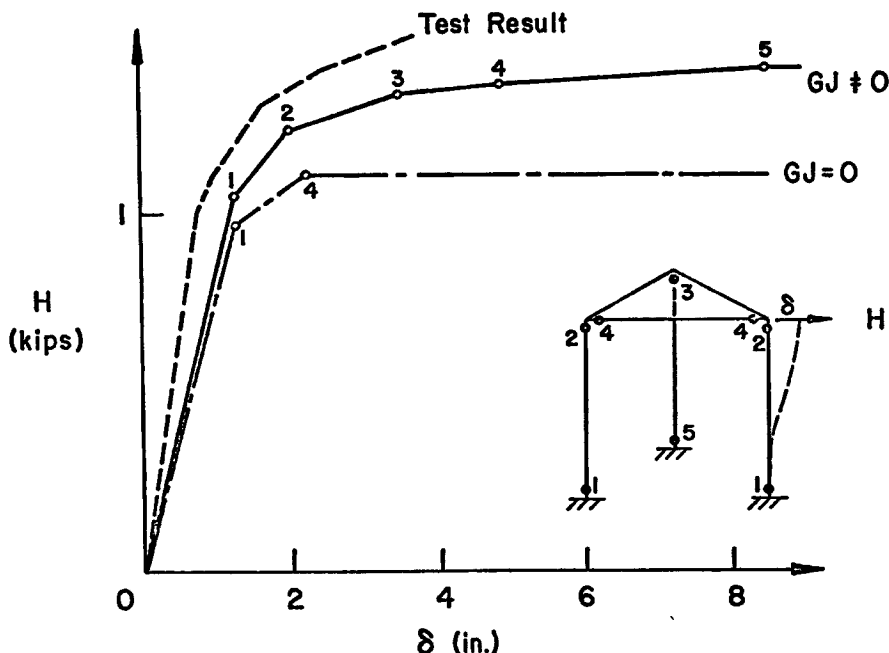


Fig. 9 Load-deflection curves of one-story triangular space frame.

の交点間距離を部材長として仮定した解析の場合とかなりへだたりがあるためと考えられる。Fig. 9 に1点鎖線で示された解析結果は、各部材の振り剛性を0と仮定して得られたものである。水平荷重の作用面内にある門型骨組に4個の塑性ヒンジが発生した後の状態を考えると、振り剛性を考慮した場合には中央の柱の振り抵抗によって骨組耐力はさらに増加しうが、振り剛性を0と仮定すると骨組はすでに崩壊機構に達しているため耐力の上昇は期待できない。

2.6.3 門型骨組

Fig. 10 は一定の面内水平荷重と漸増する、はり中央に作用する面外水平荷重とを受ける門型骨組の荷重—変位曲線である。点線は Martin¹²⁾ によって得られた実験値で、実線は解析値である。この骨組は面外に関して2本の片持ちり型の柱をはりによって結合したような構造と載荷状態であるため、両柱脚に同時に塑性ヒンジが発生すると崩壊にいたる。両柱脚の断面力の状態は、2軸曲げと振りであるが、面外水平荷重 T による曲げモーメントが優越しているため、近似的な球型降伏条件式を用いても、骨組最大耐力の実験値は解析値によってよく予想されている。大変位領域では実験で得られた耐力はひずみ硬化の影響で上昇を続ける。

3. 立体骨組の弾性座屈解析

3.1 仮定

a. 材料

1. 材料の応力—ひずみ関係は完全弾性である。

b. 部材および骨組

1. 部材はすべて2軸対称断面の等断面材である。
2. 残留応力、元たわみなどの初期不完全性はないものとする。
3. 骨組は節点にのみ荷重をうけており、座屈以前に生ずる1次的な曲げモーメント、振りモーメント

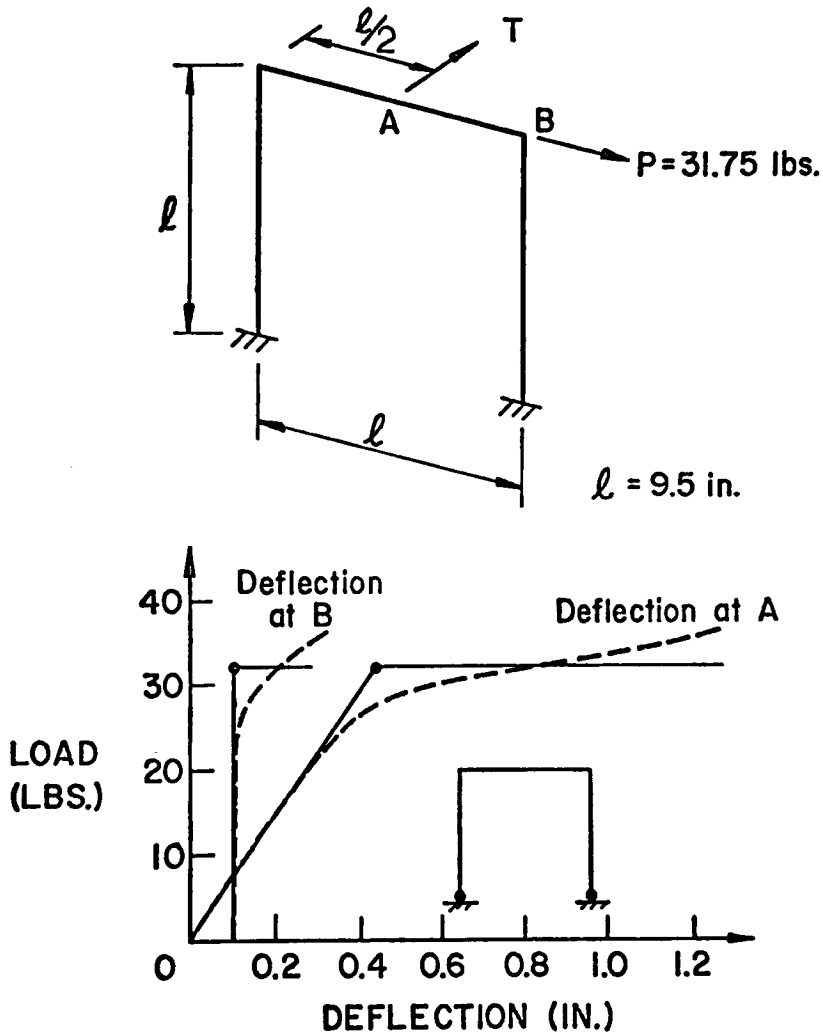


Fig. 10 Load-deflection curves of portal frame under transverse loading.

の影響は考慮しない。

c. 変形状態

1. 部材のたわみは、曲率がたわみの2回微分で表わされる程度に小さく、たわみ角の余弦は1に等しいものとする。
2. せん断変形は考慮しない。

d. 微分方程式と剛性の低減

1. 各部材の変形した状態での釣合状態は後述のように2軸方向の曲げと振りに関してそれぞれ独立した微分方程式によって表わされる。部材剛性は従って軸力によってだけ低減される。

3.2 軸力によって低減された部材剛性行列

座屈によって変形を生じた部材、特に高軸力を受ける柱材の変形後の釣合状態を表わす微分方程式は2軸対称断面部材の場合、次の3式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} EI_z u_y^{iv} + P u_y'' &= 0 \\ EI_y u_z^{iv} + P u_z'' &= 0 \\ EI_w \theta_x^{iv} - (GJ - P r_0^2) \theta_x'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ここで u_y, u_z, θ_x は材軸方向に分布する 2 方向横たわみおよび振り角で、' は x に関する微分を表わすものとする。また I_w は反りによる断面 2 次モーメント、 r_0 は極 2 次半径である。 P は圧縮軸力を正にとるものとする。これらの微分方程式の解はすでにいくつかの研究で論じつくされているので、ここでは詳述をさけるが、3 個のパラメーター

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P r_0^2 - GJ}{EI_w}} \\ \tau_y &= \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI_y}} \\ \tau_z &= \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI_z}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

が実数となる場合、対応する変形状態は x の 3 角函数として表わされ、逆に虚数となる場合は双曲函数で与えられる。 x の函数として表現されたたわみおよび振り角から座屈によって生ずる部材端部の曲げモーメントおよび振りモーメントを計算すると、これら曲げモーメントおよび振りモーメントは部材端部でのたわみ角、部材回転角および振り角と関係づけられ、軸力によって低減された部材剛性行列を導くことができる。ここでは中間の演算を省略して軸力によって低減された部材剛性行列 k^r を示す。

$$\left. \begin{aligned} k_{aa}^r &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} \delta_z & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \gamma_z \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} \delta_y & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_w}{L^3} \delta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} \gamma_y & 0 & \frac{4EI_y}{L} \alpha_y & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \gamma_z & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \alpha_z \end{bmatrix} \\ k_{ab}^r &= \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} \delta_z & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \gamma_z \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} \delta_y & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_w}{L^3} \delta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \gamma_y & 0 & \frac{2EI_y}{L} \beta_y & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \gamma_z & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \beta_z \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

$$k_{ba}^r = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3}\delta_z & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^3}\gamma_z \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3}\delta_y & 0 & \frac{6EI_y}{L^3}\gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_w}{L^3}\delta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^3}\gamma_y & 0 & \frac{2EI_y}{L}\beta_y & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^3}\gamma_z & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L}\beta_z \end{bmatrix}$$

$$k_{bb}^r = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3}\delta_z & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^3}\gamma_z \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3}\delta_y & 0 & \frac{6EI_y}{L^3}\gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_w}{L^3}\delta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^3}\gamma_y & 0 & \frac{4EI_y}{L}\alpha_y & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^3}\gamma_z & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L}\alpha_z \end{bmatrix}$$

これらの部材剛性行列を用いて部材断面力と部材端部の変形の関係は(1)式と同様に

$$\left. \begin{aligned} F_a &= k_{aa}^r u_a + k_{ab}^r u_b \\ F_b &= k_{ba}^r u_a + k_{bb}^r u_b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

のように与えられる。(30)式から軸力によって低減された部材剛性行列は軸力の影響を考慮しない場合の剛性行列の各要素に低減係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を乗じた形で導かれることがわかる。これらは Stability Function と呼ばれて形に多少の違いはあるが、すでに数人の研究者によって提案されたものである。これらのパラメータは、ここでは、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \frac{1}{4} \frac{\tau_i^2 + \tau_i \cot \tau_i - \tau_i^2 \cot^2 \tau_i}{1 - \tau_i \cot \tau_i} \\ \beta_i &= \frac{1}{2} \frac{\tau_i^2 - \tau_i \cot \tau_i + \tau_i^2 \cot^2 \tau_i}{1 - \tau_i \cot \tau_i} \\ \gamma_i &= \frac{1}{3} \frac{\tau_i^2}{1 - \tau_i \cot \tau_i} \\ \delta_i &= \frac{1}{3} \frac{\tau_i^3 \cot \tau_i}{1 - \tau_i \cot \tau_i} \\ \tau_i &= \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI_i}} \end{aligned} \right\} (i = y, z) \dots\dots\dots (32)$$

で与えられ、振りに関しては以下に示すように部材端部での反りに対する拘束条件によって異なる。

1. 反りが各部材端部で完全に拘束されている場合

振りに関する微分方程式 (28) の第3式から、反り完全拘束の境界条件 $\theta_x' = 0$ を部材端部に適用して得られる δ_x は、

$$\delta_x = \frac{1}{3} \frac{\tau_x^3 \cot \tau_x}{1 - \tau_x \cot \tau_x} \quad (33)$$

である。

2. 反りが各部材端部で完全に自由な場合

反り自由の境界条件 $\theta_x'' = 0$ を用いて得られる δ_x は

$$\delta_x = \frac{1}{3} (-\tau_x^3) \quad (34)$$

であるが、この場合、部材剛性行列の要素を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{12EI_w}{L^3} \delta_x &= -\frac{12EI_w}{L^3} \frac{1}{3} \tau_x^3 \\ &= -\frac{4EI_w}{L^3} \left[\frac{L}{2} \sqrt{\frac{Pr_0^2 - GJ}{EI_w}} \right]^3 \\ &= \frac{GJ - Pr_0^2}{L} \quad (35) \end{aligned}$$

となり結果的には反り剛性の影響があらわれない。

3. 振りに関する微分方程式において反り剛性と軸力の影響項を無視した場合

この場合、振りモーメントと振り角の関係は

$$M_x = \frac{GJ}{L} \theta_x \quad (36)$$

となり δ_x は

$$\delta_x = \frac{L^3}{12EI_w} \cdot \frac{GJ}{L} = \frac{GJL^3}{12EI_w} \quad (37)$$

で与えられる。

3.3 座屈条件式

各部材剛性行列が求まると (9) 式で示した部材座標系から基礎座標軸への変換公式を用いて、(30) 式で与えられる剛性行列を変換し、(21) 式に相当する骨組全体の釣合方程式

$$P = K^r U \quad (38)$$

が得られる。ここで K^r は各部材の軸力によって低減された骨組全体の剛性行列である。 K^r は軸力の関数つまり荷重ベクトル P の関数であるから

$$K^r = K^r(P) \quad (39)$$

と書くことができる。座屈条件式は

$$D \equiv |K^r(P)| = 0 \quad (40)$$

で与えられ、数値解析にあたっては、剛性行列の行列式の値を0とするような荷重ベクトルの値を試錯法によって求めることになる。Fig. 11 には荷重 P と行列式の値 D の関係が模式的示してあるが実線上の点は数値計算によって得られた解である。仮定された P に対応する D を求める操作を繰り返し、断続的に得られた $D-P$ 座標上の点を結んで得られるのが実線であって、補間によって座屈荷重 P_{cr} を求めることができる。しかし荷重ベクトル P を仮定するときの増分が大きすぎると、Fig. 11 に点線で示された真の D と P の関

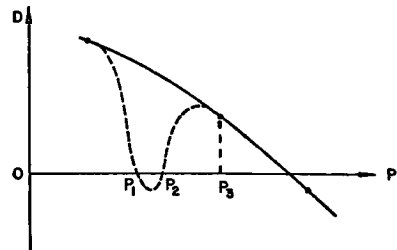


Fig. 11 Relationship between load and determinant of stiffness matrix.

係を失う場合がある。また行列式の値だけを追跡していると、座屈モードを確認することができないため、ここでは実際の数値計算にあたって以下の方法をとった。

固有値問題

$$K^r(P)U - aU = 0 \quad \dots\dots\dots (41)$$

を考える。(41)式の固有値の解は

$$|K^r(P) - aI| = 0 \quad \dots\dots\dots (42)$$

を解くことによって求めることができる。ここで I は K^r と同じサイズをもった単位行列である。(42)式を解いて得られる固有値 a_i (K^r のサイズが $n \times n$ の場合, $i=1, 2, \dots, n$) を使って $K^r(P)$ の行列式の値 D は

$$D = \prod_{i=1}^n a_i \quad \dots\dots\dots (43)$$

で与えられる。 P が座屈荷重 P_{cr} に達すると

$$|K^r(P_{cr})| = 0 \quad \dots\dots\dots (44)$$

であるから (43)式からこのときの対応する固有値 a_i のうち少なくとも 1 個は 0 になっており、対応する固有ベクトルが座屈モードを与える。Fig. 11 に示す荷重と行列式の関係では $P=P_3$ と仮定した場合、 $K^r(P_3)$ の固有値のうち 2 個が負の値をとり、(43)式から行列式の値が正値をとっている。従って $P=P_3$ と仮定した段階で行列式の値だけでなく最小の固有値の符号を調べることによって仮定した P の値が座屈荷重より大きいかどうか判定することができる。

3.4 計算例

前節までに記述した立体骨組の弾性座屈解析法を数例の骨組に適用して、座屈荷重と座屈モードとを求めた。骨組の形状、各部材の断面性能に関する諸量は Table 2 に示されている。

Table 2 Properties of sample frames.

Examples	3.4.1	3.4.2	3.4.3
A in ²	1.267×10^{-2}	14.4	10.59
J in ⁴	2.474×10^{-5}	1.39	0.90
I _w in ⁶	0	2073.0	811.1
I _y in ⁴	1.237×10^{-5}	93.0	23.7
I _z in ⁴	1.237×10^{-5}	171.9	280.8
Z _x in ³	—	—	—
Z _y in ³	—	—	—
Z _z in ³	—	—	—
r ₀ ² in ²	1.953×10^{-3}	25.4	28.75
h in	7.875	50.8	120.0
l in	10.625	152.4	360.0
E ksi	14000.0*	30000.0	30000.0
σ ₀ ksi	—	—	—
Cross Section	Circular Rod	10WF49	12WF36
$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$		$\nu = 0.3$ * $\nu = 0.25$	

3.4.1 3角柱型立体骨組

Fig. 12 にはそれぞれの柱頭に等しい大きさの鉛直荷重をうける3角柱型立体骨組の鉛直荷重の値と剛性

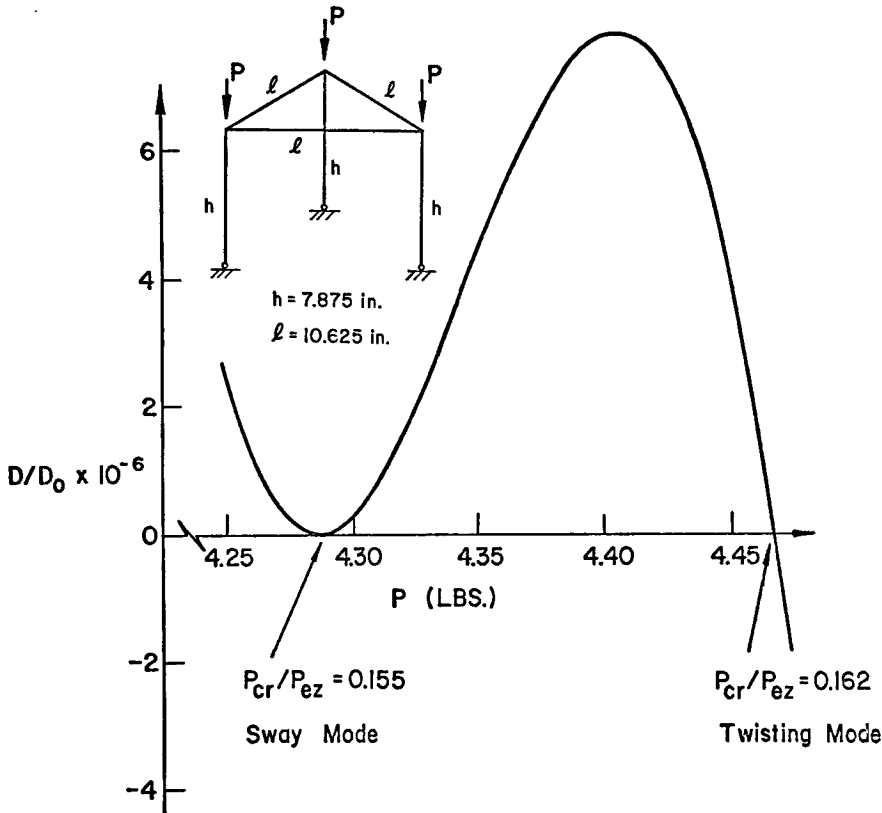


Fig. 12 Buckling loads of one-story triangular space frame.

行列式の値の関係が示されている。 D_0 は荷重0の場合の行列式の値、 P_{ez} は柱材が両端でピン支持されていると仮定して求めた z 軸まわりの曲げ座屈荷重である。荷重の増加とともに行列式の値は低下し、横変位型の座屈モードを伴う座屈荷重 $P_{cr}/P_{ez}=0.155$ で0となりその後上昇するがあらためて $P_{cr}/P_{ez}=0.162$ で0となる。この値は振り型のモードに対応している。Fig. 13 には横変位型および振り型の座屈モードが示してあるが、横変位型の場合には同一の荷重のもとで2種のモードが可能であるため、前節で述べた固有値のうち2個が同一荷重下で同時に0となる。これら2個の固有値は荷重が横変位型座屈モードを伴う座屈荷重を越えると負値をとるため行列式の値は正となる。このような経過で D と P の関係を示す曲線は $P_{cr}/P_{ez}=0.155$ で P 軸に接した後上昇し、この近傍では行列式の値は負とならない。

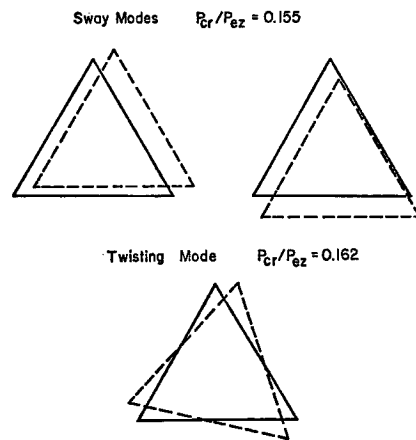


Fig. 13 Buckling modes of one-story triangular space frame.

3.4.2 正4角柱型立体骨組

4本の柱のそれぞれに等しい大きさの鉛直荷重をうける正4角柱型立体骨組が Fig. 14 に示されている。柱高さは $20r_y$ (r_y は H 形断面の弱軸まわりの回転2次半径) と短く、柱断面は Fig. 14 に示すように骨組の重心に関して点対称となるよう配置されている。この骨組の剛性行列の行列式の値と荷重の関係が仮定された反り拘束条件によってどのように変化するかを調べたが、曲線①, ②, ③はそれぞれ前節で述べた反りに対する拘束条件 1, 2, 3 に対応して得られた結果である。Fig. 15 の座屈モードから明らかなように、前

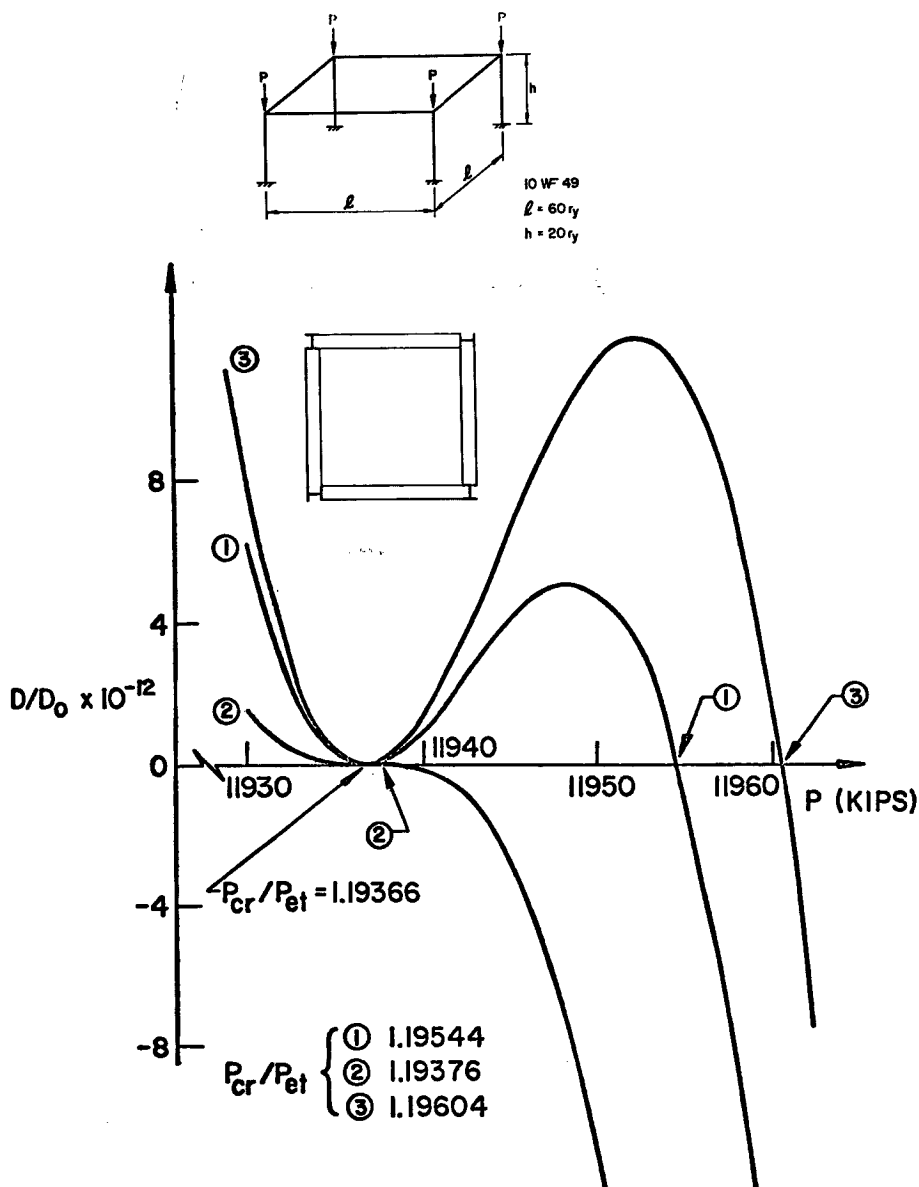


Fig. 14 Buckling loads of one-story square space frame.

の例題と同じく $P_{cr}/P_{et}=1.9366$ (P_{et} は柱の純ねじり座屈荷重) で2種の横変位型座屈モードが可能であるため、反り拘束条件の違いにかかわらずいずれの曲線も P 軸に接し、またいずれの部材にも座屈によって振りが生じないため、反り拘束条件の差は座屈荷重に影響を及ぼさない。各曲線は P が振り型の座屈モードを生ずる荷重に達すると P 軸に交わり仮定された反り拘束条件の影響があらわれるが座屈荷重の差は非常に小さい。

3.4.3 門型骨組

反り拘束条件の影響を調べる目的で、Fig. 16 に示されている門型骨組の面外座屈荷重が求められた。この場合も前2題の場合と同様、横変位型の座屈モードを伴った座屈が先に起り、この場合はどの部材にも振りが生じないため、反り拘束条件の座屈荷重に対する影響はない。また振り型のモードを生ずる場合でも、柱材の変形状態は横変位が優越しており、柱断面のせん断中心に関する振り角が小さいため、反り

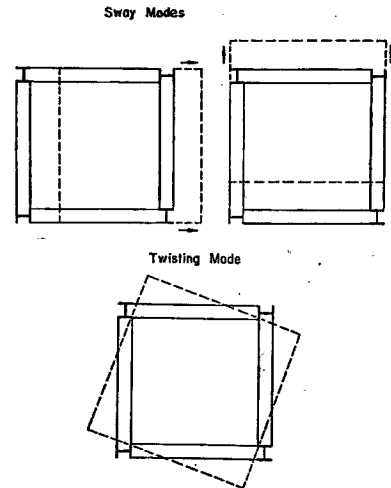


Fig 15. Buckling modes of one-story square space frame.

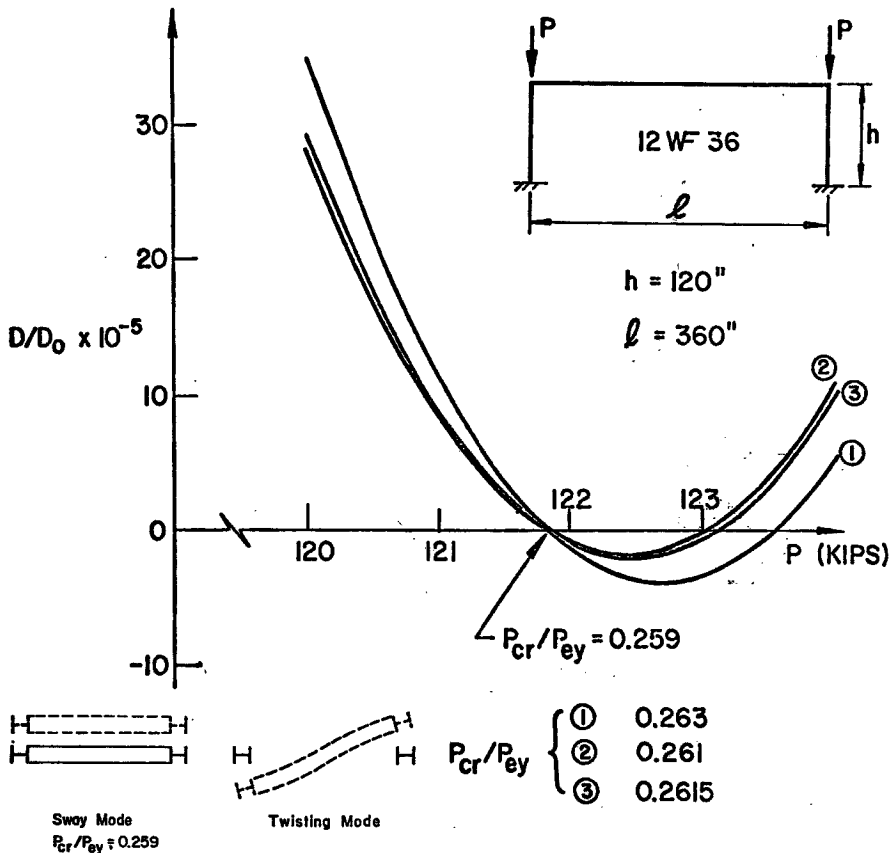


Fig. 16 Buckling loads and modes of portal frame.

拘束条件の差違による座屈荷重の差は大きくあらわれてこない。

4. 不安定現象を考慮に入れた立体骨組の弾塑性解析

4.1 仮定

不安定現象を考慮に入れた立体骨組の解析にあたって設けられた仮定の大部分は、すでに 2.1 で述べられた不安定現象を考慮しない場合の仮定と同様である。ここでは 2.1 であげられた仮定と異なるものをだけを列記する。

a. 降伏条件式

1. 降伏条件式は

$$0.95 \leq G(F) \leq 1.05 \quad \dots \dots \dots (45)$$

で与えられる。

2. 全塑性振りモーメントは Warping Torsion だけによって生ずるせん断応力が全断面で降伏値 τ_0 に達したと仮定して計算する。

b. 部材および骨組

1. 部材の釣合状態を表わす微分方程式は変形後の状態で導かれるが、たわみおよびその微分は微小であると仮定してこれらの積は無視する。

2. 部材の中間点に塑性ヒンジが発生する可能性は無視する。

3. 反りは部材端部あるいは荷重点においてだけ完全に拘束されている。

4.2 部材端断面力によって低減された部材剛性行列

Fig. 17 に示されているような、部材端部に 6 個の要素をもつ断面力ベクトルを受けて変形した部材の釣合状態は 2 軸曲げと振りに関して以下に示す 3 式で表わされる。

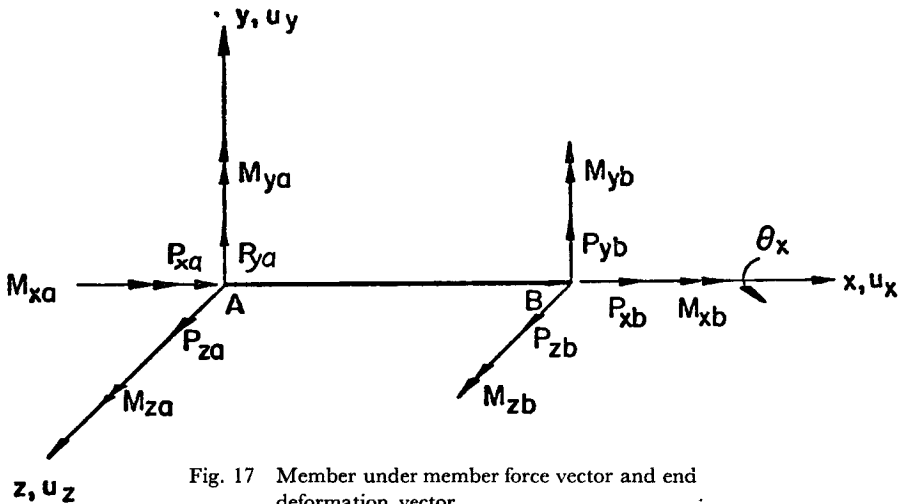


Fig. 17 Member under member force vector and end deformation vector.

$$\left. \begin{aligned} EI_y u_z'' + P_{xa}(u_z - u_{za}) - P_{xa} \frac{x}{L}(u_{zb} - u_{za}) + \{M_{za} + \frac{x}{L}(-M_{za} + M_{zb})\} \theta_x \\ - M_{xb} u_y' = M_{ya} - \frac{x}{L}(M_{ya} + M_{yb}) \\ EI_z u_y' + P_{xa}(u_y - u_{ya}) - P_{xa} \frac{x}{L}(u_{yb} - u_{ya}) + \{-M_{ya} + \frac{x}{L}(M_{ya} + M_{yb})\} \theta_x \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &+M_{xb}u_z'=-M_{za}+\frac{x}{L}(M_{za}+M_{zb}) \\
 &EI_u\theta_x'''-(GJ-P_{xa}r_0^2)\theta_x'+\{-M_a+\frac{x}{L}(M_{ya}+M_{yb})\}u_y' \\
 &+\{-M_{za}+\frac{x}{L}(M_{za}+M_{zb})\}u_z' \\
 &-\frac{1}{L}(M_{ya}+M_{yb})u_y-\frac{1}{L}(M_{za}+M_{zb})u_z=-M_x
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

これらの式は一般的に用いられるものであるからここでは誘導を省略する。これらの微分方程式の解析解を得ることが不可能なため、3章で求められた軸力によって低減された部材剛性のように、解析的に表現された部材剛性を求めることができない。ここでは以下に述べる方法で部材軸に沿って分布する2方向横たわみおよび振り角を近似的に求め、部材端部に作用する断面力ベクトルと変形ベクトルとの関係を求めた。

まず(46)式の各式を x で微分して

$$\begin{aligned}
 &EI_yu_z^{iv}+P_{xa}u_z''-M_{xb}u_y''' + \frac{2}{L}(M_{za}+M_{zb})\theta_x' \\
 &+\{-M_{za}+\frac{x}{L}(M_{za}+M_{zb})\}\theta_x''=0 \\
 &EI_zu_y^{iv}+P_{xa}u_y''+M_{xb}u_z''' + \frac{2}{L}(M_{ya}+M_{yb})\theta_x' \\
 &+\{-M_{ya}+\frac{x}{L}(M_{ya}+M_{yb})\}\theta_x''=0 \\
 &EI_u\theta_x^{iv}-(GJ-P_{xa}r_0^2)\theta_x''+\{-M_{ya}+\frac{x}{L}(M_{ya}+M_{yb})\}u_y'' \\
 &+\{-M_{za}+\frac{x}{L}(M_{za}+M_{zb})\}u_z''=0
 \end{aligned}
 \tag{47}$$

が得られる。ここで、部材軸に沿って分布する u_y , u_z , θ_x の諸量が x の多項式で表わされると仮定する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned}
 u_y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \\
 u_z &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 \\
 \theta_x &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4
 \end{aligned} \right\} \tag{48}$$

ここで a_i , b_i , c_i ($i=0, 1, 2, 3, 4$) は未知係数である。(48)式を(47)式に代入し、かつ境界条件

$$\left. \begin{aligned}
 x=0: & \quad u_y = u_{ya} \quad u_z = u_{za} \quad \theta_x = \theta_{xa} \\
 & \quad u_y' = \theta_{za} \quad u_z' = -\theta_{ya} \quad \theta_x' = 0 \\
 x=L: & \quad u_y = u_{yb} \quad u_z = u_{zb} \quad \theta_x = \theta_{xb} \\
 & \quad u_y' = \theta_{xb} \quad u_z' = -\theta_{yb} \quad \theta_x' = 0
 \end{aligned} \right\} \tag{49}$$

を用いて未知係数について解くと、 a_i , b_i , c_i のそれぞれは模式的に

$$\left. \begin{aligned}
 a_i &= A_i(F_a, F_b) \cdot u_a + \bar{A}_i(F_a, F_b) \cdot u_b \\
 b_i &= B_i(F_a, F_b) \cdot u_a + \bar{B}_i(F_a, F_b) \cdot u_b \\
 c_i &= C_i(F_a, F_b) \cdot u_a + \bar{C}_i(F_a, F_b) \cdot u_b
 \end{aligned} \right\} \tag{50}$$

と表わされる。ここで F_a , F_b は部材端部における断面力ベクトル、 A_i , B_i , C_i , $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}_i$ は断面力ベクトル要素と断面性能諸量の関数を要素にもつベクトル、また u_a , u_b は部材端部変形ベクトルである。(50)式から未知係数は変形ベクトルの1次結合として表現できることがわかる。(50)式を(48)式に代入すると部材軸に沿って分布するたわみおよび振り角が求まるから、これを(46)式に代入して、かつ $x=0$ および $x=L$ と置くことによって、部材端部に作用する断面力ベクトル F_a , F_b と変形ベクトル u_a , u_b の関係が(1)

式と同様の形で求まる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} F_a &= k_{aa}^s u_a + k_{ab}^s u_b \\ F_b &= k_{ba}^s u_a + k_{bb}^s u_b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

ここで k^s の各要素は断面力ベクトル F_a, F_b と断面性能に関する諸量の複雑な関数である。

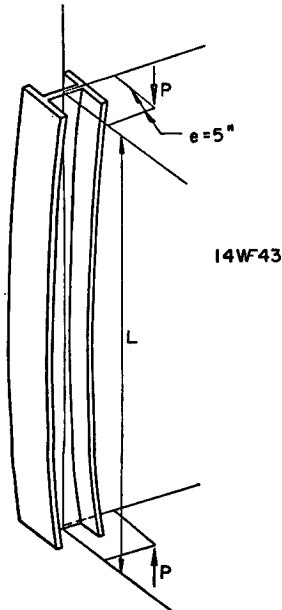


Fig. 18 Eccentrically loaded column.

以上は低減された部材剛性行列の誘導の手法を述べたにすぎない。実際の演算は非常に繁雑であり、 k^s の各要素の表現も非常に長いので、ここでは省略する。ここで示された誘導の手法は3章で記述された、軸力によって低減された部材剛性行列 k^r の場合と同様であるが、3章では微分方程式(28)の解が解析的に求められるのに対して、ここでは解の形を(48)式のように近似した点が異なっている。この近似度を検討するために、Fig. 18 に示すような2軸偏心圧縮を受ける柱材の解析を行った。Fig. 19 には漸増する圧縮力と、柱材中央点における2方向の横たわみと振り角の関係が示されている。解析は3種類の長さ、すなわち $L/r_y = 40, 60, 80$ の柱について反りは柱端部で完全に拘束されていると仮定して行われた。Fig. 19 の各図において、実線はここで導かれた近似的な部材剛性による解析結果であって、 $L/r_y = 60$ については Culver⁽¹³⁾ の正解(一点鎖線)、 $L/r_y = 40, 80$ については差分法による解(点線)をもあわせて示した。近似解は、部材長さが長くなる程精度が落ちること、また横たわみの解にくらべると振り角の解の精度の悪いことなどが Fig. 19 からわかる。

4.3 骨組全体の釣合方程式と弾塑性解析法

部材端断面力によって低減された部材剛性行列 k^s が求まると骨組全体に対する釣合方程式

$$P = K^s U \dots\dots\dots (52)$$

は2章で示された手法と同様にして導くことができる。2章に示された不安定現象を考慮しない立体骨組の弾塑性解析では、(21)式が線型であるため、塑性ヒンジの生ずるときの荷重と骨組応答が容易に求められたが、(52)式は骨組の剛性 K^s が荷重 P の関数になっているため(52)式をある荷重に対して直接解くことができない。実際の数値計算にあたっては、まずある荷重レベルに対する骨組応答の第1近似解を骨組の初期剛性を使って求め、この近似解によって骨組剛性 K^s を修正して、あらためて(52)式から骨組応答の第2近似を求めるという試錯法を用いている。試錯は骨組応答が収斂するまで繰返され、ある荷重レベルに対する真の骨組応答が決定される。この骨組応答、つまり収斂した断面力ベクトルのうちの1個が降伏条件式を満足するような荷重レベルをあらかじめ予測することは不可能であるから、ここでは収斂した断面力ベクトルのすべてを降伏条件式(45)に代入して検討し、(45)式を満足している場合には、塑性ヒンジが形成されたものとして部材剛性の計算を(15)式に従って行い、以後の荷重増分の载荷に移った。荷重レベルが骨組最大耐力に近づくと収斂が悪くなるが、規定の試錯回数で骨組応答が収斂しない場合は、荷重レベルを前回よりも下げることによって、骨組の荷重—変位曲線の下降勾配部分の解を得ている。

4.4 計算例

前節までに記述した方法によって、数例の立体骨組の弾塑性解析を行った。骨組形状、部材断面性能は Table 3 に示す。

4.4.1 正4角柱型立体骨組

Fig. 20 には鉛直荷重と水平荷重が比例的に载荷された正4角柱型立体骨組の水平荷重—変位曲線の解析結果が示されている。この骨組は Ovunc が弾塑性解析を行った、はりに中間荷重のある骨組を、そのまま

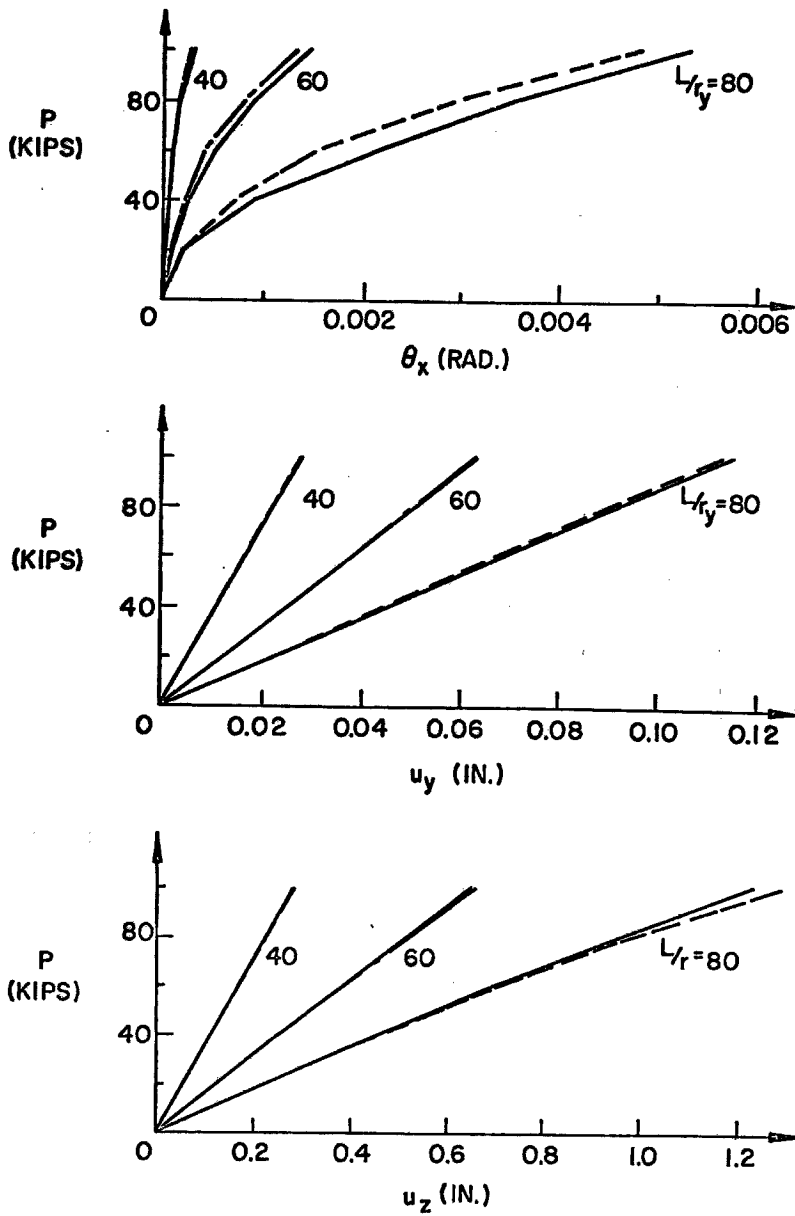


Fig. 19 Load-deflection curves of eccentrically loaded column.

Table 3 Properties of sample frames.

Examples	4.4.1		4.4.2	4.4.3
	Beams	Columns		
A in ²	17.64	17.66	7.06	12.65
J in ⁴	2.40	2.53	0.35	1.06
I _w in ⁶	3629.0	2666.0	258.1	950.0
I _y in ⁴	47.1	116.5	18.2	45.1
I _z in ⁴	984.0	343.7	82.5	429.0
Z _x in ³	53.24	38.01	14.43	33.4
Z _y in ³	20.58	35.05	8.52	17.2
Z _z in ³	122.6	75.1	23.1	69.7
r ₀ ² in ²	58.45	26.06	15.13	37.5
h in	—	144.0	96.6	113.4
l in	144.0	—	48.3	113.4
E ksi	30000.0	30000.0	30000.0	30000.0
σ ₀ ksi	34.0	34.0	36.0	36.0
Cross Section	18WF60	10WF60	8WF24	14WF43

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$
 $\nu = 0.3$

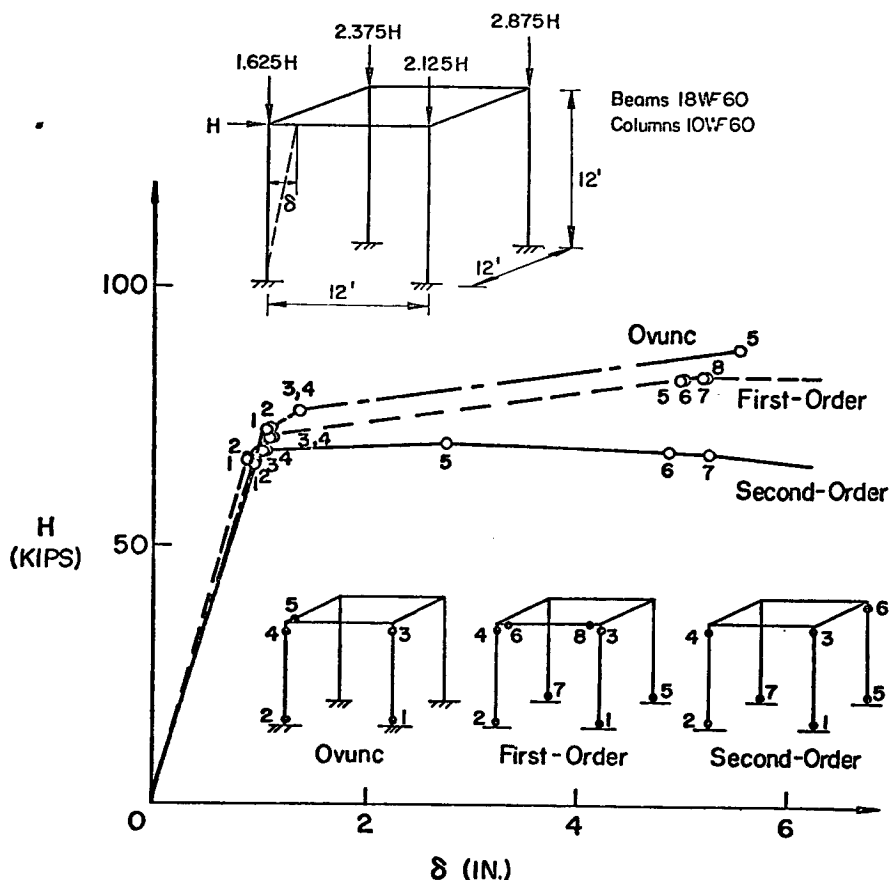


Fig. 20 Load-deflection curves of one-story square space frames.

採用したものであるが、ここでははりの中間荷重を等価な節点荷重に変換して载荷した。従って、直接比較はできないが、Ovunc の解析結果も参考のため一点鎖線で示した。不安定現象を考慮しない場合の解析結果 (First-order) は点線で示され、これを考慮した場合の解 (Second-order) が実線である。両者ともに、比較的早い時期に水平荷重の作用面内にある門型骨組中に4個の塑性ヒンジが生ずるが、First-order の解析では5番目のヒンジが生ずるまでに大変形を伴うのに対して、Second-order の解析ではさほど変形が進行しないうちに5番目の塑性ヒンジを生じて骨組は最大耐力に達している。最大耐力の低下、靱性の低下などに鉛直荷重による不安定現象の影響があらわれている。

Fig. 21 は仮定された降伏条件式の影響を調べる目的で、Fig. 20 に示された骨組について2種類の降伏

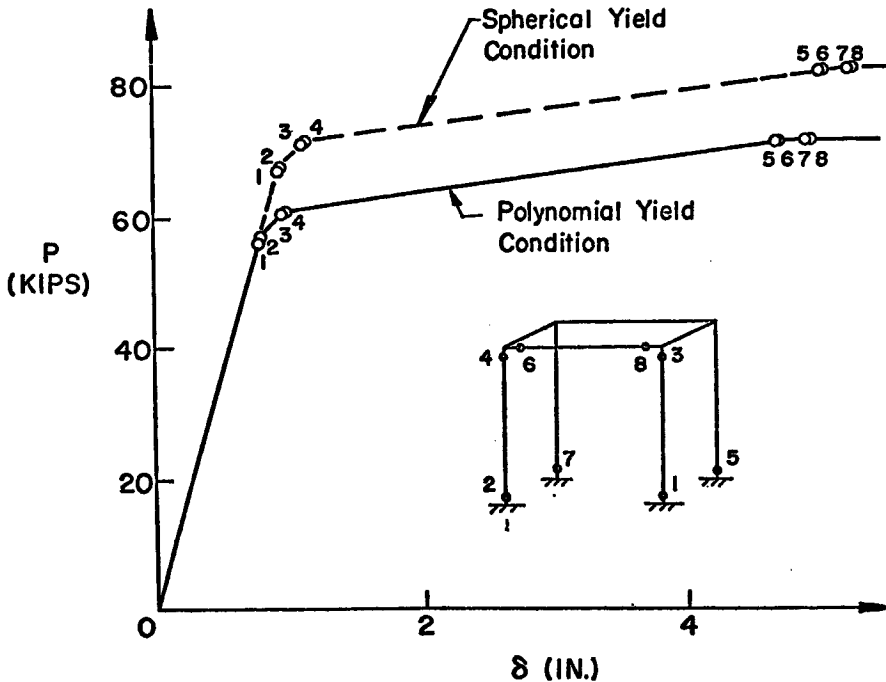


Fig. 21 Load-deflection curves of one-story square space frame.

条件式を仮定して、不安定現象を考慮しない弾塑性解析を行った結果である。点線は球型の降伏条件式を仮定した場合で、実線は多項式型降伏条件式の場合である。球型の条件式は多項式型よりも断面の耐力を高く見積るため骨組耐力も高いのは当然であるが、塑性ヒンジの発生位置あるいは発生順序に関しては、両者による解析結果は全く同一であり、また荷重—変位曲線の形状もよく似ている。

4.4.2 正5角柱型立体骨組

Fig. 22 には、鉛直荷重と水平荷重とをうける正5角柱型立体骨組の水平荷重—変位曲線が示されている。点線は不安定現象を考慮しない場合の解析結果、また実線はこれを考慮した場合で、ともに球型の降伏条件式を仮定して得られたものである。この骨組では柱長さがかなり長いこと、また鉛直荷重が大ききことによって、前の例題に比べると、骨組の初期剛性の低下、靱性の低下、最大耐力の低下、最大耐力後の急激な耐力低下などの点に不安定現象が明瞭にあらわれている。

4.4.3 正3角柱型2層立体骨組

Fig. 23 には、鉛直荷重と骨組全体に振りを生ずるような水平荷重をうける正3角柱型2層立体骨組の弾

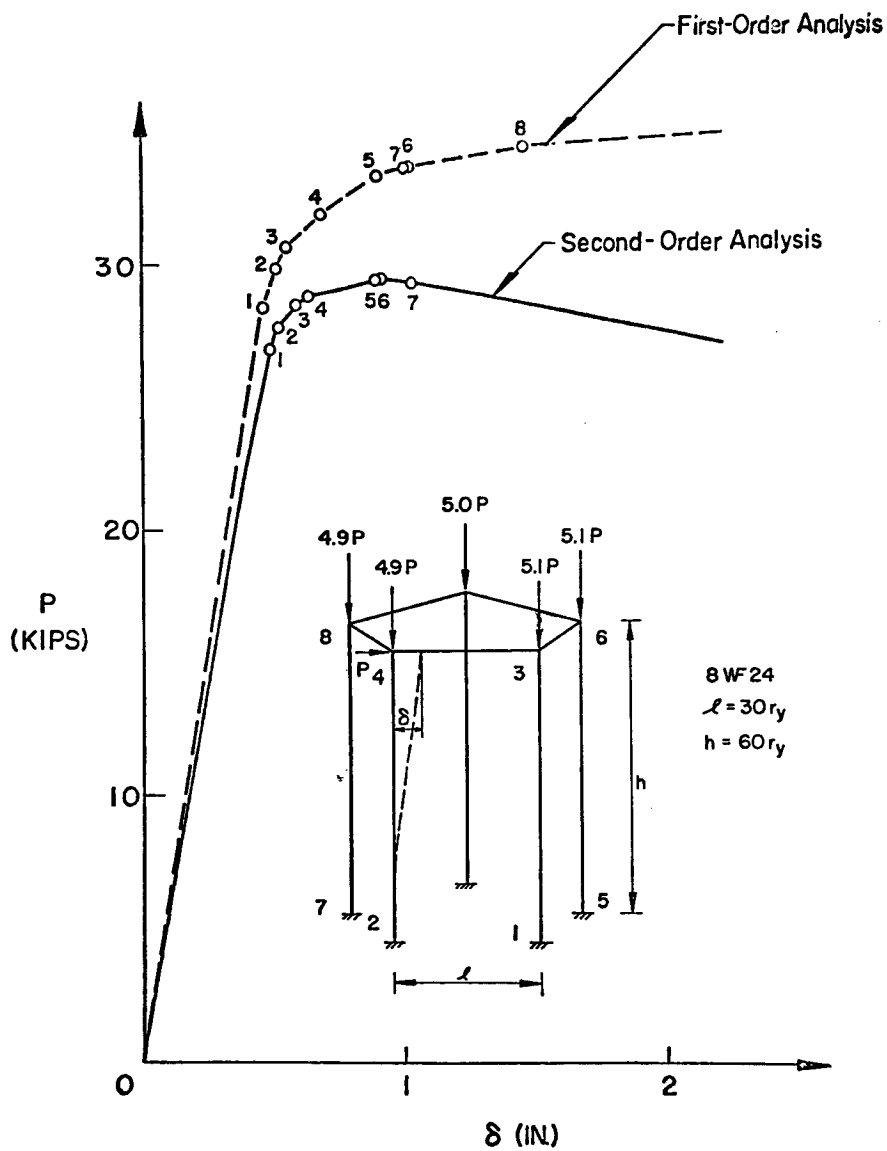


Fig. 22 Load-deflection curves of one-story pentagonal space frame.

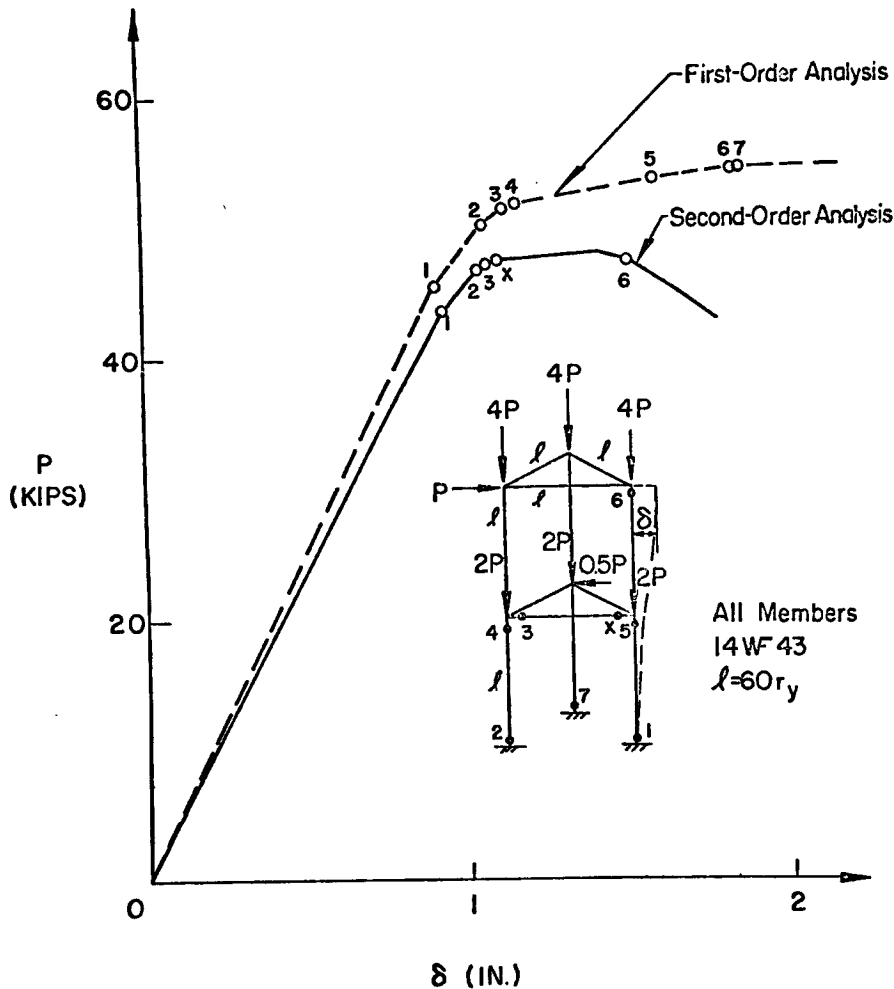


Fig. 23 Load-deflection curves of two-story triangular space frame.

塑性解析結果が示されている。不安定現象を考慮しない解析（点線）では、下層に位置する3本の柱に5個の塑性ヒンジ（図中1, 2, 4, 5, 7）を生ずると、骨組は中央柱を回転中心にして回転自由となって、崩壊機構に達する。一方、不安定現象を考慮した場合の解析結果では、鉛直荷重が部材剛性を低下させることが、まず骨組の初期剛性の低下としてはっきりあらわれており、靱性、最大耐力の低下も著しい。4個の塑性ヒンジを生じて骨組は最大耐力に達し、5番目のヒンジは最大耐力後にあらわれるが、崩壊機構は形成しない。

5. 結 語

本報告では、立体骨組の弾塑性挙動を把握するため、典型的な崩壊形式である、塑性崩壊機構の形成による崩壊、座屈による崩壊、不安定現象を伴う崩壊を生ずるような载荷状態を考慮して、それぞれに対応する骨組の弾塑性解析法と例題の解析結果を示した。骨組の弾塑性挙動を正確に予測するためには、塑性ヒンジの発生条件と塑性ヒンジを有する部材剛性とを規定する降伏条件を正確に把握することが最も重要だと言

える (計算例 2.6.1 および 4.4.1)。また従来の構造設計法で無視されている部材の振り剛性が、骨組の形状あるいは载荷状態によっては、重要な影響を骨組の弾塑性挙動に与える場合のあることが確かめられた (計算例 2.6.2)。骨組の弾性座屈解析を行った結果、特殊な骨組および载荷状態では、同一座屈荷重下で 2 個の座屈モードが可能な場合があり、このような場合には、座屈荷重近傍で、剛性行列の行列式の値が負とならないため、固有値性による座屈荷重およびモードの判定法が極めて有効であると言える (計算例 3.4.1 および 3.4.2)。またここで解析された例題にかぎると反りの拘束条件が振りモードを伴う骨組の座屈荷重に与える影響は極めて小さいと言える (計算例 3.4.2 および 3.4.3)。鉛直荷重と骨組形状の幾何学的変化とが組み合わされて起る骨組の不安定現象を、部材剛性の低下として近似的に評価する方法が誘導されたが、この近似的方法を偏心圧縮を受ける柱の解析に応用した結果、かなりよい近似度を与えることがわかった (4.2 節)。また骨組の弾塑性解析を行った結果、不安定現象を考慮しない解析結果と比較して、初期剛性の低下、耐力および靱性の低下などで代表される不安定現象をかなりよくとらえることができた (計算例 4.4.1, 4.4.2 および 4.4.3)。

謝 辞

本研究は筆者が米国 Lehigh 大学在学中に行った研究の一部をまとめたものであって、数値計算に使用された部材断面性能などの単位がすべて lb (pound) および in. (inch) の表示に従っているのはこのためである。御指導を頂いた Le-Wu-Lu 教授ならびに Fritz Engineering Laboratory (Director, Lynn. S. Beedle 教授) の各位に厚く感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) J. Heyman: The Limit Design of a Transversely Loaded Square Grid. J. of Applied Mechanics, Vol. 19, 1952, P. 153.
- 2) K. E. Bruinette: A General Formulation of the Elastic-Plastic Analysis of Space Frameworks. Ph. D. Dissertation. University of Illinois, 1966.
- 3) G. A. Morris and S. J. Fennes: A General Procedure for the Analysis of Elastic and Plastic Frameworks. Structural Research Series No. 325, Dept. of Civil Engineering, University of Illinois. 1967.
- 4) J. D. Renton: Stability of Space Frames by Computer Analysis. Proc. ASCE, Vol. 88 (ST4), 1962, P. 81
- 5) 若林 実・野中泰二郎・岡本晴仁: 薄肉開断面材よりなる立体骨組の立体座屈撓角法 その 2 例題。日本建築学会論文報告集号外, 1962, p. 438
- 6) C. Birnstiel and J. Michalos: Ultimate Load of H-Columns under Biaxial Bending. Proc. ASCE, Vol. 89 (ST2), 1963, P. 161.
- 7) 藤本盛久・松本芳紀: H 形断面部材よりなる立体骨組の弾塑性解析に関する研究—その 1—。日本建築学会論文報告集 第186号, 1971, p. 27.
- 8) 藤本盛久・松本芳紀: H 形断面部材よりなる立体骨組の弾塑性解析に関する研究—その 2—。日本建築学会論文報告集 第187号, 1971, p. 51.
- 9) S. Santathadaporn: Analyses of Biaxially Loaded Columns. Ph. D. Dissertation, Lehigh University, 1970.
- 10) B. A. Bott: Elastic-Plastic Analysis of Frames Including Axial Force Effect on Moment Capacity. Fritz Engineering Laboratory Report No. 297. 21, Lehigh University, 1966.
- 11) H. B. Harrison: The Application of the Principles of Plastic Analysis to Three-Dimensional Steel Structures, Space Structures edited by R. M. Davies, 1967, P. 109.
- 12) J. B. Martin: On the Elastic-Plastic Behavior of Certain Bents under Transverse Loading. Int. J. Mechanical Science, Vol. 3, 1961, P. 1.
- 13) C. G. Culver: Exact Solution of the Biaxial Bending Equations. Proc. ASCE, Vol. 92 (ST2), 1966, P.

63.

- 14) B. Ovunc: Nonlinear Plastic Analysis of High Strength Steel Plane and Space Frameworks. Final Report of 8th Congress of IABSE, 1968, P. 583.