

# 鉄骨充腹ばりの横座屈に関する研究 (その 3)

——任意曲げモーメントを受ける H 形断面  
ばりの横座屈荷重の数値解析——

若 林 實・中 村 武

## STUDIES ON LATERAL BUCKLING OF WIDE FLANGE BEAMS, REPORT NO. 3

——Numerical Analysis of Lateral Buckling Load of H-Shaped Beams  
Under Arbitrarily Distributed Bending Moment——

By Minoru WAKABAYASHI and Takeshi NAKAMURA

### Synopsis

Lateral buckling phenomenon is one of the most important factors to determine the maximum load carrying capacity of H-shaped beams. This paper presents the results of numerical analysis of the elastic lateral buckling load of H-shaped beams under various types of bending moments; unequal end moments, bending moments due to uniformly distributed load and combined moments of these two. Generally, partial differential equations in equilibrium condition are impossible to solve analytically. In this paper, basic equations are replaced by finite difference equations. Lateral buckling load is obtained as the load at which the stiffness matrix of the beam becomes singular. As the results of analysis, it is observed that the acting location in vertical direction of uniform load significantly affects upon the lateral buckling load. Non-dimensioned buckling load is quasi-linear to the span length of beams. On the other hand, it is also confirmed that the lateral buckling load of the beams subjected to not only end moments but uniformly distributed load, is given as a very complex function of dimension of cross-section, end moment ratio ( $\alpha$ ), magnitude of uniformly distributed load ( $\beta$ ) and span length ( $L$ ). Appropriate formulation for design is urgently needed considering the combination of the above-mentioned factors.

### 1. 序

はりの横座屈現象は、鉄骨構造はりの耐力を決める要素としては最も重要なものである。日本建築学会編の現行の鋼構造設計規準においても、横座屈を起す恐れのある材に対してその許容曲げ応力度は、横座屈荷重を基に決められている。この許容曲げ応力度の基準値ははりの両端ではり構面内変形、構面外変形および振れ変形に対して単純支持され、その材長にわたって曲げモーメントが均等に分布した場合の横座屈モーメントがとられている。またこの許容曲げ応力度は、曲げモーメントの材長方向分布が直線勾配をもつ時に修正されるべく、修正係数の値が示されている。

一般に、はり材では横座屈に対して補剛された区間内での曲げモーメント分布は固定荷重、積載荷重等による鉛直荷重時応力と地震時、台風時等の水平荷重時応力との組合せによって、多様に変化するので、これら種々多様性をもつ曲げモーメント分布に対して許容曲げ応力度を適切に補正する必要がある。

本報告では横座屈に対して両端で単純支持状態で補剛された一区間内での曲げモーメント分布が上記の組合せ応力状態での分布をした時の横座屈荷重を材が完全弾性材料であるとして求めたものである。一般に複雑

な応力状態での横座屈鈎合微分方程式は直接解を得ることが不可能な場合が多いので、ここでは微分方程式を差分表示することにより、数値解を得た。

勿論、実際に用いられるはりの場合には、床板、母屋などによって片側フランジの横方向変形、捩れ変形が材長方向にわたって連続的にあるいは断続的に拘束される場合が多く、このような場合の解析も不可欠のものであるが本報告では取り扱かわない。

## 2. 解析の対象、仮定および基礎方程式

本解析の対象として用いるはり材は、既製熱間圧延 H 形鋼とし、日本工業規格 (JIS) 寸法のうち広幅系列、中幅系列、細幅系列のうち代表的な断面を 7 種類選定した。さらに JIS 寸法とは別に極細幅の材を一種類 (H-600×100×12×20) を設定して加えた。解析対象とした断面の諸元および作用外力、支持状態を Fig. 1 に示す。はり材断面各点の変形諸量およびはり両材端での変形量に関する境界条件を Fig. 2 に示す。はり材に作用する曲げモーメントは Fig. 3 に示すように材長に沿って直線的に変化する曲げモーメント

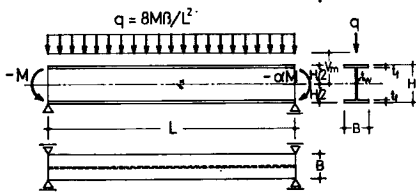


Fig. 1 Loading and cross-section of beam.

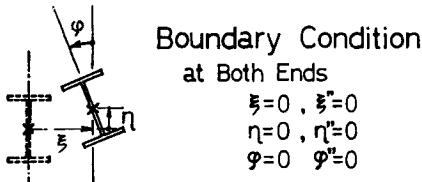


Fig. 2 Displacement of cross-section and boundary condition.

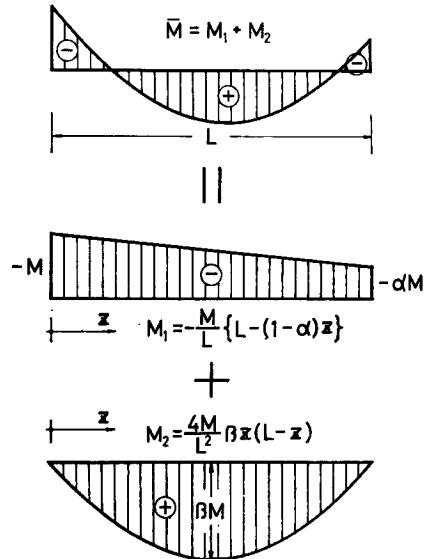


Fig. 3 Simplification of bending moment.

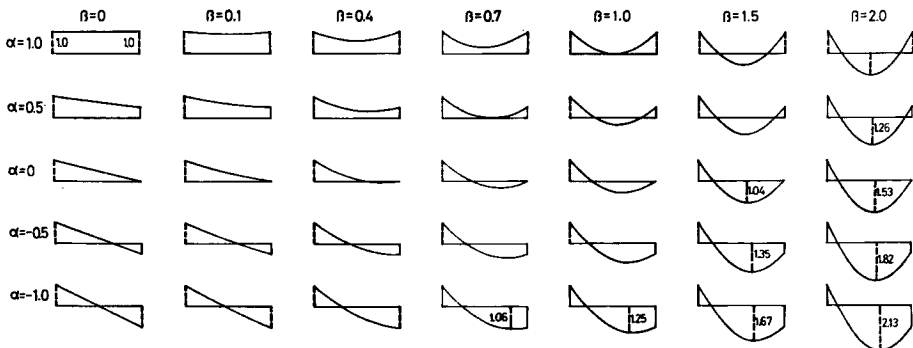


Fig. 4 Types of bending moment for analysis.

ントと単純ばりに等分布荷重が作用する際の曲げモーメントの和として表現することとする。材長に沿った曲げモーメント分布を規定するパラメーターとして、係数、 $\alpha, \beta$ を用いているが、 $\alpha$ は両材端の曲げモーメント比を表し、 $\beta$ は基準となる材端曲げモーメントに対する単純ばりに等分布荷重が作用する際のスパン中央曲げモーメントの比である。解析の対象とした曲げモーメント分布は $\alpha$ について5種類（ $\alpha=1.0, 0.5, 0, -0.5, -1.0$ ）、 $\beta$ について7種類（ $\beta=0, 0.1, 0.4, 0.7, 1.0, 1.5, 2.0$ ）の組合せによる35種類でその曲げモーメント図および最大曲げモーメント値をFig. 4に示す。材長はり材として用いられる長さについて5種類（ $L=5.0, 6.0, 8.0, 10.0, 12.0$  m）選んだ。

本解析に用いた仮定を列記すると、

- (1) 材は完全に弾性であるとする。 $E=2100$  t/cm<sup>2</sup>,  $G=800$  t/cm<sup>2</sup>
- (2) 材断面の形は変らないものとする。
- (3) 板要素の局部座屈は起らないものとする。
- (4) 断面を構成する各板要素は(3)の意味の限度で厚く板面外の曲げ剛性は無視できる程度に薄いものとする。
- (5) 断面を構成する各板要素内では平面保持の仮定は成立するが、断面全体としては成立しない場合もある。
- (6) 横座屈以前のはり構面内変形は小さいものとし、この変形が横座屈荷重に及ぼす影響は考えないこととする。
- (7) はり両材端での変形に対する境界条件は、はりの構面内変形、構面外変形、捩れ変形に対して単純支持の状態であるとする (Fig. 2)。

以上の仮定により横座屈に対する釣合基礎微分方程式を誘導するが、その誘導は座屈問題に関する教科書が広く教えるところであるのでここでは省略して、結果だけ示すこととする。但しここでは二軸対称 H 形断面を対称としているので、この場合の式に限る。

はり構面外に対する力の釣合式

$$EI_y \xi'''' + (\bar{M}\varphi)'' = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

はり断面の捩りに関する釣合式

$$EC_M \varphi'''' - GI_D \varphi'' + \bar{M} \xi'' - q v_M \varphi = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

式中の記号

( )''', ( )'': 材長に沿った軸 ( $z$ ) に関する微分を表わす。

$I_y$ : 断面弱軸に関する断面二次モーメント

$C_M$ : 断面の反りに関する定数

$$C_M = \frac{t_f(H-t_f)^2 B^3}{24}$$

$I_D$ : Saint-Venant の捩り定数

$$I_D = \frac{2Bt_f^3 + (H-t_f)t_w^3}{8}$$

$\xi, \varphi$ : 断面の変形量 (Fig. 2)

$E, G$ : 材の弾性定数

$\bar{M}$ : 曲げモーメント (Fig. 3)

$q$ : 等分布荷重 (Fig. 1)

$v_M$ : 等分布荷重の作用する点と断面せん断中心との距離 (Fig. 1)

(1) 式を二度積分して、(2) 式に代入すると

$$EC_M \varphi'''' - GI_D \varphi'' - \left( \frac{\bar{M}^2}{EI_y} + q v_M \right) \varphi - \frac{\bar{M}}{EI_y} (C_1 + C_3 z) = 0$$

ここで (3)  $z=0, L$  の境界条件

$\xi=\xi''=\varphi=0$  を考えると、積分定数  $C_1, C_2$  は  $C_1=C_2=0$  となり

結局、基礎微分方程式は

$$EC_M \varphi'''' - GI_D \varphi'' - \left( \frac{\bar{M}^2}{EI_y} + qv_M \right) \varphi = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。

一般的な応力状態の場合には、この微分方程式の係数は定数ではないので解析的な解を得ることは困難である。

### 3. 微分方程式の差分表

前節式(4)に示した基礎微分方程式は一般に解析的な解を得ることができないので、(4)式に含まれる

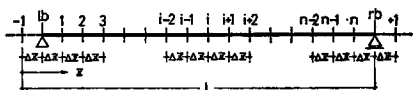


Fig. 5 Method of Finite difference.

$\varphi''''$ ,  $\varphi''$  をはりを材長方向に等分してその等分点の  $\varphi$  をもって表示してやることにする。まず材を材長方向に  $(n+1)$  等分する。この等分点に Fig. 5 に示すよう番号をつける。この等分点  $i$  と相隣る 2 点間の変形曲線を 2 次曲線とするいわゆる first order の差分法を適用して各点での

微分を、その点およびその点をはさむ数点の変位でもって表示すると、

$$\left. \begin{aligned} \varphi' \Big|_i &= \frac{1}{2(\Delta z)} (\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) \\ \varphi'' \Big|_i &= \frac{1}{(\Delta z)^2} (\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) \\ \varphi''' \Big|_i &= \frac{1}{2(\Delta z)^3} (\varphi_{i+2} - 2\varphi_{i+1} + 2\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2}) \\ \varphi'''' \Big|_i &= \frac{1}{(\Delta z)^4} (\varphi_{i+2} - 4\varphi_{i+1} + 6\varphi_i - 4\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

と表わすことができる。この表示に従って、(4) 式の釣合式を 1 点から  $n$  点において成立させる。こうして作られた  $n$  個の  $\varphi_i$  に関する連立一次方程式には境界点および境界外の点の変位  $\varphi_{-1}, \varphi_{lb}, \varphi_{rb}, \varphi_{+1}$  を含むことになるが、これらの諸量は境界条件

$$\varphi = 0 \quad \text{at } z=0, L$$

$$\varphi'' = 0 \quad \text{at } z=0, L$$

を差分表示することによって

$$\varphi_{lb} = 0, \varphi_{rb} = 0, \varphi_{-1} = -\varphi_1, \varphi_{+1} = -\varphi_n$$

として表現できる。

横座屈荷重はこの  $n$  元連立一次方程式の  $\varphi_i$  の係数で構成される  $n$  行  $n$  列の行列式の値を零とする曲げモーメントの最小値として得ることができる。

この横座屈荷重を京都大学大型計算機 FACOM-230-60 を用いて数値解析した。

計算に用いた H 形鋼断面は、JIS 寸法、H-300×300×10×15, H-400×200×7×11, H-500×200×10×16, H-600×200×11×17, H-600×300×12×20, H-700×300×13×20, H-900×300×15×23 および特殊寸法材 H-600×100×12×20 である。応力状態は Fig. 4 の 35 種類、材長は 5.0~12.0 m の範囲で 5 種類、分布荷重の作用位置は  $V_m = H/2 + 0.05 m, 0, -(H/2 + 0.05 m)$  の 3 種類である。

本解析における差分点数は  $n=15$  である。

### 4. 解析結果

ここで行った解析により得られた結果を Fig. 6~Fig. 11 に示す。

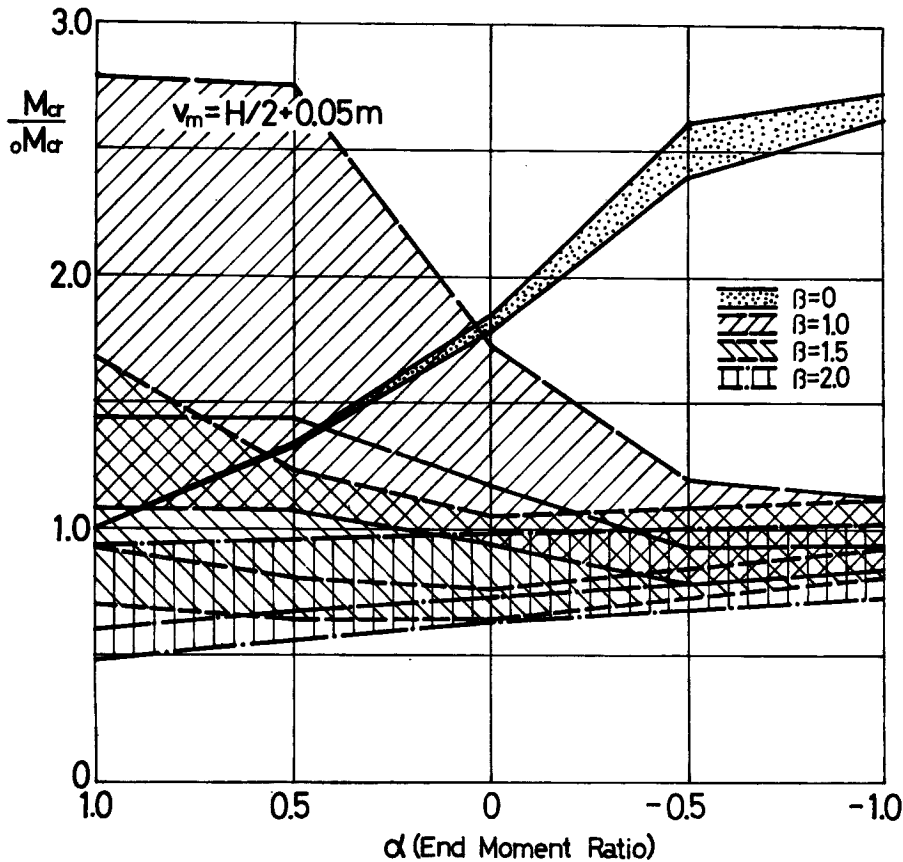


Fig. 6 Relationships between  $M_{cr}/{}_0M_{cr}$  (non-imentioned lateral buckling strength and  $\alpha$  (end moment ratio) for various values of  $\beta$  (magnitude of uniform load).

Fig. 6 は縦軸に解析したはりの横座屈モーメント ( $M_{cr}$ ) を基準値として材長に沿って均等に曲げモーメントが分布する場合の横座屈モーメント ( ${}_0M_{cr}$ )\* で割って無次元化した量 ( $M_{cr}/{}_0M_{cr}$ ) を横軸には両材端に働く曲げモーメント比 ( $\alpha$ ) をとり、解析した範囲内のはりに対する横座屈モーメントを等分布荷重の大きさを表すパラメーター ( $\beta$ ) を変えて表現したものである。等分布荷重は通常のはりの上に載る床スラブの中央面の高さに相当した。はり上端面より上方 5 cm の位置に作用し、作用方向は鉛直下向きとした場合の図である。 $\beta=0$  (等分布荷重が作用せず、曲げモーメントが材長に沿って直線的に変化する場合) の場合には多くの研究者が解析し、また設計用修正係数式として表わされているように断面の種類、スパン長によって  $M_{cr}/{}_0M_{cr}$  はあまりばらつかず  $\alpha$  の一価函数としてのみ表示することが可能であろう。しかし  $\beta=1.0, 1.5, 2.0$  の場合には  $\beta$  の変化に対して傾向はみられるものの断面の種類、スパン長によってかなり広い範囲にわたるのが認められる。ただ通常の JIS 規格寸法にある断面の場合には、各  $\beta$  値に対して図中の各範囲の内にひいた折線と各範囲の下限線との間にはいり比較的狭い範囲にあるといえる。この範囲をこえるのははり

\*  ${}_0M_{cr}$  は (4) 式を直接解いて精解値

$${}_0M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y \cdot GI_D} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{EC_M}{GI_D}}$$

として求める。

丈(H)に比してフランジ幅(B)の極めて小さいものであった (本解析の場合のH-600×100×12×20)。

Fig. 7～Fig. 9 は断面 H-600×300×12×20, スパン長 6.00 m のものを例にとり,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $v_m$  の変数変化による  $M_{cr}/_0M_{cr}$  値の変化の様子を示したものである。

いずれにしても  $\beta \neq 0$  の場合には  $M_{cr}/_0M_{cr}$  の分布範囲はかなり大きく, 本報告においては設計式化するには到らなかったが, 断面の種類, スパン長,  $\alpha$  値,  $\beta$  値を変数にした整理を行ない, 設計式化を行わなければならない。

Fig. 7 は縦軸に横座屈モーメントの無次元量 ( $M_{cr}/_0M_{cr}$ ) をとり, 横軸に端モーメント比 ( $\alpha$ ) をとり,  $v_m = 0.35$  m の場合の  $M_{cr}/_0M_{cr}$  の等分布荷重の大きさを表す量  $\beta$  による変化を示したものである。 $\beta$  の値が小さい一部を除いては, 等分布荷重がない時 ( $\beta=0$ ) よりも横座屈モーメントは小さくなるのが観察される。および  $\beta=1.0$  および  $\beta=1.5$  の場合には端モーメント比 ( $\alpha$ ) の影響は小さい。 $\beta=2.0$  の場合には  $\alpha$  の変化に対して  $M_{cr}/_0M_{cr}$  はほぼ直線的に変化している。この観察は Fig. 6 に示す断面の領域においても共通している。等分布荷重の影響が小さくなる ( $\beta$  値が小さくなる) に従って  $M_{cr}/_0M_{cr}$  値は  $\beta=0$  (等分布荷重なし) の値に近接してゆく様子がわかる。

Fig. 8 は縦軸, 横軸は Fig. 7 と同様に  $M_{cr}/_0M_{cr}$ ,  $\alpha$  をとり, 種々の  $\beta$  値に対して, 等分布荷重の作用位置 ( $v_m$ ) の変化の影響を示したものである。 $v_m$  の正値は等分布荷重がはりを上面から押し下げている場合

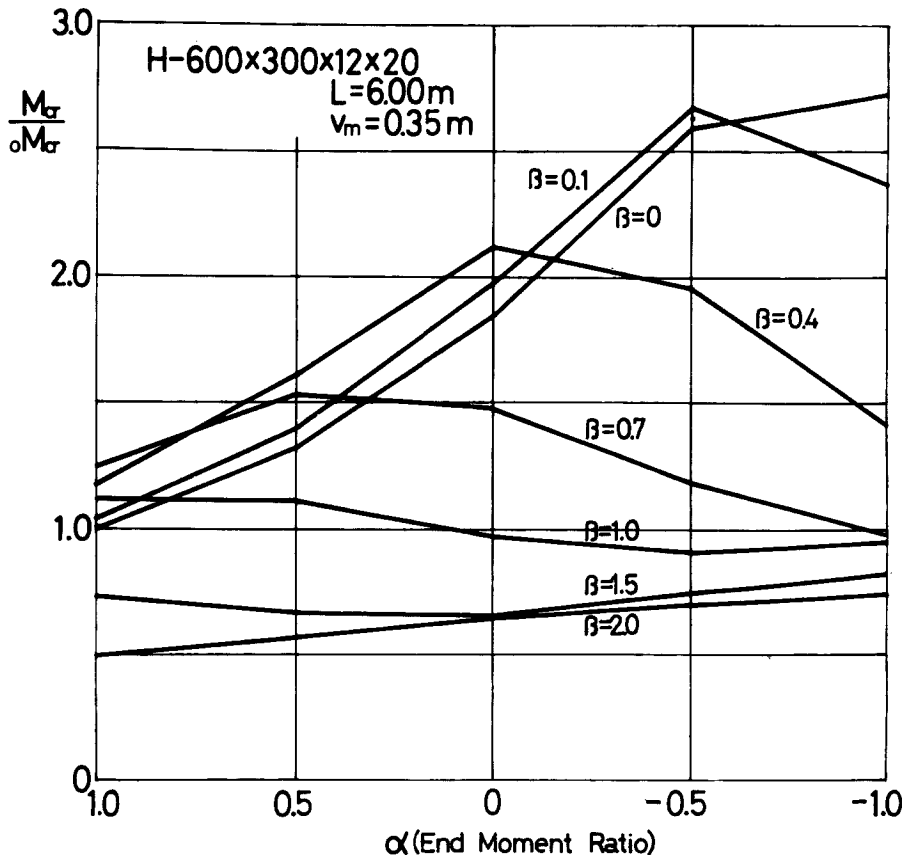


Fig. 7 Relationships between  $M_{cr}/_0M_{cr}$  and  $\alpha$  for various values of  $\beta$  (H-600×300×12×20, L=6.00 m,  $v_m=0.35$  m).

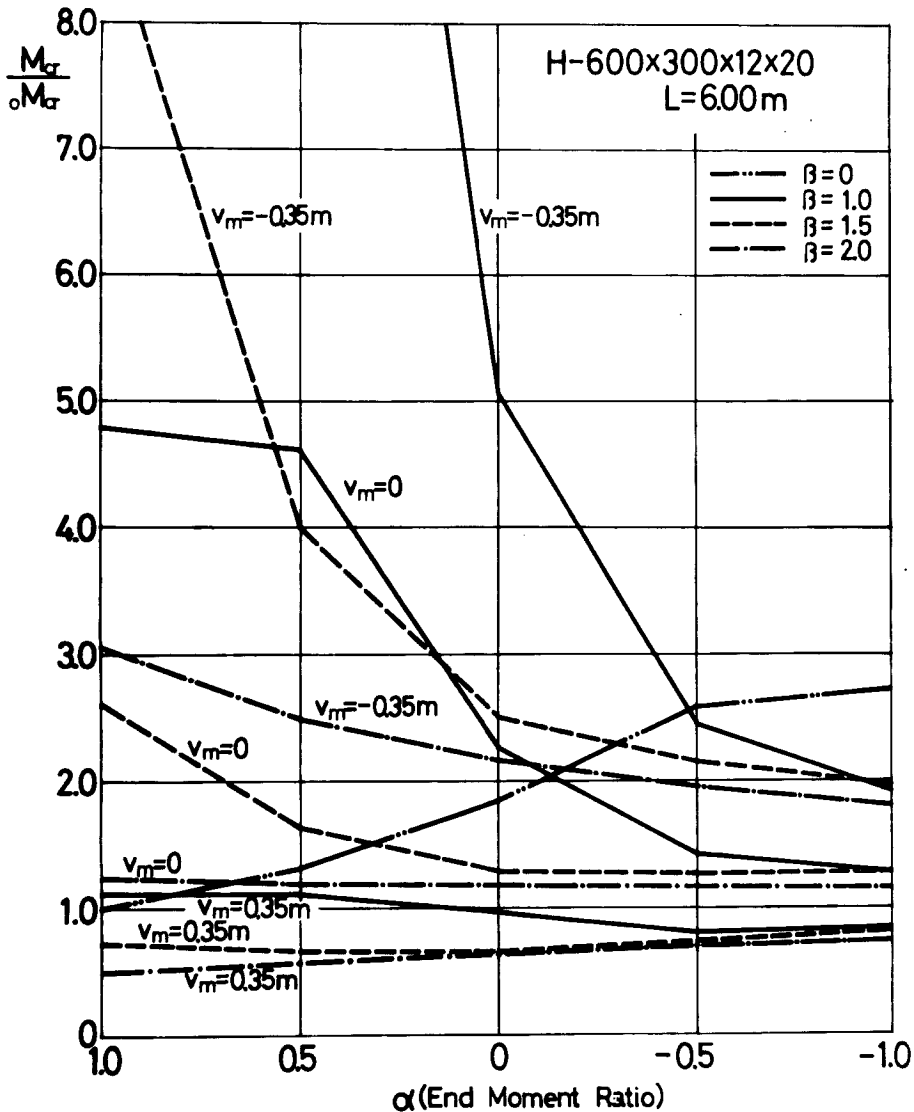


Fig. 8 Effect of the height of acting location of uniform load on the lateral buckling strength ( $H-600 \times 300 \times 12 \times 20$ ,  $L=6.00\text{ m}$ ).

に当り、 $v_m$  の負値は等分布荷重がはり下面から引き下げている場合に当る。 $v_m=0$  ははり断面のせん断中心に等分布荷重が作用している場合である。等分布荷重の作用位置が横座屈モーメントに与える影響は極めて大きく、分布荷重が通常のはりの床スラブ位置に作用するような場合には横座屈モーメントはかなり小さくなっている。

Fig. 9 は縦軸に  $M_{cr}/M_{cr0}$  をとり、横軸に等分布荷重の大きさを表す変数  $\beta$  をとって、 $\alpha=1.0$  の場合の  $v_m$  の3種類の値に対して、横座屈モーメントの変化を調べたものである。この図でも等分布荷重の作用位置の影響が極めて大きいことがわかるが、 $v_m$  が引き下げ型から押し下げ型になるに従って  $\beta$  値の影響は小さくなる。同一の  $v_m$  に対しては  $\beta=1$  近傍の応力分布が横座屈に対して最も有利のようである。

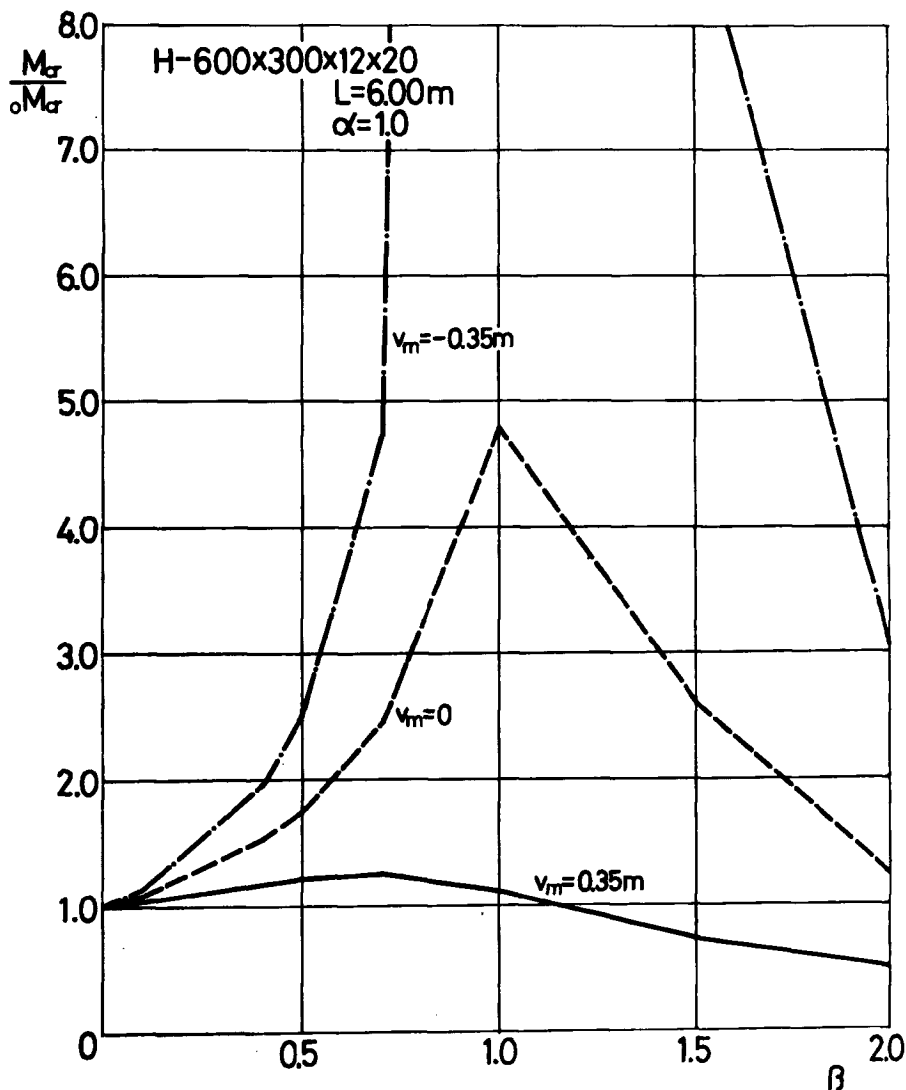


Fig. 9 Effect of the height of acting location of uniform load on the lateral buckling strength (H-600×300×12×20, L=6.00 m,  $\alpha=1.0$ ).

Fig. 10 は等分布荷重が床スラブ中央面位置に作用し、 $\alpha=1.0$  の場合、 $\beta=1.0, 1.5, 2.0$  に対して、横座屈モーメントの無次元量に与えるスパン長の影響を調べたものである。いずれの場合にも  $M_{cr0}/M_{cr}$  と  $L$  の関係はほぼ直線的である。また JIS 規格内にある断面では  $M_{cr0}/M_{cr}$  は比較的狭い範囲におさまっている。

Fig. 11 は単純ばりに等分布荷重のみが作用する場合の横座屈モーメントを示したものである。これ以外の場合にもいえることであるが、 $v_m=0$  の場合には  $M_{cr0}/M_{cr}$  はスパン  $L$  長の変動には極めて純感でありほとんど変化しない。また  $v_m=0.35\text{m}$  の場合には  $M_{cr0}/M_{cr}$  と  $L$  の関係は直線的である。

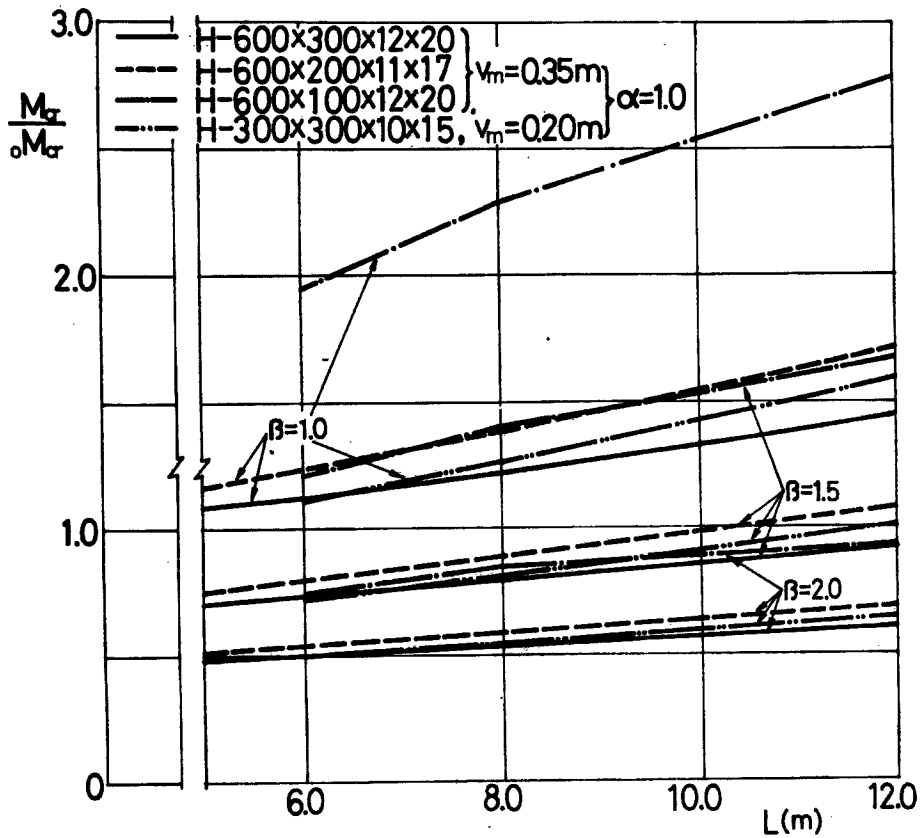


Fig. 10 Effect of the span length on the lateral buckling strength.

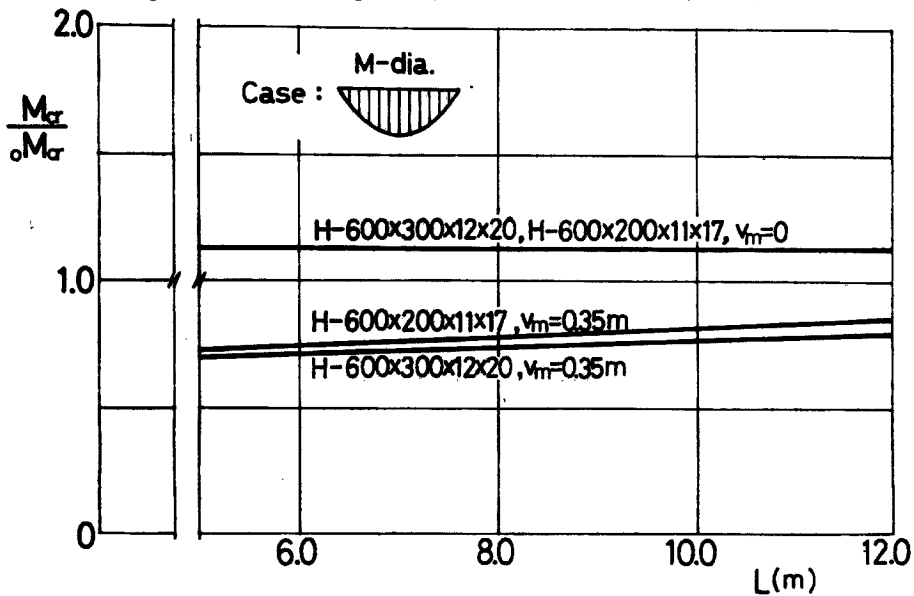


Fig. 11 Lateral buckling strength of simple beams subjected to only the uniform load.

## 5. ま と め

本報告で得られた数値解析結果を整理すると次のようになる。

(1) 等分布荷重が作用せず、曲げモーメントが材長に沿って直線的に変化するような場合には、断面の種類、スパン長によって横座屈モーメント  $M_{cr}/_0M_{cr}$  は大きく変化せず、過去の多くの研究あるいは設計式が示すように、横座屈モーメントの修正係数(本稿の  $M_{cr}/_0M_{cr}$  に相当した量)は材端モーメント比( $\alpha$ )のみの函数として表現することが可能である。

(2) 材端モーメントのみならず等分布荷重が同時に作用する場合には、本稿で述べたように、断面の種類、材端モーメント比( $\alpha$ )、等分布荷重の大きさ( $\beta$ )、等分布荷重の作用位置( $v_m$ )、スパン長( $L$ )によって  $M_{cr}/_0M_{cr}$  の値は大きく変動する。本稿では解析結果を述べるに留まったが、本解析結果を基にして、断面の種類、 $\alpha$  値、 $\beta$  値、 $v_m$  値スパン長( $L$ )を変数とした  $M_{cr}/_0M_{cr}$  の設計式化が是非とも必要であり、急がなければならないことが痛感される。

(3) 等分布荷重が作用する場に合つて本解析結果より顕著なことは、等分布荷重の作用位置( $v_m$ )の  $M_{cr}/_0M_{cr}$  に対する影響が極めて大きいことである。通常の床スラブの中央面位置で等分布荷重が作用する場合には横座屈モーメントは大きく低下する。特に  $\beta$  値が1を越えるような場合または等分布荷重のみが作用する場合においては、 $M_{cr}/_0M_{cr}$  値は1よりも小さくなり、はりスパン中間に何んらかの横座屈に対する補剛材を考えることなしには、はり材長内の最大曲げモーメントを基準にして  $M_{cr}/_0M_{cr}=1$  をとつてもよいとはいえない。

(4)  $M_{cr}/_0M_{cr}$  の値は等分布荷重が通常の床スラブ中央面位置に作用する場合、スパン長( $L$ )に対して直線的に変化する。

以上が本解析の結果、定性的にいえることである。本報告を閉じるに当たっていえることは、本稿の段階では等分布荷重が作用するはりの横座屈に対して、定性的な知見を述べるに留まったこと、従つて、一般の応力状態に対する横座屈荷重修正係数に対する設計式を本解析結果を基にして作成する努力を急がなければならないこと、はりスパン内に床スラブ、母屋、小ばりなどによる横座屈に対して補剛効果のある材が存在する場合の解析も必要不可欠であることが再認識された。

## 参 考 文 献

- 1) Kollbrunner, C.F. and M. Meister: Knicken, Biegedrillknicken, Kippen, 1961, pp. 170-181.
- 2) Timoshenko, S. P and J. M. Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd. Ed., 1961, pp. 251-277.
- 3) 若林 実・中村 武・小柳博義・沢田 博: 鉄骨充腹ばりの横座屈に関する研究(その2)——プラスチック模型を用いた弾性実験——, 京都大学防災研究所年報, 第14号A, 昭46.4, pp. 439-449.
- 4) Johnston, B. G.: Column Research Council—Guide to Design Criteria for Metal Compression Members, 2nd. Ed., 1966, pp. 163-164.
- 5) Horne, M. R.: The Flexural-Torsional Buckling of Members of Symmetrical I-Section under Combined Thrust and Unequal Terminal Moments, Quart. Jour. of Mech. and Appl. Math., Vol. VII, Pt. 4, 1954, pp. 410-426.
- 6) Horne, M. R.: The Stanchion Problem in Frame Structures Designed According to Ultimate Carrying Capacity, Proc. Inst. Civ. Engrs., Vol. 5, No. 1, Part III, April, 1956, pp. 105-160.
- 7) Salvadori, M. G.: Lateral Buckling of I-Beams, Transactions ASCE, Vol. 120, 1955, pp. 1165-1182.
- 8) Salvadori, M. G.: Lateral Buckling of Eccentrically Loaded I-Columns, Proc. ASCE, Separate No. 607, Vol. 81, January, 1955, pp. 607-1-607-22.