

自由水面を有する浸透流の三次元解析手法とその考察

——河川構造物の浸透問題(3)——

岡 太 郎

METHOD OF NUMERICAL ANALYSIS FOR THREE DIMENSIONAL UNCONFINED SEEPAGE

——Seepage Problem for River Structure (3)——

By Taro OKA

Synopsis

A method of numerical analysis for three dimensional flow in homogeneous porous media is investigated on the assumptions that the flow is steady and governed by Darcy's law. Equation for the flow is solved adopting the relaxation method for machine computer and using a practical technique for applying boundary conditions. Solutions for two dimensional flows in some earth structures are obtained in order to compare with results shown already by some investigators. The solutions are in very well agreement with the results obtained by Shaw et al. and Herbert et al. An example for three dimensional flow is also shown.

1. ま え が き

アースダム、河川堤防などの河川盛土構造物、地下水制御用構造物あるいは広域地下水の挙動などいわゆる自由水面をもつ地下水問題を扱うのに、現在自由水面を有する浸透流の二次元解析法、準一様流を仮定した一次元解析ないし平面解析法が適用され、それぞれ一応の成果が得られている。しかしいずれも便宜的な方法であるため、適用上の限界を感じることも少なくない。本来こうした問題は三次元的に扱われるものであるが、いまの段階では、この手法が確立されているわけではない。

本論文は一様な porous media 内の自由水面を有する三次元定常浸透流を、Darcy 則のもとに解析する手法を提示しようとしたものである。ここで対象とする流れの系は、数学的には Laplace の方程式を境界条件を考慮して解けばよいのであるが、計算当初、自由水面の位置・形状の未知であることが問題をむずかしくしている。

鉛直二次元領域における自由水面を有する浸透問題については、relaxation method¹⁾²⁾, finite element method³⁾ により数値解、さらに適用がごく限られるがホドグラフ法⁴⁾ により解を得ることができ、その解法はほぼ確立されているといえよう。三次元系については、電気モデル⁵⁾、細管網モデル⁶⁾ などのアナログモデルの適用が考えられているが、その数値解法はまだ確立されていないといつてよい。

そこで、ここでは三次元流に適用することを前提として、まず領域内水頭分布を S. O. R. 法⁷⁾ を用いて数値的に求め、自由水面をその系を立体的に区切る格子の交点で近似しようという仮定の下に逐次近似により修正決定する解法を提案する。次に、二次元系における既存の解析結果とここで提案する近似解法を用いて得られた計算結果とを対比する。さらに、この計算における格子点間隔・形状について若干の考察を行ない、最後に三次元系への一適用例について、自由水面の収束過程と加速係数について考察を加える。

2. 基礎方程式および境界条件

一様な porous media 内の定常浸透流が Darcy 則に従うものとする、基礎方程式は (1) 式で表わされる⁸⁾。

$$K_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

いま

$$X = \frac{x}{\sqrt{K_x}} \quad Y = \frac{y}{\sqrt{K_y}} \quad Z = \frac{z}{\sqrt{K_z}}$$

とおくと、次の Laplace の方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} = 0 \quad (1')$$

ここで

$$H = \frac{P}{\omega} + y$$

H : 水頭 [L]

P : 圧力 [M/L²]

ω : 単位体積重量 [M/L³]

y : 基準面からの高さ

x, y, z : 座標

K_x, K_y, K_z : それぞれ x, y, z 方向の透水係数 [L/T]

Fig. 1 のような解析領域を考えると各境界に対する条件は次のとおりである。

(i) 上下流面 (AB および CE):

これらの面では水頭 H は一定であるから

$$\left. \begin{array}{l} H|_{AB} = H_0 \\ H|_{CE} = H_1 \end{array} \right\} \quad (2)$$

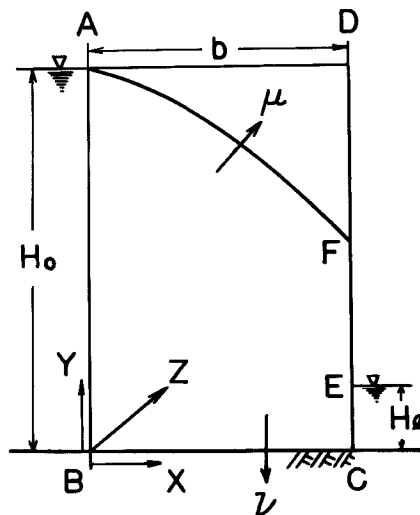


Fig. 1 Definition sketch.

(ii) 不透面 (BC):

この面を横切る流れは存在しないため

$$\frac{\partial H}{\partial \nu} \Big|_{BC} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ここで ν : 不透面の法線方向成分

(iii) 浸出面 (EF):

この面の圧力 P は 0 であるので

$$H|_{EF} = y \dots\dots\dots (4)$$

ここに y : 基準面からの高さ

(iv) 自由水面 (AF):

自由水面を横切る流れは存在しないため

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} \Big|_{AF} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

ここで μ : 自由水面の法線方向成分

また、この面上では圧力 P は 0 であり水頭 H は基準面の高さに等しいため

$$H|_{AF} = y \dots\dots\dots (6)$$

自由水面上ではこれら二条件式が同時に満足せねばならない。

3. 解 法

自由水面を有する浸透問題は自由水面の位置が解析当初未知であるため、計算過程においてその位置を逐次近似により決定するのが普通である。この問題を解析的に解く方法としてホドグラフ法⁴⁾があるが、ホドグラフ面から実平面への写像変換がむずかしく、その適用は二次元問題のしかもごく限られた系に限られ、三次元問題への適用は考えられない。そこで、ここでは三次元問題への適用を考え、数値計算法を検討する。

一般に数値解法として、Shaw and Southwell¹⁾ は前述の諸式とほぼ同等の、圧力 P で表わされる基礎方程式、境界条件を用い二次元問題のための数値計算法を提案した。これは、まず自由水面を任意に仮定した後、(2)～(4)、(6) 式相当の境界条件を考慮して基礎方程式を解き、自由水面の位置を (5) 式相当の条件式で判定して修正をするこの計算を、自由水面の位置の修正不要となるまで続ける逐次近似解法である。この方法は自由水面の位置の修正方法が複雑であって、三次元解析への拡張はかなり困難である。

著者は、自由水面の位置の修正をより簡単に行なうため、仮定した自由水面形のもとで基礎方程式(1)を境界条件(2)、(3)、(4)、(5)式を用いて解き(6)式でその位置の適否を判定し修正する逐次近似解法を提案する。ここで解析領域を立体格子で分割し数値計算を行なう際自由水面が格子点間に入ると(5)式の導入がかなり複雑になる。そこで、格子点間隔を小さく取るものとして自由水面形を格子点を通る直線で近似する。これによって(5)式の導入が簡単になる。

3.1 差分近似式と S.O.R. 法の基本型

Fig. 2 の場において(1)式を差分近似式で表わすと(7)式となる。

$$\begin{aligned} K_x \left\{ \frac{H_{i+1,j,k} + H_{i-1,j,k} - 2H_{i,j,k}}{(\Delta x)^2} \right\} + K_y \left\{ \frac{H_{i,j+1,k} + H_{i,j-1,k} - 2H_{i,j,k}}{(\Delta y)^2} \right\} \\ + K_z \left\{ \frac{H_{i,j,k+1} + H_{i,j,k-1} - 2H_{i,j,k}}{(\Delta z)^2} \right\} = 0 \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここで $H_{i,j,k}$: 格子点 (i,j,k) の水頭の値

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$: それぞれ x, y, z の格子点間隔

いま、領域内水頭分布を S.O.R. 法⁷⁾を用いて解くことにする。

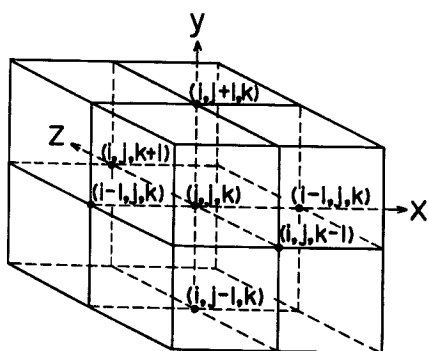


Fig. 2 Finite difference grid used to solve the differential equation.

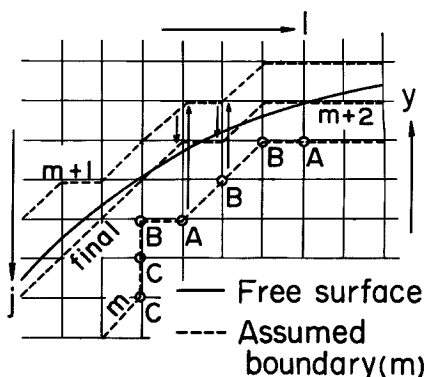


Fig. 3 Changes of free-water surface in accordance with advance of the calculation.

$$\alpha_x = \frac{K_x}{(\Delta x)^2}, \quad \alpha_y = \frac{K_y}{(\Delta y)^2}, \quad \alpha_z = \frac{K_z}{(\Delta z)^2} \quad (8)$$

ととき, (7)式を S. O. R. 法の基本形になおすと (9)式を得る。

$$H^{n+1}_{i,j,k} = H^n_{i,j,k} + RA^n_{i,j,k} \quad (9)$$

ここで

$$RA = w \times \left[\frac{\{\alpha_x(H^{n+1}_{i+1,j,k} + H^n_{i-1,j,k}) + \alpha_y(H^{n+1}_{i,j+1,k} + H^n_{i,j-1,k}) + \alpha_z(H^{n+1}_{i,j,k+1} + H^n_{i,j,k-1})\}}{2(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z)} - H^n_{i,j,k} \right] \quad (10)$$

n : S. O. R. 計算における繰返し数

w : 加速係数

なお (9) 式の収束の判定としてはあらかじめ小さな値 ϵ を与えておき, (9) 式における H の修正量 RA のその系の一回の緩和計算における各点での絶対値の総和 ER が ϵ より小さくなったとき収束したものとみなす。

$$\epsilon \geq ER = \sum |RA| \quad (11)$$

3.2 境界条件の導入

(i) 自由水面について

Fig. 3 に示すように, 自由水面を格子点を通る直線で近似すると, 自由水面を表わす格子点の状態は同図における A, B, C のいずれかである。すなわち

$$\left. \begin{array}{ll} \text{A点において} & H_{i,j+1,k} = H_{i,j-1,k} \\ \text{B点において} & H_{i,j+1,k} = H_{i,j-1,k} \\ \text{および} & H_{i-1,j,k} = H_{i+1,j,k} \\ \text{C点において} & H_{i-1,j,k} = H_{i+1,j,k} \\ \text{または} & H_{i+1,j,k} = H_{i-1,j,k} \end{array} \right\} \quad (12)$$

ととき, これらを (10) 式に代入することにより (5) 式の導入が近似的に達成される。これらは二次元領域についてのものであるが, 三次元領域の場合に対しても, 同じ関係式を z 方向に考慮することにより容易に拡張しうる。上述の取り扱いに関連して (6) 式は次のように書き直される。

$$|H|_{\text{free surface}} - y| \leq \frac{\Delta y}{2} \dots\dots\dots (13)$$

(ii) 不透面について

不透面を格子点を通る直線で近似すると自由水面と同様な取り扱いにより容易に境界条件を導入しうる。

(iii) 上下流面について

上下流面を表わす格子点上では水頭値は既知であり、各格子点にこの値を与えることにより(2)式は満足される。

(iv) 浸出面について

浸出面については、それを表わす格子点にその地点の基準面からの高さを与えることにより(4)式は満足される。ただ浸出面の上限は自由水面が浸出面に接近する直線の延長と浸出面との交点をもって近似的に表わす。

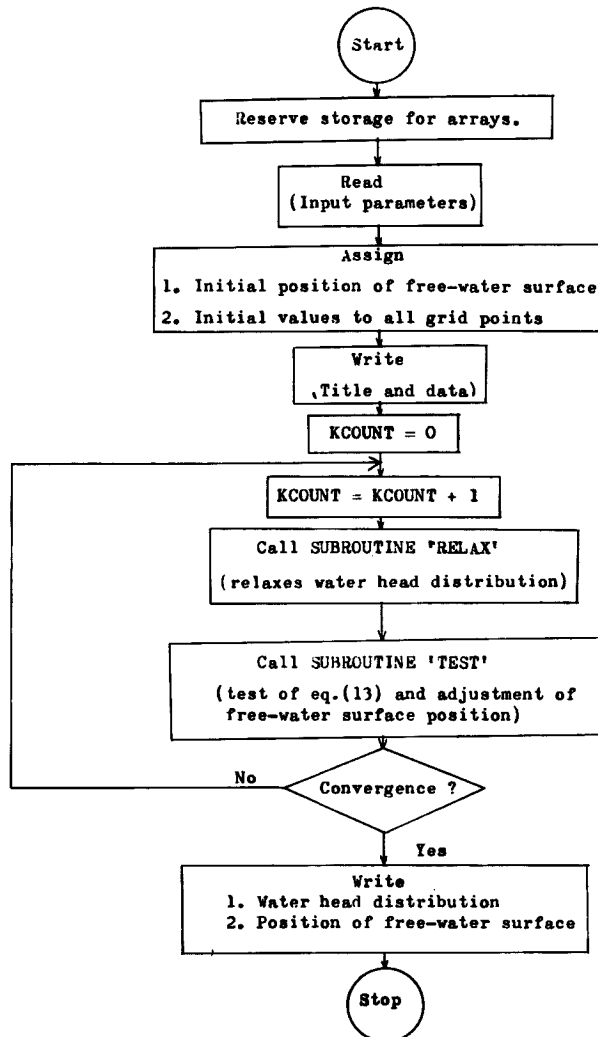


Fig. 4. Flow chart of main program.

3.3 計 算 手 順

この逐次近似解法には非常に多くの繰返し計算を要するため電子計算機を用いて計算する。

この場合の main program の flow chart の概略を Fig. 4 に示す。すなわち、計算手順としては各種データを読み込んだ後、自由水面の位置を仮定し、解析領域内の各格子点に水頭分布の初期推定値を与える。これらの初期推定値は計算軽減のため真の値に近いことが望ましい。次に Subroutine 'RELAX' により、仮定された自由水面と上下流面および不透面で囲まれる解析領域内の水頭分布を、S. O. R. 法⁷⁾を用いて計算する。なお自由水面の近似度が低い間は高精度の水頭分布を必要としないから、 H についての緩和計算回数は自由水面の修正計数 $KCOUNT$ に応じて決定した。もちろん、自由水面がかなり修正された段階では高精度の水頭分布を必要とするので収束判定式すなわち(11)式によった。

このようにして水頭値を計算した後 Subroutine 'TEST' により自由水面の位置の適否を(13)式を用いて判定し修正する。Fig. 3 にこの修正について、第 m 次近似の自由水面が第 $m+1$ 次近似を経て最終的に決定されるまでの過程を二次元領域について例示する。第 m 次近似の自由水面を近似している格子点において、計算値が(13)式を満足していなければ、その点で得られた値にもっとも近い位置の格子点に自由水面を移し第 $m+1$ 次近似とする。

自由水面を近似している全格子点で(13)式が満足したとき、自由水面形は収束したものとみなす。もし収束していないならば新しく仮定された自由水面の下で計算をやりなおし、収束するまでこれを繰り返す。なお、最終的には、自由水面の位置は近似している格子点上で得られた水頭値で表わし格子点そのものをとらない。Fig. 3 では、実線で示される曲線が最終的に得られた自由水面形である。

4. 解析手法に関する考察

この種の数値計算では常に得られた結果の精度、収束性、収束速度などが問題となるが、これらはいまの場合、格子点間隔、自由水面の直線近似と初期推定値、水頭値の打ち切り誤差などが複雑に関連するので一般的な論議はむずかしい。そこで、ここでは代表的な解析領域を選定して数値計算を行ない、その結果をとおして格子点間隔と計算精度および加速係数について考察を加える。

4.1 計算結果の精度について

これまで三次元解析の行なわれた事例についての報告は少なく、三次元系の既存解の比較は不可能であるため、二次元系について得られた結果について考察する。なおこの解法で求められた計算結果と既存解との差を自由水面を近似している格子点の y 軸上の差として表わし、(14)式で定義される偏差 E_s をもって、自由水面形についての計算精度を表わす指標とする。

$$E_s = \frac{\sum_{i=1}^L \sqrt{(y_{0,i} - y_i)^2}}{L} \dots\dots\dots (14)$$

ここで $y_{0,i}$: 既存解における自由水面の規準面からの高さ

y_i : この解法で求められた自由水面の規準面からの高さ

L : 自由水面を近似している格子点数

二次元系についての計算結果は過去いくつか報告されているがここでは次の3 case を対象とする。

Fig. 5 に Case A として不透水性地盤上に設置された高さ 24 m, 巾 16 m の長方形ダム, Fig. 6 に Case B として透水地盤上に設置されたアースダムについて、それぞれ Shaw and Southwell¹⁾ によって得られた計算結果とこの解法で得られた計算結果と対比し図示する。Fig. 7 に Case C として不透水性地盤上の長方形ダムについて Herbert and Rushton⁵⁾ により resistance analogue の手法を用いて得られた結果とこの解法で得られた計算結果を対比して示す。なお Case A, B の計算に際し、格子間隔は原著者のそれに一致させてある。他の計算条件としては、Fig. 5 の場合、水頭分布の収束判定値 ε に 0.1 (一格子点の修正量 RA は最終的には領域内の交点数が 312 点となったので $10^{-2} \sim 10^{-3}$ のオーダーとなり実用的には十分な精度と考

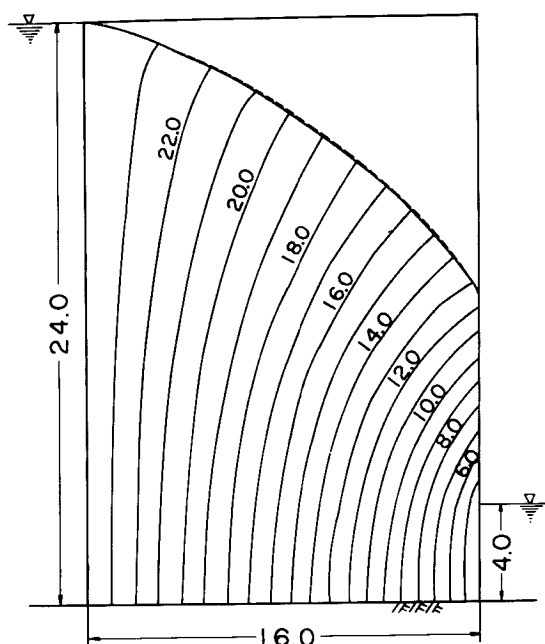


Fig. 5 Comparison of results calculated by Shaw et al. and author, for Case A. (The broken line shows the free-water surface obtained by Shaw and Southwell.)

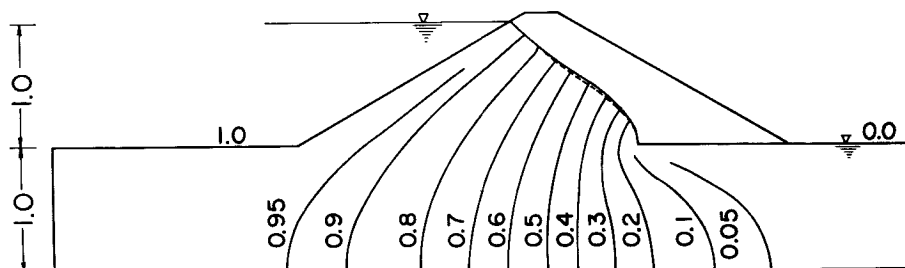


Fig. 6 Comparison of results calculated by Shaw et al. and author, for Case B. (The broken line shows the free-water surface obtained by Shaw and Southwell.)

えられる), 加速係数 w に 1.8, 透水係数 K_x, K_y に 1.0 を用い, 上端に自由水面の初期推定値を取り, 自由水面の位置を 15 回修正することにより, また Fig. 6 の場合は ε に 0.1, w に 1.8, K_x と K_y に 1.0 を用い上端に自由水面の初期推定値を取り自由水面を 20 回修正することにより, 得られたものである。Fig. 7 に示す計算結果は Herbert and Rushton が用いた resistance analogue model の element の大きさと同等な格子点間隔を用い, ε に 0.1, w に 1.8, K_x と K_y に 1.0 を用い, 上端に自由水面の初期推定値を取り, 自由水面の位置を 20 回修正することにより得られたものである。

各 case について既存解との比較を E_s および E_v を全水頭差 $(H_0 - H_1)$ の比で表わしたものを Table 1 に示す。ここで既存解の自由水面の位置 $(y_{0,i})$ は, Case A については Finnemore and Perry の論文²⁾で示

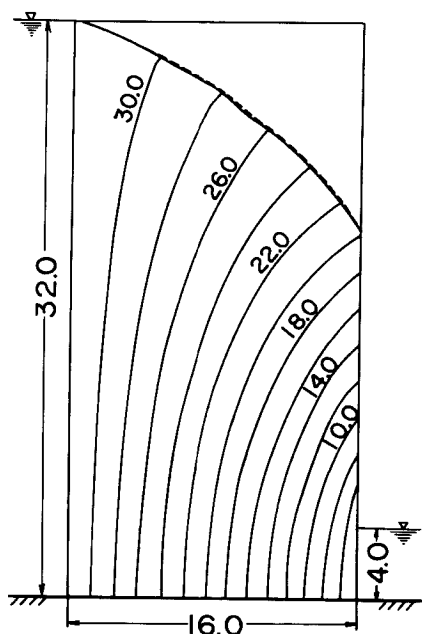


Fig. 7 Comparison of results obtained by Herbert et al. and author, for Case C. (The broken line shows the free-water surface obtained by Herbert and Rushton.)

Table 1 Values of E_s defined by Eq. (14).

	H_0	H_l	$\Delta x = \Delta y$	E_s	$\frac{E_s}{H_0 - H_l}$
Case A	24.0	4.0	1.0	0.18	0.009
Case B	1.0	0.0	0.125	0.01	0.010
Case C	32.0	4.0	1.0	0.19	0.006

されている値を変換したものであり、Case B, Case C についてはそれぞれの論文中的図から読み取った値である。Table 1 より、既存解との比較において、自由水面を全水頭差の 1% 以下の精度で決定しうることが認められる。ここで、既存解との比較で全水頭の 1% という誤差が数学的厳密性からは問題であろうが、実用的には十分な精度と考えられよう。

なお水頭分布については、各計算結果と既存解とをきわめてよい一致をしている。

これらの結果よりここに提示した解法の有用性は十分認められると言えよう。

4.2 格子点間隔について

この解法の有用性は十分認められるが、これには多量の計算が必要であるので、ここでは決定される自由水面の精度との関連で、計算量軽減の可能性を Fig. 5 の領域についての計算をとおして、若干考察を進める。ここで、Fig. 5 の系について格子間隔を $\Delta x = 1.0, 1.33, 1.6, 2.0$, $\Delta y = 1.0, 1.33, 2.0$ にとり Δx と Δy の組み合わせを変えて計算した結果を用いて得られる E_s と格子点間隔 ($\Delta x, \Delta y$) の関係を Fig. 8 に示す。Fig. 8 より系の全水頭差を 20 分割して得られる正方形格子を用いて全水頭差の 1%, また 10 分割して得られる正方形格子を用いて 2% の精度で自由水面が決定されることが認められる。また同図より Δy

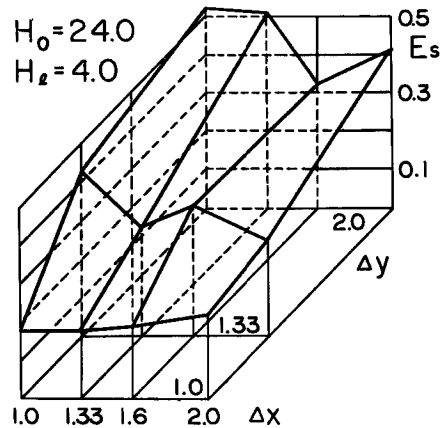


Fig 8 Relationships between E_s defined by Eq. (14) and mesh intervals.

の細分化が計算精度に与える影響はきわめて大であるが、 Δx の細分化はそれほど影響を与えず、 Δy との組み合わせによっては Δx を Δy より若干大きく取った方が精度はよくなっているのが認められる。すなわち、格子形状の取り方を変えることにより、計算結果を大きくは損わず、計算量の軽減を計ることができる。

これらは限られた系についての計算結果から得られたものであり一般的な傾向を論ずるには問題はあるが、得られる計算結果の精度、および計算量軽減のため取りうる方向を示す目安となろう。

4.3 収束過程と加速係数について

解析領域内の水頭分布の計算に用いられる加速係数は、収束速度にかなり影響をおよぼすため、計算量軽減上重要な要素の一つである。二次元系における加速係数の特性はかなり明らかにされている⁹⁾ が、三次元系の加速係数については未知の点が多い。この問題では、解析領域が計算途中変形するため問題を複雑にしているが、ここでは Fig. 9 に示す三次元領域を解析領域に選び、以下加速係数について若干の考察を進める。

Fig. 9 に示される、側面と底面は不透壁で囲まれており、上面の一部の水路から水供給があり、下面の一部から排水されている三次元系を、間隔 0.05 の立体格子で分割し、透水係数 (K_x, K_y, K_z とともに) に 0.0025、加速係数 w に 1.5、水頭の収束判定値 ϵ に 0.1 を用い、自由水面形の初期推定値を上面に仮定し、各格子点に初期推定値に 0.25 を与え、自由水面を 23 回修正することにより得られた結果を同図に示す。なおこの計算では、計算量を軽減するため自由水面形の近似度が低い間は、高精度の水頭分布を必要しないという観点により、自由水面形の修正計数 (M または $KCOUNT$) とその段階での緩和計算の繰返し回数 (n_M) の関係を(15)式により決定した。

$$n_M = n_{M-1} + 2 \quad \dots \dots \dots (15)$$

この計算では $n_{M=0} = 2$ を採用した。しかし、 n_M に達する以前でも(11)式が成立すれば水頭分布は収束したとみなせるため緩和計算を中止した。

この解析過程における、自由水面形の収束状況の一例を Fig. 10 に示す。これは Fig. 9 の OPQR 断面に例を取ったものである。また Fig. 11 には、この数値計算における緩和計算の繰返し数 N と、全格子点についての一回の緩和計算の修正量・絶対値の総和 (ER) との関係を示す。両図を対比することにより、この解析の収束過程を概観することができる。すなわち、Fig. 10 において、自由水面の修正計数が増加するにつれてその修正量が減少し、また Fig. 11 において、水頭分布が収束して行く過程が認められる。これについていまだ少し詳細に検討すると次のようである。まず Fig. 10 において、 $M=0$ から $M=2$ へと自由

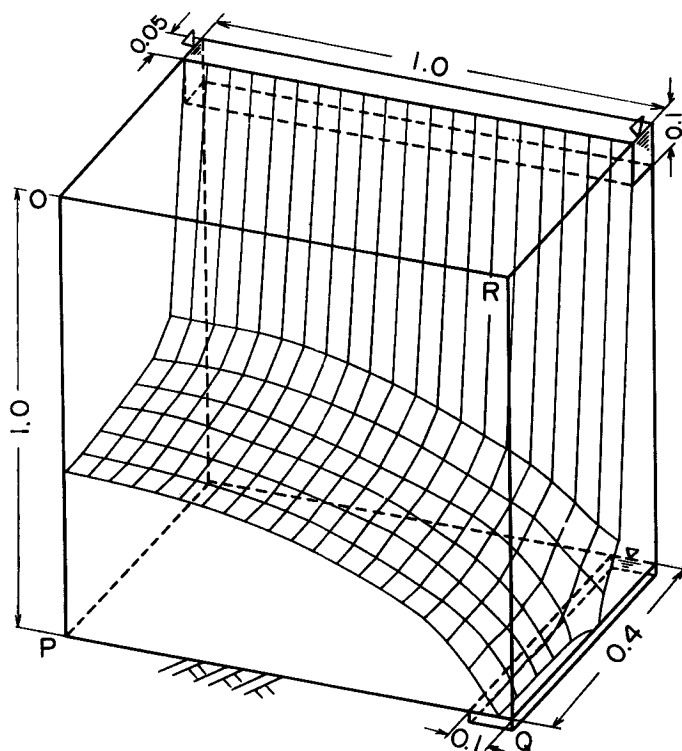


Fig. 9 Calculated result for a three dimensional flow.

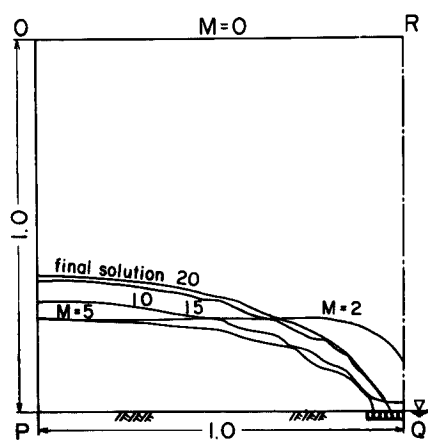


Fig. 10 Coverage states of calculation result for the free-water surface at section OPQR in Fig. 9.

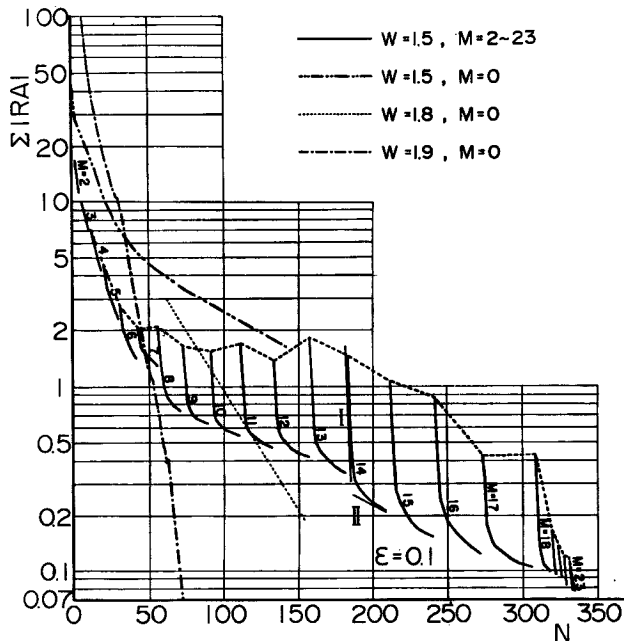


Fig. 11 Relationships between ER defined by Eq. (11) and iteration number, N .

水面形の位置は急激に変化しているが、これは水頭分布がほとんど修正されないまま自由水面形を修正したため、各格子点に与えた水頭の初期値の性格がそのまま現われたためと考えられる。その後、少しずつ修正が加えられ、修正計数が20に達した後は、この断面では自由水面形の修正は必要としなかった。Fig. 11には、各自由水面の修正段階の N と ER との関係が示されている。同図に自由水面修正直後の緩和計算における ER の値を、各自由水面修正ごとに破線で結んで示してあるが、これは自由水面形の収束状況を示す目安となる。すなわち、自由水面形に大きな修正を必要とした際には領域が大きく変化し、水頭値に誤差が含まれるため、新段階の緩和計算における修正量が増加し結局 ER が一時的に増加する。これは自由水面の未収束性を示すことを意味する。逆に、たとえば $N=23$ では自由水面の修正を必要としなくなったため、前段階から領域は変化せず、 $M=23$ での緩和計算における ER は前段階のものより当然小さく (Fig. 11 の場合 ϵ 以下)、この段階で自由水面、水頭分布共に収束したものとみなせる。

いま、 $M=14$ の N と ER との関係に注目すれば、領域内の水頭分布の収束状況は収束速度により同図の(I)と(II)で示される二段階に分けることができる。第I段階は、おもに自由水面が修正された直後の自由水面付近の水頭分布の乱れを大まかに修正する段階で急激な収束速度を示し、第II段階は全領域の水頭値を補正していく段階である。加速係数はこの第II段階の収束速度に関与しているものと考えられ、この収束速度を大にするよう加速係数を定めることが望まれる。

Fig. 9 の全領域について N と ER の関係を $w=1.5, 1.8, 1.9$ について求め Fig. 11 に併示してある。十分予想されることであるが $w=2.0$ を用いた計算では $N \sim ER$ は振動現象を呈し収束の方向に向わなかった。これらの結果よりこの全領域についての最適加速係数は $1.8 \sim 2.0$ にあり 1.9 に近いものと思われる。そこで $w=1.9$ を用い、自由水面の修正については Fig. 9 の解を得たと同じ条件で計算を行なった結果、水頭分布の収束速度は Fig. 11 の場合より全ての M についてかなり大きく、ほぼ $w=1.9$ について示してある収束速度に等しかった。しかし、Fig. 11 の破線で示されるいわゆる自由水面の収束速度について

比較すると、同程度の繰り返し回数では収束の傾向を見い出せなかった。

このように加速係数が収束速度を大きくし、計算量の軽減をもたらしていることを予想しうるが、現在この計算の最適加速係数を決めるまでには至っていない。

5. あ と が き

自由水面を有する浸透流の三次元解析を前提とし、この問題の一近似解法を示した。二次元系の既存解との比較においてこの解法の有用性を示し、数値計算過程に現われるいくつかの問題について考察を加えた。

最後にこの計算には京都大学大型計算機センターの FACOM 230-60 を使用した。なお Fig. 5, Fig. 9 に示す計算結果を得るに要した時間を代表的に示すと、それぞれ 59, 350 sec であった。

参 考 文 献

- 1) Shaw, F. S. and R. V. Southwell: Relaxation Method Applied to Engineering Problems, VII; Problems Relating to the Percolation of Fluids through Porous Media, Proc. Roy. Soc. (A) 179, 1941, pp.1-17.
- 2) Finnemore, E.S. and B. Perry: Seepage through an Earth Dam Computed by the Relaxation Technique, Water Resources Research, Vol. 4, No. 5, 1968, pp. 1059-1067.
- 3) 例えば, Volker, R.E.: Nonlinear Flow in Porous Media by Finite Elements, Proc. of A.S.C.E., Hy, 6, Vol. 97, 1969, pp. 2093-2014.
- 4) 例えば, Muskat, M.: The Seepage of Water through Dams with Vertical Faces, Physics, Vol. 6, 1935, pp. 402-415.
- 5) 例えば, Herbert, R. and K.R. Rushton: Ground-Water Flow Studies by Resistance Networks, Géotechnique, Vol. 16, 1966, pp. 53-75.
- 6) 松尾新一郎・河野伊一郎: 地下水壁による地下水規制の実験的研究, 土木学会論文集, No. 178, 昭45, pp. 53-61.
- 7) 例えば, 山口・森口・一松: 電子計算機のための数値計算法 (I), 昭40, pp. 175-199.
- 8) 例えば, Young, R.N. and B.P. Warkentin: Introduction to Soil Behavior, 1966, p. 359.
- 9) 例えば, 清野 武: 電子計算機によるラプラスの方程式の解法—特に加速係数の推定について—, KDC-I レポート, 昭37.