

長方形基礎の加振による半無限粘弾性 地盤の振動特性（その3）

小堀 鐸二・南井良一郎・日下部 馨

VIBRATIONAL CHARACTERISTICS OF A SEMI-INFINITE VISCO-ELASTIC MEDIUM TO SURFACE EXCITATIONS ON A RECTANGULAR AREA (PART 3)

By *Takuji KOBORI, Ryoichiro MINAI and Kaoru KUSAKABE*

Synopsis

In this paper, we investigate the vibrational behaviors of a visco-elastic ground subjected to rotational harmonic excitation on a rectangular surface area, by using the treatment described in the preceding paper. The numerical results of the amplitude and phase characteristics of the displacement are shown graphically, along two principal axes of the rectangular area on the surface and along the depth below the center of the rectangular surface area. We discuss the vibrational characteristics for rotational excitation, comparing with those for vertical and horizontal harmonic excitations.

1. まえがき

建築、土木構造物の震害調査等から構造物の地震応答解析において地盤の影響を考慮する必要性が論じられ、近年、地盤—構造物連成系の非定常地震応答解析に関する研究が数多く発表されている。しかし、現実には、ある構造物に隣接して多くの構造物が建ち並んでいるのが普通であり、地盤を介して、これらの構造物間で連成振動を誘起すると考えられる。これら連成系の問題を解くには、まず、基礎周辺のある位置における地盤の動特性を知る必要がある。このような観点から、前報^{1), 2)}においては、半無限 Voigt 型の粘弾性地盤上に有る長方形基礎に垂直、水平および回転加振力を与えた場合、基礎に加わる力を入力、地盤内各点のある方向の変位を出力とする複素伝達関数の解析的表現を導き、数値解としては、垂直あるいは水平加振力を基礎に与えた場合の基礎中心直下の深さ方向ならびに地表面上で長方形基礎の主軸方向に沿った分布性状を求め、振動数、基盤巾、基礎中心からの距離および地盤の媒質の持つ減衰作用等による影響を検討した。一方、これらの結果を用いて、剛体系の垂直および水平方向の連成振動に関する研究³⁾を行なってきたが、これらの研究をさらに進めるために、本報では、前報^{1), 2)}に引き続き、回転加振力を基礎に与えた場合の複素伝達関数の数値解を基礎中心直下の深さ方向ならびに長方形基礎の主軸方向に対して求め、それを振巾特性および位相特性の形で図示して、垂直および水平加振に対する場合と比較しながら検討する。

2. 複素伝達関数の積分表示

2.1 基礎方程式および境界条件

前報^{1), 2)}と同様に、ここで取扱う地盤は粘弾性地盤の最も基本的な Voigt solid とする。直交座標 x, y, z に関する等質等方な 3 次元 Voigt solid の運動方程式は $\{x, y, z\}$ 方向の各々の変位成分を $\{u, v, w\}$ として次式で示される。

$$\left\{(\lambda+\mu)+(\lambda'+\mu')\frac{\partial}{\partial t}\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}A + \left(\mu+\mu'\frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 \{u, v, w\} \\ = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u, v, w\} \quad \dots \dots \dots \quad (2.1)$$

ここに,

$$\begin{cases} A = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; & \text{dilatation} \\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; & \text{Laplace 演算子} \\ \lambda, \mu; \text{ Lamé の常数}, & \rho; \text{ 密度} \\ \lambda', \mu'; \text{ Lamé の常数 } \lambda, \mu \text{ に対する粘性常数} & \end{cases} \quad (2.2)$$

(2.1) 式で表わされる半無限粘弹性体上に, Fig. 1 に示すような自重を無視した長方形基礎があるとし, その長方形基礎に回転加振力を与える。かかる場合, 厳正解を得るには, 境界条件を基礎接触面では変形で, 基礎下以外の地表面では応力で与えて、混合境界値問題として解く^{4), 5)}のであるが, 問題を簡単にするため, すべての境界条件を応力で与える。ここでは, 基礎下の応力分布の仮定として, 回転軸に直交する方向での垂直応力を回転軸からの距離に比例する三角型分布 (Fig. 2), 回転軸に平行な方向での垂直応力を一様分布, 他の応力 (剪断力) を零とし, かつ, 基礎外の表面の応力をすべて零とする。これを式で表わすと次式となる。

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & (|x| > b \text{ or } |y| > c) \\ -q_{0R} \cdot \frac{x}{b} \cdot Q(t) & (|x| \leq b \text{ and } |y| \leq c) \quad \text{at } z=0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

ここに, q_{0R} は正の常数で, 加振力の振巾 M_R は次式で表わされる。

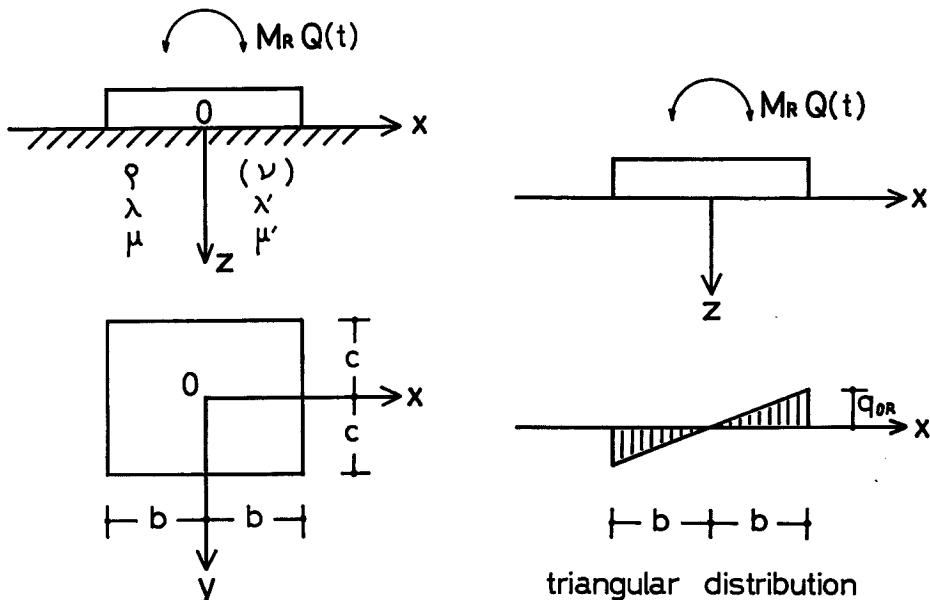


Fig. 1 Co-ordinate system.

Fig. 2 Assumption of stress distribution.

そして、 $Q(t)$ は time factor を表わす。

2.2 長方形基礎の加振による複素伝達関数の積分表示

この場合の解析的表現は前報¹⁾において求められているので、その結果を引用する。回転加振による地盤内の任意の点 (x, y, z) における力一変位複素伝達関数の無次元表示は次式となる。

i) 加力が動的な場合

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{F}_t\{u\}}{M_R \mathfrak{F}_t\{Q(t)\}} \frac{b^2 \mu}{3} = & -\frac{\mathcal{G}_2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\xi}{F(\xi)} \left\{ (2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \alpha_1 Z} - 2\alpha_1 \alpha_2 e^{-a_0 \alpha_2 Z} \right\} \\ & \cdot \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \left\{ \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} - \cos(a_0 \xi \cos \theta) \right\} \\ & \cdot \cos(Xa_0 \xi \cos \theta) \cos(Ya_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \quad \dots \dots \dots \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{F}_t\{v\}}{M_R \mathfrak{F}_t\{Q(t)\}} \frac{b^2 \mu}{3} &= -\frac{g_2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\xi}{F(\xi)} \{(2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \alpha_1 z} - 2\alpha_1 \alpha_2 e^{-a_0 \alpha_2 z}\} \\ &\cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \left\{ \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} - \cos(a_0 \xi \cos \theta) \right\} \\ &\cdot \sin(Xa_0 \xi \cos \theta) \sin(Ya_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \quad \dots \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{F}_t\{w\}}{M_R \mathfrak{F}_t\{Q(t)\}} \frac{b^2 \mu}{3} &= \frac{g_2}{\pi^2} \int_0^{\infty \pi/2} \frac{\alpha_1}{F(\xi)} \{(2\xi^2 - g_2) e^{-a_0 \alpha_1 Z} - 2\xi^2 e^{-a_0 \alpha_1 Z}\} \\ &\cdot \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \left\{ \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} - \cos(a_0 \xi \cos \theta) \right\} \\ &\cdot \frac{\sin(Xa_0 \xi \cos \theta)}{\cos \theta} \cos(Ya_0 \xi \sin \theta) d\theta d\xi \quad \dots \quad (2.7) \end{aligned}$$

جیل

$$F(\xi) = (2\xi^2 - g_3)^2 - 4\xi^2\alpha_1\alpha_3 \quad \dots \quad (2.8)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\xi^2 - n^2 g_1}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\xi^2 - g_2}$$

$$a_0 = \frac{\omega}{c_s} b; \quad \text{円振動数 } \omega \text{ に関する無次元量}$$

$$n = \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}}; \quad \text{剪断波と疎密波の伝播速度比}$$

$$X = \frac{x}{b}, \quad Y = \frac{y}{b}, \quad Z = \frac{z}{b}; \quad \text{座標 } x, y, z \text{ の無次元量}$$

$$g_1 = \frac{1}{1+i\omega \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu}} = \frac{1}{1+ia_0\eta_1}, \quad g_2 = \frac{1}{1+i\omega \frac{\mu'}{\mu}} = \frac{1}{1+ia_0\eta} \quad \dots \dots \dots (2.9)$$

$$\eta_1 = \frac{c_s}{b} \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu} = \eta n^2 \left(2 + \frac{\lambda'}{\mu'} \right); \quad \text{疎密波に対応する粘性係数に関する無次元量}$$

$$\eta = \frac{c_2}{b} \frac{\mu'}{\mu}; \quad \text{剪断波に対応する粘性係数に関する無次元量}$$

$c_s = \sqrt{\mu/\rho}$; 減衰がない場合の弾性体内を伝播する剪断波の速度

$$i = \sqrt{-1}$$

$$\left| \Im_t \{u, v, w, Q(t)\} = \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \{u, v, w, Q(t)\} e^{-i\omega t} dt ; \quad \{u, v, w, Q(t)\} \text{ の時間 } t \text{ に関する Fourier 変換} \right.$$

ii) 加力が静的の場合

$$\begin{aligned} \frac{\Im_t \{u\}}{M_R \Im_t \{Q(t)\}} \frac{b^2 \mu}{3} \Big|_{\omega=0} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{n^2 - (1-n^2) Zr}{2(1-n^2)} \cdot \frac{e^{-Zr}}{r} \\ &\cdot \frac{\sin\left(\frac{c}{b} r \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} r \sin \theta} \left\{ \frac{\sin(r \cos \theta)}{r \cos \theta} - \cos(r \cos \theta) \right\} \\ &\cdot \cos(Xr \cos \theta) \cos(Yr \sin \theta) d\theta dr \quad \dots \dots \dots (2.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Im_t \{v\}}{M_R \Im_t \{Q(t)\}} \frac{b^2 \mu}{3} \Big|_{\omega=0} &= -\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{-n^2 + (1-n^2) Zr}{2(1-n^2)} \cdot \frac{e^{-Zr}}{r} \\ &\cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{c}{b} r \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} r \sin \theta} \left\{ \frac{\sin(r \cos \theta)}{r \cos \theta} - \cos(r \cos \theta) \right\} \\ &\cdot \sin(Xr \cos \theta) \sin(Yr \sin \theta) d\theta dr \quad \dots \dots \dots (2.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Im_t \{w\}}{M_R \Im_t \{Q(t)\}} \frac{b^2 \mu}{3} \Big|_{\omega=0} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + (1-n^2) Zr}{2(1-n^2)} \cdot \frac{e^{-Zr}}{r} \\ &\cdot \frac{\sin\left(\frac{c}{b} r \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} r \sin \theta} \left\{ \frac{\sin(r \cos \theta)}{r \cos \theta} - \cos(r \cos \theta) \right\} \\ &\cdot \frac{\sin(Xr \cos \theta)}{\cos \theta} \cos(Yr \sin \theta) d\theta dr \quad \dots \dots \dots (2.12) \end{aligned}$$

3. 解析結果および考察

2.2 で導いた複素伝達関数の積分表示 (2.5) ~ (2.7) 式および (2.10) ~ (2.12) 式をさらに解析的に扱うことは困難なため、数値解を得るには数値積分を行なう必要がある。数値積分の方法は前報²⁾と同じ手法を用いる。すなわち、0 から $\pi/2$ までの積分変数 θ に関する積分を $a_0 \xi$ (または r) の適当な間隔に対して行ない、この積分値を Stirling の補間公式を用い、補間しながら、0 から ∞ までの積分変数 ξ に関する積分を行なう。許容相対誤差としては、 θ に関する積分では 0.005%，また、 ξ に関する積分では $[0, \infty)$ の積分区間をある区間毎に区切って、その区間内での許容相対誤差を 0.05% とし、無限積分区間を (2.5) ~ (2.7) 式に対しては、

$$\xi_{cut} = \frac{1}{a_0} \frac{\pi}{\{1, X, Y\}_{max}} \times \text{整数部分} \{16 \times (1 + \log_{10} \{1, X, Y\}_{max})\}$$

(2.10) ~ (2.12) 式に対しては、

$$r_{cut} = \frac{\pi}{\{1, X, Y\}_{max}} \times \text{整数部分} \{16 \times (1 + \log_{10} \{1, X, Y\}_{max})\}$$

のところで打ち切り、積分区間を $[0, \xi_{cut}]$ または $[0, r_{cut}]$ の有限積分として無限積分を評価する。

数値計算の一部を Figs. 3~6 に示す。以下の計算例で用いた粘弹性体のポアソン比はすべて $\nu=1/4$ で、長方形基礎底面辺長比は $c/b=1$ 、すなわち、正方形基礎の場合である。また、座標軸 x, y, z は Fig. 1 に示したように x, y 両軸は半無限体の表面上にとり、回転軸を y 軸、それに直交する軸を x 軸とし、 x, y 軸に直交、すなわち、基礎中心直下の軸を z 軸と定義する。さらに、 x, y, z 方向の変位成分をそれぞれ u, v, w と定義する。基礎に回転加振を与えたとき、 x 軸上では x 方向および z 方向の変位 u および w が生じ、 y, z 軸上では x 方向の変位 u が生じる。そして、 x, y, z 軸上でのその他の変位成分は零となる。ここで、回転加振による粘弹性体のある位置での変位 u_i の振巾を $R A_{u_i}$ 、調和加振力に対する位相遅れを

$r\theta_{u_i}$ とする。すなわち、

$$rA_{u_i} = \left| \frac{\Im_t\{u_i\}}{M_R \Im_t\{Q(t)\}} - \frac{b^2 \mu}{3} \right|, \quad r\theta_{u_i} = -\operatorname{Arg}\left(\frac{\Im_t\{u_i\}}{M_R \Im_t\{Q(t)\}} - \frac{b^2 \mu}{3} \right)$$

ただし、 $u_i = u, w$

Fig. 3 は弾性体のポアソン比 $\nu=1/4$ 、減衰係数 $\eta=0$ 、長方形基礎底面辺長比 $c/b=1$ の場合で、基礎に静

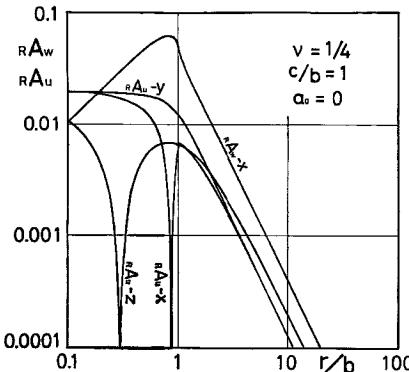


Fig. 3 Static displacement for rotational excitation.

的な回転力を与えたとき、 x 軸上 z 方向の変位成分 w の無次元量 RA_w-x および x, y, z 軸上 x 方向の変位成分 u の無次元量 RA_u-x, RA_u-y および RA_u-z (ただし、一の後の x, y, z は位置を表す) を基礎からの距離を横軸にとって両対数グラフで示したものである。この図から、静的な回転力を基礎に与えると、ほぼ基礎巾 ($2b$) よりも遠く離れたところでは、図に示したそれぞれの変位成分 RA_w-x, RA_u-x, RA_u-y および RA_u-z は距離の 2 乗に逆比例する。 RA_u-x および RA_u-z は途中で変位の向きが逆転するが、 RA_w-x および RA_u-y は常に同じ方向の変位が起こる。

Figs. 4(a)~4(d) は $\nu=1/4, \eta=0, c/b=1$ の場合で、基礎に動的な回転力を与えたとき、 x 軸上 z 方向の変位振巾 RA_w および位相遅れ $r\theta_w$ ならびに x, y, z 軸上 x 方向の変位振巾 RA_u および位相遅れ $r\theta_u$ を、振動数無次元量 a_0 を横軸にとり、基礎からの距離 $r/b(r=x, y, z)$ をパラメータとして示したものである。この図から、 x 軸上の振巾 RA_w および RA_u は $a_0=0$ のとき、ほぼ基礎からの距離の 2 乗に逆比例するので、 x/b が大きくなるほど RA_w および RA_u の落ち込みが大きい、しかし、 a_0 が大きくなるに従い、 x/b による落ち込みは小さく、そのため、 x/b が大きいほど a_0 による振巾の増加の割合は著じるしくなる。 y 軸上、 z 軸上の振巾 RA_u は a_0 により x 軸上の振巾 RA_u ほど著じるしい変動はしないが、やはり、 a_0 の値によっては静的なときと動的なときとの振巾の差が著じるしく出ることもある。すなわち、 $r/b(r=x, y, z)$ の大きいところでは、位置、変位の成分により程度の差こそあれ静的なときと動的なときとの振巾では相当異なることを示している。 RA_u の x, y および z 軸上における相違をみると、 a_0 の大きいところでは、 x 軸上の変位振巾 RA_u が一番大きく、 z 軸、 y 軸の順に RA_u の値は小さくなっている。次に、位相遅れについては、 x 軸上の $r\theta_w$ および y 軸上の $r\theta_u$ は a_0 の増加関数であるが、 x 軸上および z 軸上での $r\theta_u$ は a_0 の小さいところでは a_0 の減少関数であり、途中から a_0 の増加関数に変わる。

Figs. 5(a)~5(d) は $\nu=1/4, \eta=0, c/b=1$ の場合で、 x 軸上 z 方向の振巾無次元量 $RA_w/a_0^2, x, y$ および z 軸上 x 方向の振巾無次元量 RA_u/a_0^2 ならびにそれに対応する位相遅れ、 $r\theta_w, r\theta_u$ を、横軸に $a_0 r/b = \omega r/c_2$ ($r=x, y, z$) を、パラメータとして $a_0 = \omega b/c_2$ をとって示したものである。この図は、横軸を固定させて、 a_0 による変化をみたとき、加振力、振動数を一定として、基礎巾を変化させたことに対応する。 x 軸上の RA_w/a_0^2 および x, y 軸上の RA_u/a_0^2 は横軸を固定すると a_0 によって異なった値をとるが、 z 軸上

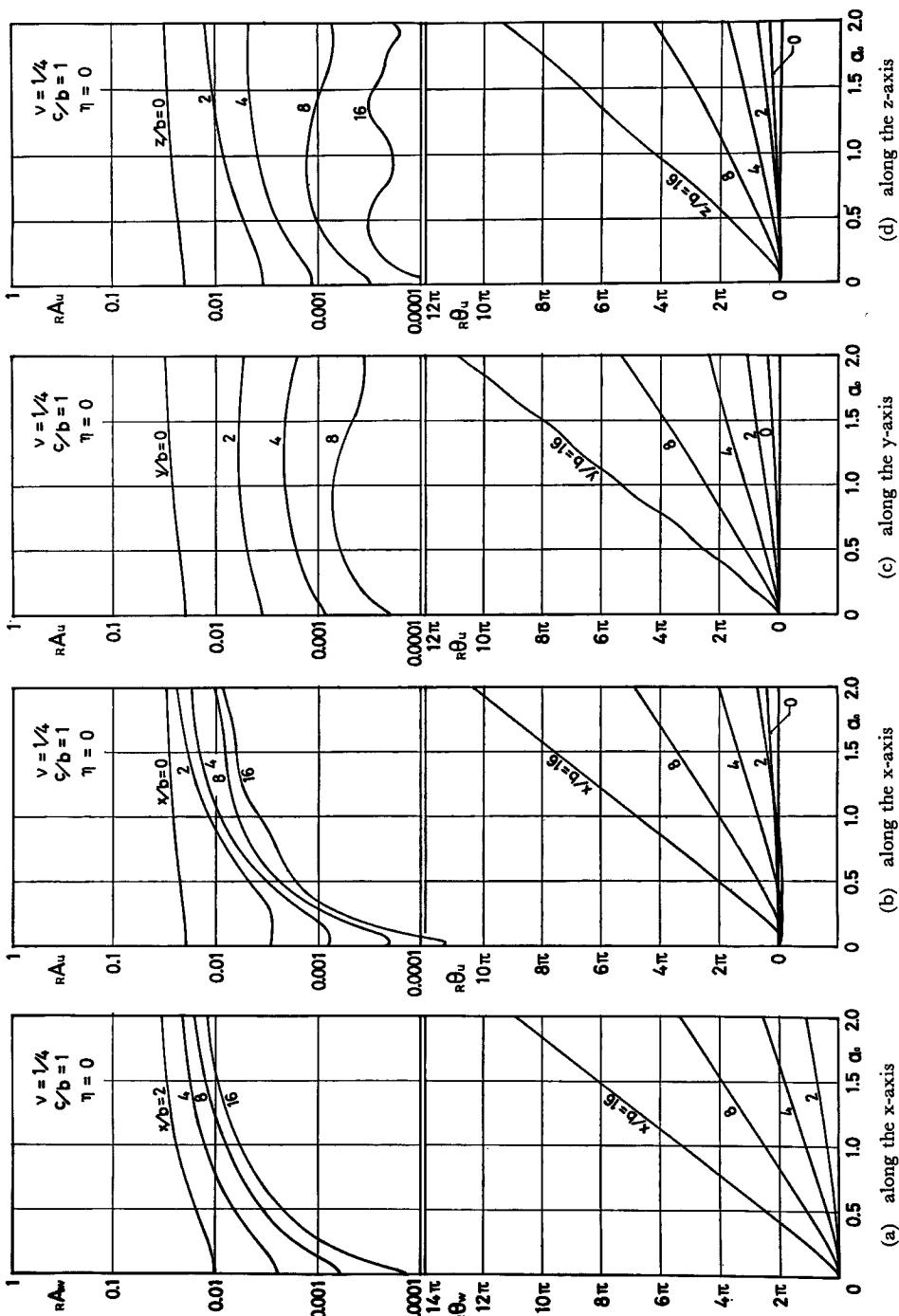


Fig. 4 Amplitude and phase characteristics for rotational excitation.

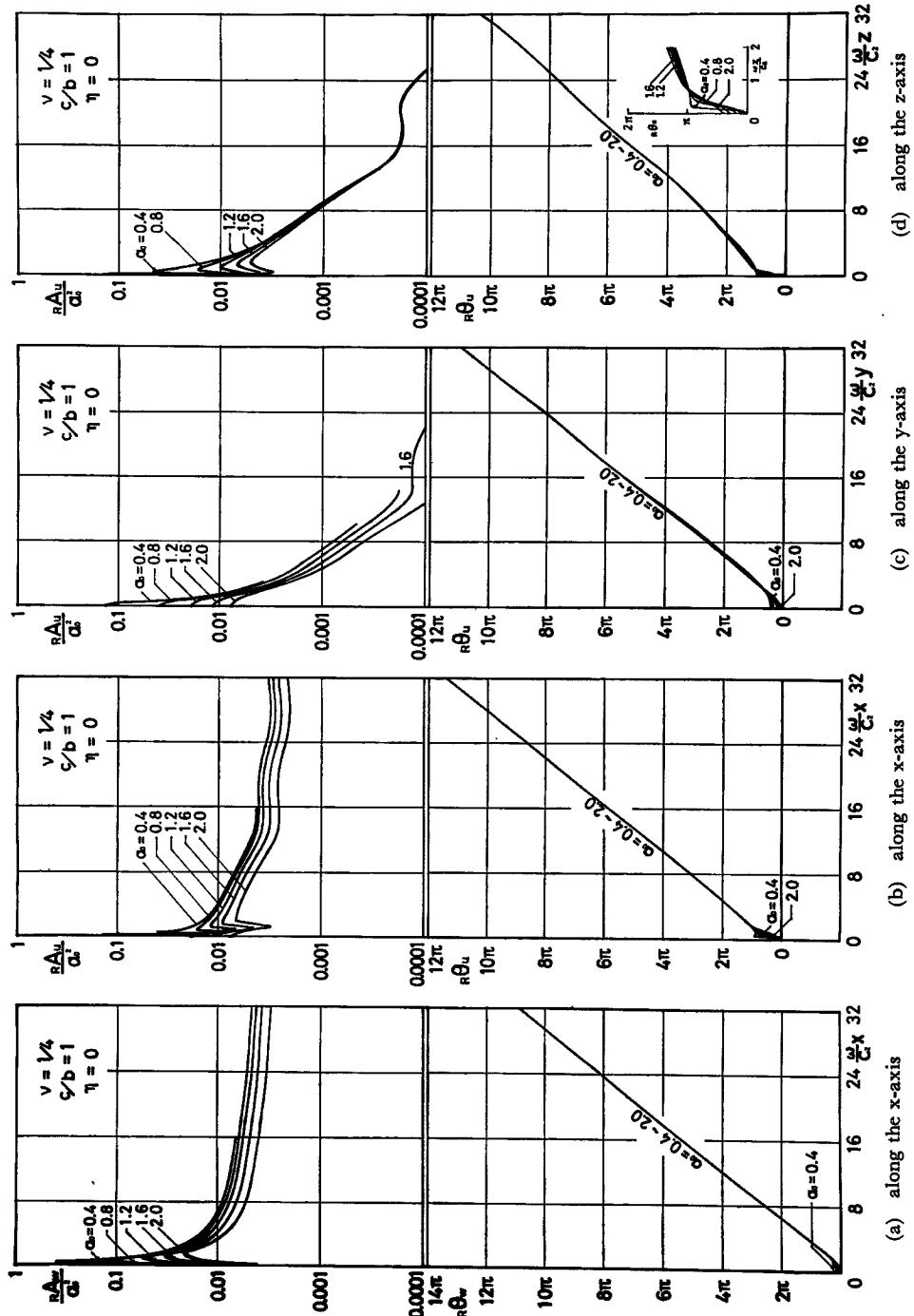


Fig. 5 Amplitude and phase characteristics for rotational excitation.

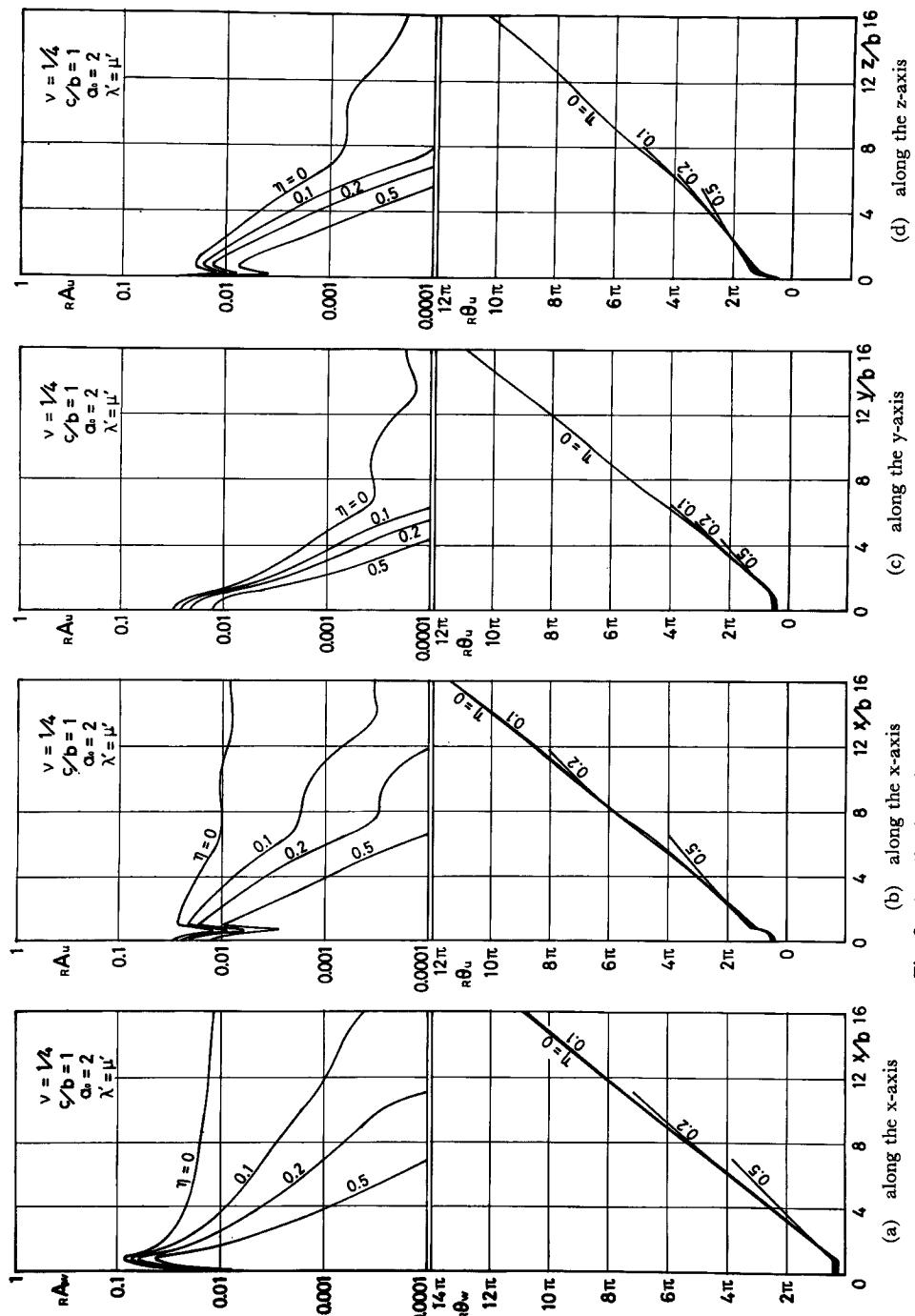


Fig. 6 Amplitude and phase characteristics for rotational excitation.

での $R A_u/a_0^2$ の値は、横軸 $\omega z/c_2$ の大きいところでは、 a_0 に無関係となる。これは、加振力を一定にしたとき、弾性体の表面 x, y 軸上での振巾は基礎巾の関数となるが、基礎中心直下ではある程度基礎から離ると基礎巾には無関係となる。この現象は基礎に垂直あるいは水平加振力を与えた場合と同じ傾向を示している。**Fig. 4** と同様に、この図からも基礎からの距離に対する振巾 $R A_u/a_0^2$ の減少する割合は x 軸上が一番小さい。これは表面 x 軸上に沿って表面波が卓越するためであろう。次に位相遅れについては、基礎直下およびその極く近辺では a_0 に関し位相遅れ $R \theta_w$ や $R \theta_u$ は異なっているが、 $\omega r/c_2(r=x, y, z)$ が大きくなると a_0 による変化はあまりみられない。これは基礎巾による位相遅れの差はあまりみられないことを示している。

Figs. 6(a)~6(d) は $\nu=1/4, c/b=1, a_0=2, \lambda'=\mu'$ の場合で、**Figs. 4, 5** と同じ位置での $R A_w, R A_u$ や $R \theta_w, R \theta_u$ を、横軸に基礎からの距離 $r/b(r=x, y, z)$ を、パラメータとして減衰係数 η をとって示したもので、粘弹性体の媒質のもつ減衰による影響を表わしている。ここで、ボアソン比 $\nu=1/4 (\lambda=\mu)$ のとき、 $\lambda'=\mu'$ 、すなわち、Lamé の常数 λ, μ に対する粘性常数 λ', μ' が等しいことは、疎密波に対する粘性減衰係数と剪断波に対する粘性減衰係数とが等しいことに対応する。この図から、 η が大きくなると基礎からの距離の増加に伴ない振巾 $R A_w, R A_u$ は急激に減少している。また、 $R A_u$ の位置による減少の割合は、 x 軸上での振巾が η の影響を一番よく受けている。位相遅れについては、基礎からの距離に対する位相遅れの勾配は η が増加するにつれて小さくなっている。この現象も垂直あるいは水平加振の場合²⁾ と同じ傾向を示している。

4. ま と め

本報では、半無限 Voigt 型粘弹性体の表面上にある長方形基礎に y 軸を回転軸とした回転加振を与えた場合、表面上 x 軸および y 軸ならびに粘弹性体内 z 軸における力一変位伝達特性の分布を求めた。前報³⁾において、垂直および水平加振に対する力一変位伝達特性を求めたので、それらと比較しながら回転加振に対する力一変位伝達特性をまとめる。ここに、垂直加振は z 方向に、水平加振は x 方向に加振した。

1. 静的な荷重が加わる場合

垂直、水平載荷による x, y および z 軸上における変位の各成分は基礎中心より基礎巾 ($2b$) と同程度以上離れると、基礎からの距離にはほぼ逆比例して減少したが、回転力による x, y および z 軸上の変位は基礎中心より基礎巾と同程度以上離れると基礎からの距離の 2 乗に逆比例して減少する。

2. 動的な荷重が加わる場合

(a) 振動数による影響

垂直、水平および回転のいずれの加振に対しても変位振巾は振動数の関数となるが、垂直、水平加振の場合は dynamic な加振による変位振巾が static な加力による変位よりも小さいときが多く、逆に大きくなつても、たとえば $x/b=16, a_0=2.0$ のときでさえ、たかだか数倍であったが、回転加振の場合は特に x 軸上の dynamic な変位振巾は $x/b=16, a_0=2.0$ のとき、static の変位量の約 100 倍にもなる。

(b) 基礎巾による影響

回転加振に対する振巾の基礎巾による影響は、垂直、水平加振に対する場合と同様に、表面上 x 軸および y 軸上での振巾は基礎巾の関数となるが、 z 軸上での振巾は基礎中心から基礎巾程度離れると基礎巾には無関係となる。

(c) 基礎中心からの距離による影響

垂直、水平加振による加振方向の軸上における変位振巾はかなり規則的な間隔をもった極大および極小が現われたが、回転加振による場合にはそのような現象は顕著には現われなかった。

(d) 地盤の媒質がもつ減衰作用による影響

垂直、水平加振と同様に、回転加振の場合も媒質の持つ減衰作用の影響は大きく、基礎からの距離が増すにつれ振巾は急激に減少する。

なお、数値計算には京都大学大型計算機センターの digital 電子計算機“FACOM 230-60”を使用したこととを記し、最後に、本稿の作成にあたり討論に参加された京大防災研助手鈴木有氏ならびに小堀研究室の諸兄に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木有・日下部馨：長方形基礎の加振による半無限粘弾性地盤の振動特性，京都大学防災研究所年報，第12号A，昭44.3，pp.301-316.
- 2) 小堀鐸二・南井良一郎・日下部馨：長方形基礎の加振による半無限粘弾性地盤の振動特性（その2），京都大学防災研究所年報，第13号A，昭45.3，pp.233-250.
- 3) 小堀鐸二・南井良一郎・日下部馨：弹性地盤上の剛体系の連成振動，日本建築学会近畿支部研究報告集，昭46.5，(構造・材料・施工)，pp.13-16.
- 4) Awojobi, A.O. and P. Grootenhuis: Vibration of Rigid Bodies on Semi-Infinite Elastic Media, Proc. Roy. Soc. London A, Vol. 287, No. 1408, 1965, pp. 27-63.
- 5) 小堀鐸二・南井良一郎・篠崎祐三：半無限弾性地盤上の剛基礎による強制振動——混合境界値問題としての取り扱い——，日本建築学会大会学術講演梗概集，昭44.8，pp.673-674.