

非線形多孔質弾性層の振動性状に関する研究

後藤 尚男・土岐 憲三・佐藤 忠信

DYNAMIC BEHAVIOUR OF NON-LINEAR POROUS ELASTIC LAYER

By Hisao GOTO, Kenzo TOKI and Tadanobu SATO

Synopsis

This paper is concerned with a dynamical theory of mixtures composed of several constituents in relative motion to each other. Using the Lagrangean density of mixtures, the Lagrangean formulations of the equations of motion are deduced in the reference coordinates for a mixture of a non-linear elastic solid and a non-linear compressible fluid. The non-linear constitutive equations for a mixture of these two continua are also deduced. The dynamical behaviours of a non-linear elastic layer and a liquid-filled non-linear porous elastic layer are examined, from which it is found that the vertical displacement occurs not only in the case of vertical input displacement but also for the horizontal input, and the pore pressure response in the layer is seen to be an important phenomenon.

I. 緒 論

物体の運動を研究する場合、その力学的環境は一様でないから、解析しようとする力学系の問題が、現在までに蓄積された物理的モデルの範ちゅうに入らないことが多い。したがって、新しい問題を解析しようとする場合、物理的・化学的・熱力学的に現在のものより複雑なモデルを組立てなければならないことが多い。新しい力学モデルは問題になっている力学現象を説明できるだけでなく、その理論は基礎的な問題に対しても十分な解を与えうるものでなければならない。こうした観点から、連続体の力学を一般的なものにしてようとする動きがこの十数年の間になされてきた。その主な研究分野はつぎのようなものであると考えられる¹⁾。(a) イオンと荷電粒子の相互作用を研究するプラズマの運動についての研究、(b) 高圧力下における流体の運動についての研究、(c) 化学的相互作用などをもつ気体、液体、固体についての研究、(d) 合金・溶媒・混合体についての研究、(e) 塑性理論ならびにクリープ現象についての研究などである。

一方、地盤を構成する土は普通、固体・液体・気体の三相から構成されることが多いから、外乱に対して各相に固有の応答が起る。これが土質力学の分野におけるいろいろな現象の原因になることが多い。例えば一次圧密の現象や地震時に地盤内に発生する間げき水圧の問題は外乱に対する固体相と流体相の応答の間に相対的な差が発生するため起る現象と言うことができよう。また不飽和な土の間げき水圧応答などを研究することは土を三相の混合した系と考え、各相の応答を解析することにほかならない。むろん土を構成する各相の性質は、おのおのを単体として取り出したときのそれとはかなり異なっているであろうから、混合の割合によって各相の力学的・物理学的性質の変化していく様子も研究されなければならない問題の一つであることは論をまたない。連続体の力学では、このように多くの構成相が混在している物体を多相混合体 (mixture) と名づけている。以下で述べることは多相混合体の理論を土質構成材料に適用する際に起ってくる各種の問題点を解明しようとする試みの一つとして実施したものである。

現在、土質力学の分野に適用されている各種の理論は微小ひずみの仮定のもとに立てられた場の方程式を

用いるのがほとんどである。しかし、最近のように軟弱な地盤上に大規模な構造物が施工されるようになると、地盤の外乱に対する変形はかなり大きなものとなり、微小ひずみ理論による解析では変形の性格を十分に与えることができなくなるから、系を構成する場の方程式は有限変形理論に基づいて求められなければならない。また浸透流解析のように固体相間に含まれる流体の運動性状だけが問題になるような場合を除いて、土質力学系の問題は境界条件が固定された空間座標系で与えられることが多いから、有限変形理論によって場の方程式を誘導する場合、基準座標系 (reference coordinate) で行なうほうが問題の解析上都合がよいことになる。今までになされている多相混合体の研究の多くは構成方程式についての考察が便利であるということからオイラー座標系 (current coordinate) によるものがほとんどであり、物体の境界が時間とともに変化する。したがって今までに得られている理論を用いる場合、境界条件の取り扱いがかなり面倒になると考えられる。

多相混合体の場の方程式を求めるには二つの手法があると考えられる。一つは Truesdell & Toupin²⁾ 等による手法で、各構成要素のおおのに対してモーメントの釣合、角運動量の釣合、エネルギーの釣合、エントロピー増大の原理を適用し、その上内部エネルギーと熱力学的変量 (エントロピーあるいは温度など) を各構成要素ごとに考え、これらの値と構成体全体の力学的あるいは熱力学的諸量の間には代数的な関係があると考えられるものである。他の一つは Green & Naghdi 等³⁾ が用いた手法で、エネルギーの釣合式と Clausius-Duhem の不等式に剛体並進運動下での Noll の客観性⁴⁾ を用いて混合体の場の方程式を誘導するものである。数学的には後者の理論がすっきりしているが、いずれの手法を用いても似たような場の方程式が求められる。ここではこれらの手法を用いず、ハミルトンの変分原理を用い、熱力学的現象を考慮しない場合の多相混合体のラグランジュの方程式について考察を加え、構成方程式にも若干の仮定のもとに非線形性を導入した。

2. 多相混合体の運動方程式

連続体の運動方程式をラグランジュの方程式によって求められれば、独立した粒子から構成される系の運動方程式を取り扱う場合のようにその形が非常に簡単になる。 n 次の自由度をもつ粒子系の場合には、ラグランジュの方程式は独立変量と時間 t に関する n 元の連立常微分方程式になる。すなわち、ラグランジュ関数は n 個の一般化座標とその時間微分 (n 個の一般化速度) でもって表示される。連続的な保存系 (弾性体などがその特別な場合) ではラグランジュの方程式は時間と空間座標で表わされる連立偏微分方程式になるはずである。この場合、ラグランジュ関数は一般化座標と一般化速度ならびに、一般化座標の空間微分に関係してくることになる。方程式の詳細な形は用いる空間座標によって異なってくる。以下の理論はカルテシアン矩形座標系における多相混合体の運動方程式の基準座標系における表示式を求めたものである。なお Biot⁵⁾ の用いた手法により、弾性骨格相と流体相からなる二相系の場合について、ダルシー形減衰がどのように表示されるかについても若干の考察を加えた。

時刻 $\tau=0$ で同じ位置 (X_1, X_2, X_3) にある多相混合体の構成要素 $s^{(\alpha)}$ がたがいに相対運動を行なって、時刻 $\tau=t$ で $x_i^{(\alpha)}$ にあるとすれば

$$x_i^{(\alpha)} = x_i^{(\alpha)}(X_I, t) = x_i^{(\alpha)}(X_1, X_2, X_3, t) \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 X_I は $\tau=0$ の座標系 (今後これを基準座標系にとる) であり、すべてのラテン文字の添字は 1, 2, 3 の値を取る。なお特にことわらないかぎりラテン文字については総和規約を適用し、ギリシャ文字の添字には適用されないものとする。大文字の記号はすべて基準座標系によるものを表わし、小文字はオイラー座標系 ($\tau=t$ における座標系) によるものを表わすものとする。運動方程式を基準座標系で表示する場合には、 $\tau=0$ で単位体積の中にあった物質が時刻 $\tau=t$ までにどれだけ変形するかを考えなければならない。この場合構成物質 $s^{(\alpha)}$ の変位は次式で表わされる。

$$x_i^{(\alpha)} - X_I = U_I^{(\alpha)}(X_I, t) \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $U_I^{(\alpha)}$ は $s^{(\alpha)}$ の基準座標系で測った変位。これから構成物質 $s^{(\alpha)}$ の基準座標系での速度, 加速度はつぎようになる。

$$\frac{Dx_i^{(\alpha)}}{Dt} = \frac{\partial U_I^{(\alpha)}}{\partial t}, \quad \frac{D^2x_i^{(\alpha)}}{Dt^2} = \frac{\partial^2 U_I^{(\alpha)}}{\partial t^2} \dots\dots\dots (3)$$

また、基準座標空間での各構成物質要素の変形の空間微分は次式で表わされる。

$$U_{I,J}^{(\alpha)} \equiv \frac{\partial U_I^{(\alpha)}}{\partial X_J} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $()$, J は $\partial()/\partial X_J$ を表わす記号である。各構成物質 $s^{(\alpha)}$ の基準座標系でのひずみ $E_{IJ}^{(\alpha)}$ は次式で定義される。

$$E_{IJ}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (U_{I,J}^{(\alpha)} + U_{J,I}^{(\alpha)} + U_{K,I}^{(\alpha)} U_{K,J}^{(\alpha)}) \dots\dots\dots (5)$$

この節の初めに述べたことから、三次元空間内での多相混合体の基準座標系でのラグランジェ密度 L (単位体積当り) は基準座標系としてカルテシアン矩形座標を用いればつぎのように表わされると考えられる。

$$L = \sum_{\alpha} L^{(\alpha)}(\eta_{I,J}^{(\beta)}, \dot{\eta}_I^{(\beta)}, \eta_I^{(\beta)}, t) \quad (\beta=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 L は構成系全体としてのラグランジェ密度、 $L^{(\alpha)}$ は構成要素 $s^{(\alpha)}$ のラグランジェ密度、 $\eta_I^{(\beta)}$ は構成要素 $s^{(\beta)}$ の基準座標系での一般化座標、 t は時間、 \cdot 記号は $\partial/\partial t$ を表わしている。したがって系全体のラグランジェアン \mathfrak{L} は次式で表わされる。

$$\mathfrak{L} = \int_v \sum_{\alpha} L^{(\alpha)} dv$$

上式にハミルトンの変分原理を適用すると

$$\delta I = \int_1^2 \int_v \delta \sum_{\alpha} L^{(\alpha)} dv dt = \int_1^2 \int_v \sum_{\alpha} \delta L^{(\alpha)} dv dt = 0$$

したがって

$$\int_1^2 \int_v \left\{ \sum_{\alpha} \frac{\partial L^{(\alpha)}}{\partial \eta_I^{(\beta)}} \delta \eta_I^{(\beta)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial L^{(\alpha)}}{\partial \dot{\eta}_I^{(\beta)}} \delta \dot{\eta}_I^{(\beta)} + \sum_{\alpha} \frac{\partial L^{(\alpha)}}{\partial \eta_{I,J}^{(\beta)}} \delta (\eta_{I,J}^{(\beta)}) \right\} dv dt = 0$$

この式に部分積分をほどこすと

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_v \sum_{\alpha} \frac{\partial L^{(\alpha)}}{\partial \dot{\eta}_I^{(\beta)}} \delta \eta_I^{(\beta)} dv \Big|_1^2 + \int_1^2 \int_s \sum_{\alpha} \frac{\partial L^{(\alpha)}}{\partial \eta_{I,J}^{(\beta)}} \delta \eta_I^{(\beta)} n_J^{(\beta)} ds dt \\ & + \int_1^2 \int_v \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\partial L^{(\alpha)}}{\partial \eta_I^{(\beta)}} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L^{(\alpha)}}{\partial \dot{\eta}_I^{(\beta)}} \right) - \left(\frac{\partial L^{(\alpha)}}{\partial \eta_{I,J}^{(\beta)}} \right)_{,J} \right\} \delta \eta_I^{(\beta)} dv dt = 0 \end{aligned}$$

変分量 $\delta \eta_I^{(\beta)}$ はたがいに独立で時刻 1, 2 ならびに領域 v の表面 s ではゼロになるようにとってあるから、上式より多相混合体のラグランジェの運動方程式として次式をうる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_I^{(\beta)}} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_{I,J}^{(\beta)}} \right)_{,J} - \frac{\partial L}{\partial \eta_I^{(\beta)}} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここに、

$$L = \sum_{\alpha} L^{(\alpha)} \dots\dots\dots (8)$$

以上は基準座標系における多相混合体の運動方程式についての考察であるが、この方法によって得られた(7)式は普通よくなされているようにオイラー座標系で運動方程式を求めておき、それを基準座標系へ変換する方法で求めることはできない。Fig. 1 はここで求めた運動方程式(基準座標系でのエネルギー密度を用いたもの)と current state でのエネルギー密度を用いて求めた運動方程式の座標変換における特性を示したものである。図の上の部分はオイラー座標系で運動方程式を求めておき、それを基準座標系へ変換するものであり、下の部分はここで行なった方法、すなわち基準座標系で直接運動方程式を求めた場合である。オイラー座標系で求める運動方程式は構成系全体のエネルギー密度として、時刻 $\tau=t$ において同じ位置を

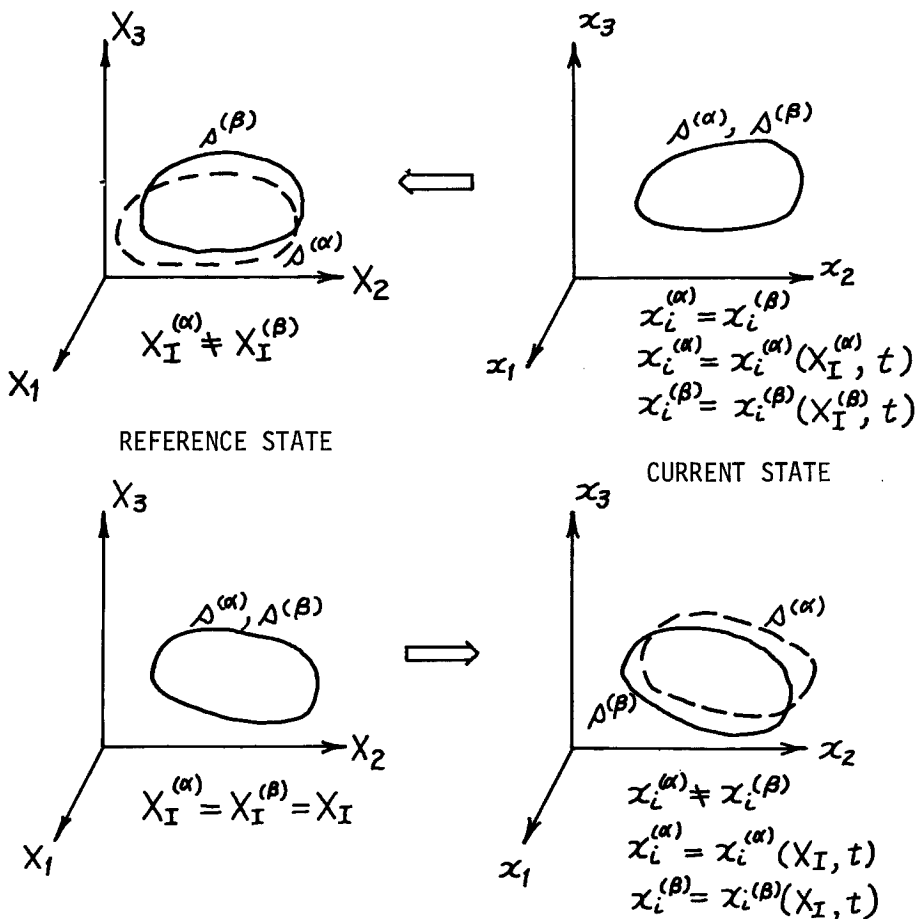


Fig. 1 Coordinate transformation of matters.

占める構成要素のエネルギー密度の総和を取るから、オイラー座標系から基準座標系へ運動方程式を変換するには次式を用いなければならない。

$$x_i = x_i(X_I^{(\alpha)}, t) \quad (\text{時刻 } \tau=t \text{ で } x_i \text{ は各構成要素に共通})$$

$$x_i - X_I^{(\alpha)} = u_i^{(\alpha)}(x_i, t)$$

すなわち、時刻 $\tau=t$ における構成要素の位置を基準座標へ変換すると、構成要素のおのおのは同一領域へは変換されず、構成要素間に相対的なずれが起ってくる。これは座標変換に際しヤコビアンが各構成要素に一つずつ必要になることであり、基準座標系で表わされる運動方程式は見掛上構成要素数の3倍の独立変数をもつものとなり、その表示式は(7)式に比べかなり複雑になる。一相系からなる物体の場合は、内容物の座標変換による相対的なずれがないから、いずれの手法を用いても同じ方程式が求まる。

以上多相混合体の運動方程式についての一般論を述べたが、以下では弾性体と流体の混合した三相系について考えてみることにする。いま一般化座標として

$$\left. \begin{array}{l} U_I^{(1)}(X_J, t): \text{弾性相の変位} \\ U_I^{(2)}(X_J, t): \text{流体相の変位} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

をとれば、(7) 式はつぎのように表わされる。以後 $\alpha=1$ は弾性相を $\alpha=2$ は流体相を表わすものとする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}_{I,(1)}} \right) + \frac{\partial}{\partial X_J} \left(\frac{\partial L}{\partial U_{I,J,(1)}} \right) - \frac{\partial L}{\partial U_{I,(1)}} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}_{I,(2)}} \right) + \frac{\partial}{\partial X_J} \left(\frac{\partial L}{\partial U_{I,J,(2)}} \right) - \frac{\partial L}{\partial U_{I,(2)}} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここに、

$$L = L^{(1)} + L^{(2)} \dots\dots\dots (11)$$

なおラグランジュ密度 L は一種のエネルギー密度と考えることができるから、 L におよぼす流体相の変形は、対象とする流体が粘性をもたないものであるならば、体積変化に関するもののみとなり形状変化に関する項は考えられないから、 L (特にひずみエネルギー W) に影響を与える流体相のグリーンのひずみテンソル $E_{IJ}^{(2)}$ は次式によって計算されねばならない。

$$\left. \begin{aligned} E_{IJ}^{(1)} &= \frac{1}{2} (U_{I,J}^{(1)} + U_{J,I}^{(1)} + U_{K,I}^{(1)} U_{K,J}^{(1)}) \\ E_{IJ}^{(2)} &= \left(U_{I,J} + \frac{1}{2} U_{I,J}^{(2)2} \right) \delta_{IJ} \text{ (総和規約は用いない)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $E_{IJ}^{(1)}$ は弾性相のひずみテンソル、 $E_{IJ}^{(2)}$ は流体相のひずみテンソルである。

(10) 式は流体相と弾性相の相対的な変位による減衰を考慮していない、以下では Biot⁵⁾ の考え方にに基づき有限変形時のダルシー形減衰について考えてみる。

いま多孔物質体中を流れる流体が Poiseuille の法則に従うものであると仮定すると、間げき中を流れる流体の形式は 6 個の一般化された空間速度によって決定される。いまこの 6 個の値を用いて dissipation 関数 ξ を定義することにする。 ξ はこの空間速度の 2 次形式で表わされ次式のようになる。

$$2\xi = b(\dot{U}_K^{(1)} - \dot{U}_K^{(2)})(\dot{U}_K^{(1)} - \dot{U}_K^{(2)}) \dots\dots\dots (13)$$

微小ひずみ理論の場合、 b はダルシーの透水係数 k と間げき率 β を用いてつぎのように与えられる⁶⁾。

$$b = \frac{\rho_0^{(2)} \beta g}{k} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $\rho_0^{(2)}$ は基準座標での流体相の密度を表わす。有限変形の問題を取り扱う場合には、(14) 式の β , k は定数とはならず、ひずみの関数として表示されるはずである。ただし、ひずみの時間微分には関係しないと考える。

いま流体相と弾性相の基準座標系における体積を V_w^0 , V_s^0 とおき、これらが ΔV_w , ΔV_s だけ変化したとすれば連続体の理論から⁷⁾ 次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta V_w}{V_w^0} &= (1 + 2I^{(2)} + 4II^{(2)} + 8III^{(2)})^{\frac{1}{2}} - 1 \\ \frac{\Delta V_s}{V_s^0} &= (1 + 2I^{(1)} + 4II^{(1)} + 8III^{(1)})^{\frac{1}{2}} - 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $I^{(1)}$, $II^{(1)}$, $III^{(1)}$ は弾性相の基準座標系でのひずみ不変量、 $I^{(2)}$, $II^{(2)}$, $III^{(2)}$ は流体相の基準座標系でのひずみ不変量。一方飽和した多孔質物体の間げき率 β は次式で与えられる。

$$\beta = \frac{V_w}{V_s + V_w} \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 V_w , V_s は基準座標で V_w^0 , V_s^0 であった構成要素のオイラー座標での体積である。したがって

$$V_w = V_w^0 + \Delta V_w, \quad V_s = V_s^0 + \Delta V_s \dots\dots\dots (17)$$

となるから、(17), (15) 式を (16) 式に代入し次式をうる。

$$\beta = \frac{e_0(1 + 2I^{(2)} + 4II^{(2)} + 8III^{(2)})^{\frac{1}{2}}}{(1 + 2I^{(1)} + 4II^{(1)} + 8III^{(1)})^{\frac{1}{2}} + e_0(1 + 2I^{(2)} + 4II^{(2)} + 8III^{(2)})^{\frac{1}{2}}} \dots\dots\dots (18)$$

ここに, e_0 は基準座標系における間げき比で次式で与えられる。

$$e_0 = V_w^0 / V_s^0 \dots\dots\dots (19)$$

$I^{(\alpha)}, II^{(\alpha)}, III^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2$) は 1 に比べて小さいから, (18) 式は $I^{(\alpha)}, II^{(\alpha)}, III^{(\alpha)}$ でもってテーラ展開が可能であり, 次式をうる。

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{e_0}{1+e_0} - \frac{e_0}{1+e_0} I^{(1)} - \frac{e_0^2}{1+e_0} I^{(2)} - \dots \\ &= \beta_0 - \beta_0 I^{(1)} - \beta_0 e_0 I^{(2)} - \dots \dots\dots (20) \end{aligned}$$

同様にして間げき比 e の級数表示は次式のようにになる。

$$e = e_0 - e_0 I^{(1)} + e_0 I^{(2)} - \dots \dots\dots (21)$$

また多孔性物体の透水係数は静的な場合⁸⁾, 動的な場合⁹⁾ のいずれのときも, 間げき率あるいは間げき比の関数として表示できると考えられるから, $k=k(e)$ に (21) 式の関係式を代入し $I^{(\alpha)}, II^{(\alpha)}, III^{(\alpha)}$ についてテーラ展開すれば

$$k = k_0 + k_1 I^{(1)} + k_2 I^{(2)} + \dots \dots\dots (22)$$

と表わすことができる。ここに, k_0 は物体にひずみが発生していないときの基準座標での透水係数で, k_1, k_2, \dots は実験的に定めうる定数である。(22), (20) 式を (14) 式に代入し b のひずみ不変量による展開式を書くと次のようになる。

$$b = b_0 + b_1 I^{(1)} + b_2 I^{(2)} + \dots \dots\dots (23)$$

ここに,

$$b_0 = \frac{\rho_0^{(2)} \beta_0 g}{k_0} \dots\dots\dots (24)$$

であり, b_1, b_2, \dots は $e_0, e_0^{(2)}, k_1, k_2, \dots$ などの関数である。

以上のように b の性格が明らかになったので, ξ を考慮した場合のラグランジェの運動方程式を考えれば, (10) 式はつぎのように書き改められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}_I^{(1)}} \right) + \frac{\partial}{\partial X_J} \left(\frac{\partial L}{\partial U_{I,J}^{(1)}} \right) - \frac{\partial L}{\partial U_I^{(1)}} + \frac{\partial \xi}{\partial \dot{U}_I^{(1)}} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}_I^{(2)}} \right) + \frac{\partial}{\partial X_J} \left(\frac{\partial L}{\partial U_{I,J}^{(2)}} \right) - \frac{\partial L}{\partial U_I^{(2)}} + \frac{\partial \xi}{\partial \dot{U}_I^{(2)}} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

なお, 構成要素 $s^{(\alpha)}$ のラグランジェ密度 $L^{(\alpha)}$ は構成要素 $s^{(\alpha)}$ の運動エネルギー $T^{(\alpha)}$, ひずみエネルギー $\mathcal{W}^{(\alpha)}$, 物体力がポテンシャル $\phi^{(\alpha)}$ を用いてつぎのように表わされる。

$$L^{(\alpha)} = T^{(\alpha)} - \mathcal{W}^{(\alpha)} - \rho_0^{(\alpha)} \phi^{(\alpha)} \dots\dots\dots (26)$$

ここに, $\rho_0^{(\alpha)}$ は基準座標系での α 相の単位質量を表わす。たしがって, 系全体のラグランジェ密度 L は (8) 式より

$$L = \sum_{\alpha=1}^2 \{ T^{(\alpha)} - \mathcal{W}^{(\alpha)} - \rho_0^{(\alpha)} \phi^{(\alpha)} \} \dots\dots\dots (27)$$

となる。いま弾性相の物体力を $\rho_0^{(1)} G_I^{(1)}$, 流体相のそれを $\rho_0^{(2)} G_I^{(2)}$ とおけば次式をうる。

$$G_I^{(1)} = \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_i^{(1)}}, \quad G_I^{(2)} = \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_i^{(2)}} \dots\dots\dots (28)^*$$

また, 基準座標系での構成要素 $s^{(\alpha)}$ の運動エネルギー $T^{(\alpha)}$ は $\alpha=1, 2$ に対してつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} 2T^{(1)} &= \rho_{11} \dot{U}_K^{(1)} \dot{U}_K^{(1)} + \rho_{12} \dot{U}_K^{(1)} \dot{U}_K^{(2)} \\ 2T^{(2)} &= \rho_{12} \dot{U}_K^{(1)} \dot{U}_K^{(2)} + \rho_{22} \dot{U}_K^{(2)} \dot{U}_K^{(2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

ここに, $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$ は孔げきを流れる流体の相対速度が一様でないことを考慮に入れた基準座標系での質

* 物体力は reference state で同じ位置にあった構成要素の current state のものを取らなければならないから, $\phi^{(\alpha)}$ の微分は current coordinate $x_i^{(\alpha)}$ によってなされなければならない。

量係数である。流体相が動的な変形をするときに弾性相から抵抗を受ける。またこの逆も考えられる ρ_{12} はこのような動力の coupling を表わす質量係数になっている。なお微小変形時の Biot の解析⁵⁾ と同じ手法を用いて、有限変形の場合に ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{22} , $\rho_0^{(1)}$, $\rho_0^{(2)}$ の間につきの関係式が成立することが簡単に求められる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_0^{(1)} &= \rho_{11} + \rho_{12} \\ \rho_0^{(2)} &= \rho_{12} + \rho_{22} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

また、これらの値はつぎの関係式を満たさなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11} > 0, \quad \rho_{22} > 0, \quad \rho_{12} < 0 \\ \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

構成系全体のひずみエネルギー W は多相混合体を構成する物質のマクロな性状が等方性を示せば次式のように表わしてもよいと考えられる。

$$\begin{aligned} W &= W^{(1)} + W^{(2)} = W(E_{IJ}^{(1)}, E_{IJ}^{(2)}) = W(U_{I,J}^{(1)}, U_{I,J}^{(2)}) \\ &= W(I^{(1)}, II^{(1)}, III^{(1)}, I^{(2)}, II^{(2)}, III^{(2)}) \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

(27), (28), (29), (32) 式を (25) 式に代入し弾性相と流体相の混合された物体の運動方程式として次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 U_I^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 U_I^{(2)}}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial U_I^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial U_I^{(2)}}{\partial t} \right) + \rho_0^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial U_I^{(1)}} &= \left(\frac{\partial W}{\partial U_{I,J}^{(1)}} \right)_{,J} \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 U_I^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 U_I^{(2)}}{\partial t^2} - b \left(\frac{\partial U_I^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial U_I^{(2)}}{\partial t} \right) + \rho_0^{(2)} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial U_I^{(2)}} &= \left(\frac{\partial W}{\partial U_{I,J}^{(2)}} \right)_{,J} \end{aligned} \right\} \dots\dots (33)$$

(33) 式の上式は弾性相に対する運動方程式であり、下式は流体相に対するものである。いずれも有限変形理論によって誘導されたものである。(33) 式に現われる物体外力ポテンシャルの変位による微分項は (2), (28) 式を用いて物体力に等しいことがわかる。

$$\rho_0^{(\alpha)} \frac{\partial \phi^{(\alpha)}}{\partial U_I^{(\alpha)}} = \rho_0^{(\alpha)} \frac{\partial \phi^{(\alpha)}}{\partial x_i^{(\alpha)}} = \rho_0^{(\alpha)} G_I^{(\alpha)} \quad (\alpha=1, 2) \dots\dots\dots (34)$$

なお (33) 式の右辺の値

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial U_{I,J}^{(1)}} \right)_{,J} &= \left(\frac{\partial W^{(1)}}{\partial U_{I,J}^{(1)}} \right)_{,J} + \left(\frac{\partial W^{(2)}}{\partial U_{I,J}^{(1)}} \right)_{,J} \\ \left(\frac{\partial W}{\partial U_{I,J}^{(2)}} \right)_{,J} &= \left(\frac{\partial W^{(1)}}{\partial U_{I,J}^{(2)}} \right)_{,J} + \left(\frac{\partial W^{(2)}}{\partial U_{I,J}^{(2)}} \right)_{,J} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

はおのおの弾性相と流体相に発生する Piola-Kirchhoff の応力テンソル $L_{iJ}^{(\alpha)}$ の空間微分 $L_{iJ,J}^{(\alpha)}$ に相当する量になっている。

3. 構成方程式

弾性相と流体の二相系からなる物質のひずみエネルギー W は基準座標系で次式のように表わされる。

$$W = \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^{E_{IJ}^{(\alpha)}} K_{IJ}^{(\alpha)} dE_{IJ}^{(\alpha)} \dots\dots\dots (36)$$

ここに、 $K_{IJ}^{(\alpha)}$ は構成相 $s^{(\alpha)}$ の Kirchhoff の応力テンソルである。(36) 式より Kirchhoff の応力テンソルは

$$K_{IJ}^{(1)} = \frac{\partial W}{\partial E_{IJ}^{(1)}}, \quad K_{IJ}^{(2)} = \frac{\partial W}{\partial E_{IJ}^{(2)}} \dots\dots\dots (37)$$

と与えられる。いま対象としている物質が等方性であるとすれば、ひずみエネルギーは (32) 式のように各相のひずみ不変量のみ関数と考えることができる。ひずみ不変量とひずみテンソルの間には次式の関係式がある。

$$\left. \begin{aligned} I^{(\alpha)} &= \frac{1}{1!} \delta_{KL} E_{KL}^{(\alpha)} \\ II^{(\alpha)} &= \frac{1}{2!} e_{KMP} e^{LNP} E_{LK}^{(\alpha)} E_{NM}^{(\alpha)} \\ III^{(\alpha)} &= \frac{1}{3!} e_{KMP} e^{LNQ} E_{LK}^{(\alpha)} E_{NM}^{(\alpha)} E_{QP}^{(\alpha)} = \det(E_{KL}^{(\alpha)}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)*$$

ここに、 δ_{KL} はクロネッカーのデルタ、 e_{KMP} はパーミュテーション記号である。なお (38) 式より次式の関係も得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I^{(\alpha)}}{\partial E_{IJ}^{(\alpha)}} &= \delta_{IJ}, \quad \frac{\partial II^{(\alpha)}}{\partial E_{IJ}^{(\alpha)}} = I^{(\alpha)} \delta_{IJ} - E_{IJ}^{(\alpha)} \\ \frac{\partial III^{(\alpha)}}{\partial E_{IJ}^{(\alpha)}} &= E_{IM}^{(\alpha)} E_{MJ}^{(\alpha)} - I^{(\alpha)} E_{IJ}^{(\alpha)} + II^{(\alpha)} \delta_{IJ} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

各構成要素のひずみは衝撃的な外力が作用している領域以外ではあまり大きな変化はないと考えられるから、(32) 式は初期状態のまわりでテーラ展開できる。なお非線形性を考慮することによって起る特性を調べるのがこの節の目的であるから、ここではテーラ展開は 3 次までとしているが、展開の次数を多くしても以下に述べる特性は失われまいと考えられる。 W をひずみ不変量によってテーラ展開すれば次式をうる。

$$\begin{aligned} W &= p_E^0 I^{(1)} + p_f^0 I^{(2)} + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) I^{(1)2} - 2\mu II^{(1)} + R I^{(1)} I^{(2)} + \frac{1}{2} Q I^{(2)2} + P II^{(2)} \\ &+ LI^{(1)3} + m I^{(1)} II^{(1)} + n III^{(1)} + LI^{(2)3} + M I^{(2)} II^{(2)} + N III^{(2)} \\ &+ f_1 I^{(2)} II^{(1)} + f_2 I^{(2)} I^{(1)2} + f_3 I^{(1)} I^{(2)2} + f_4 I^{(1)} II^{(2)} \\ &+ (\text{higher order term}) \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

ここに、 p_E^0, p_f^0 はひずみがゼロの時の弾性相の応力と流体圧、 λ, μ, l, m, n は弾性相の弾性定数、 Q, P, L, M, N は流体相の弾性定数、 R, f_1, f_2, f_3, f_4 は流体相と弾性相の変形のための coupling を表す定数である。

(40) 式を (37) 式に代入し、(12), (38), (38)', (39) 式を考慮して次式をうる。

$$\begin{aligned} K_{IJ}^{(1)} &= [p_E^0 + \lambda I^{(1)} + 3L I^{(1)2} + m(I^{(1)2} + II^{(1)}) + n II^{(1)} + R I^{(2)} + f_1 I^{(1)} I^{(2)} \\ &+ 2f_2 I^{(1)} I^{(2)} + f_3 I^{(2)2} + f_4 II^{(2)}] \delta_{IJ} \\ &+ [2\mu - m I^{(1)} - n I^{(1)} - f_1 I^{(2)}] E_{IJ}^{(1)} + n E_{IM}^{(1)} E_{MJ}^{(1)} \\ &+ (\text{higher order term}) \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{IJ}^{(2)} &= [p_f^0 + Q I^{(2)} + P(I^{(2)} - E_{IJ}^{(2)}) + 3L I^{(2)2} + M(I^{(2)2} - I^{(2)} E_{IJ}^{(2)} + II^{(2)}) \\ &+ N(E_{IJ}^{(2)2} - I^{(2)} E_{IJ}^{(2)} + II^{(2)}) + R I^{(1)} + f_1 II^{(1)} + f_2 I^{(1)2} + f_3 I^{(1)} I^{(2)} \\ &+ f_4(I^{(2)} - E_{IJ}^{(2)}) I^{(1)}] \delta_{IJ} + (\text{higher order term}) (\text{総和規約は用いない}) \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

(42) 式では、流体圧 $K_{IJ}^{(2)}$ が弾性相の 2 次のひずみ不変量 $II^{(1)}$ に関係している。 $II^{(1)}$ は弾性相の八面体せん断ひずみ γ_{oct} とつぎの関係

$$II^{(1)} = \frac{1}{3} I^{(1)2} - \frac{3}{2} \gamma_{oct}^2 \dots\dots\dots (43)$$

があるから、間げき流体圧が弾性相のせん断ひずみに関係すると言う、いわゆるダイラタンシー現象を(42)

*) 流体相に対して (38) 式を適用すれば (12) 式を考慮して
$$\left. \begin{aligned} I^{(2)} &= E_{11}^{(2)} + E_{22}^{(2)} + E_{33}^{(2)}, \quad II^{(2)} = E_{11}^{(2)} E_{22}^{(2)} + E_{22}^{(2)} E_{33}^{(2)} + E_{33}^{(2)} E_{11}^{(2)} \\ III^{(2)} &= E_{11}^{(2)} E_{22}^{(2)} E_{33}^{(2)} \end{aligned} \right\} (38)'$$

ただし、 $E_{11}^{(2)} = U_{1,1}^{(2)} + \frac{1}{2} U_{1,1}^{(2)2}, \quad E_{22}^{(2)} = U_{2,2}^{(2)} + \frac{1}{2} U_{2,2}^{(2)2}$
 $E_{33}^{(2)} = U_{3,3}^{(2)} + \frac{1}{2} U_{3,3}^{(2)2}$

であることに注意しなければならない。

式で表示できることがわかる。つぎに (41) 式の両辺に $\delta_{i,j}$ を作用させ、弾性相の Kirchhoff の平均主応力を K_M とおけば次式が求まる。

$$K_M = p_B^0 + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) I^{(1)} + \frac{1}{3}(9l + 3m + n) I^{(1)2} - \frac{1}{3}(3m + n)\gamma_{occ}^2 + RI^{(2)} + \frac{2}{3}f_1 I^{(1)} I^{(2)} + 2f_2 I^{(1)} I^{(2)} + f_3 I^{(2)2} + f_4 II^{(2)} \dots (44)$$

(44) 式は弾性相の平均主応力が弾性相のせん断ひずみに関係することを表わしており、(43)、(44) 式の両者から、ひずみエネルギーに非線形性を導入すれば、いわゆるダイラタンシー現象を構成方程式に組み入れることが可能になることを表わしている。

4. 非線形多孔質弾性層の振動性状

地震時の地殻の動的挙動を調べる場合、地殻を構成する物質を均質等方な線形弾性体とみなし、その振動性状を解析することが多い。これは線形問題を取り扱う数学的基礎が確立されていることにもよるが、その基本的な概念は、地震波の変位振幅は相当大きくなることもあるが、震源のごく近くや、激震地域に起る地表面付近の振動などの特別な場合を除くと、地震波の波長が比較的長いので、地震波による地殻の物質のひずみは非常に小さい¹⁰⁾、と考えられることにあると言えよう。地震学で取り扱うような地表面からかなり深い基盤層や地殻の問題にはこのような仮定も妥当と考えられるが、土木構造物の安全性に関係するような地表層では層を構成する物質はかなり軟かく、かつ固体、液体、気体の三相から構成されることが多いから、このような物質を単一相からなる線形弾性体と考えることはかなり大胆な仮定と言える。したがって、地表層の振動性状を研究する場合、土の応力とひずみをどの領域まで線形弾性とすることがゆるされるかと言う考察が必要になってくる。最近このような考えから、応力レベルあるいはひずみレベルの大きさによって、土試料中を伝播する弾性波の伝播速度がどのように変化するかを測定しようとする試み^{11), 12)} がなされている。

一方、地盤の非線形応答を求めるために、地盤をばねと集中質量からなる多質点系モデルにおき換え、ばねに履歴特性をもたして地盤の非線形振動特性を研究しようとする考え方¹³⁾ もある。この場合には連続体を多質点系で近似する過程で三次元的な応力-ひずみ関係を考慮してばね定数を決定するのにかなりの工夫が必要と考えられる。また地盤を構成する物質を弾塑性体と考えると、振動時の速度場を満足する解を有限要素法を用いて求めた研究¹⁴⁾ も行なわれている。しかしいずれの場合にもせん断ひずみと体積ひずみの coupling の現象を明確にとらえることはできていないから、土のような物質に特有なダイラタンシー現象を動的な問題に適確に取り入れているとは言いがたい。したがってここでは、2, 3 節で求めた運動方程式と構成方程式を用いて地盤の振動問題を考えてみることにする。

4.1 非線形弾性層の振動性状

この場合 (33) 式で流体相の存在を考えない場合に相当するから運動方程式はつぎのようになる。

$$L_{iK,K} + \rho_s G_I = \rho_s \frac{\partial^2 U_I}{\partial t^2} \dots (45)$$

$$L_{i,j} = \frac{\partial W}{\partial U_{I,j}} \dots (46)$$

ここに、 ρ_s は弾性層の単位質量、 $\rho_s G_I$ は物体力である。なお流体相がないから各変量についていた添字 α は取り除いてある。

いま Fig. 2 のような半無限に広がる剛な基盤上の厚さ H の非線形弾性層を考える。層に入射する波が境界 $X_1=0$ に鉛直下方から一様に入る SH 波、SV 波あるいは P 波であるとすれば、表層内に発生する変位 U_1, U_2 は X_1, t のみの関数と考えてよいから次式をうる。

$$U_1 = U_1(X_1, t), U_2 = U_2(X_1, t), U_3 = 0 \dots (47)$$

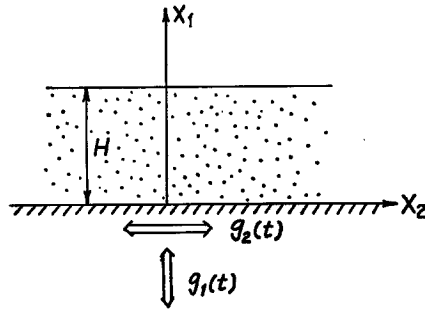


Fig. 2 Elastic layer.

(47) 式を (12) 式の上式に代入し次式うる。

$$E_{11} = U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2, \quad E_{21} = \frac{1}{2} U_{2,1}, \quad E_{12} = \frac{1}{2} U_{2,1}, \quad \text{他の } E_{IJ} = 0 \dots (48)$$

(47) 式を (38) 式に代入し

$$I = U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2, \quad II = -\frac{1}{4} U_{2,1}^2, \quad III = 0 \dots (49)$$

(49) 式を (40) 式に代入し (46) 式を考慮すれば次式をうる。

$$L_{11} = \frac{\partial W}{\partial U_{1,1}} = p_E^0 (1 + U_{1,1}) + (\lambda + 2\mu) \left\{ U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2 \right\} (1 + U_{1,1}) \\ + 3l \left\{ U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2 \right\}^2 (1 + U_{1,1}) - \frac{m}{4} U_{2,1}^2 (1 + U_{1,1}) \dots (50)$$

$$L_{21} = \frac{\partial W}{\partial U_{2,1}} = p_E^0 U_{2,1} + \mu U_{2,1} + (\lambda + 2\mu) U_{2,1} \left\{ U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2 \right\} \\ + 3l \left\{ U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2 \right\}^2 U_{2,1} - \frac{m}{4} U_{2,1}^3 \\ - \frac{m}{2} \left\{ U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2 \right\} U_{2,1} \dots (51)$$

(45) 式に (50), (51) 式を代入し運動方程式として次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} U_{2,11} + \frac{1}{\mu} L_2 + \frac{1}{\mu} G_2 &= \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \\ U_{1,11} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} L_1 + \frac{1}{\lambda + 2\mu} G_1 &= \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots (52)$$

ここに、 L_2, L_1 は $L_{21,1}, L_{11,1}$ を計算した際に現われる非線形項を取りまとめたもので次式で表わされる。なお $c_s^2 = \mu/\rho_s, c_p^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_s$ である。いま必ずみがゼロの時に地盤内に応力が発生していないと考えれば $p_E^0 = 0$ とおけるから

$$L_1 = (\lambda + 2\mu) \{ U_{1,1} U_{1,11} + U_{2,1} U_{2,11} \} + (\lambda + 2\mu) \{ U_{1,11} U D 1 + U_{1,1} U D 2 \} \\ + 3l U_{1,11} U D 1^2 + 6l (1 + U_{1,1}) U D 1 U D 2 - \frac{m}{2} U_{2,1} U_{2,11} (1 + U_{1,1}) - \frac{m}{4} U_{1,11} U_{2,1}^2 \\ L_2 = (\lambda + 2\mu) \{ U_{2,1} U D 1 + U_{2,1} U D 2 \} + 3l \{ U_{2,11} U D 1^2 + 2 U_{2,1} U D 1 U D 2 \} \\ - \frac{3}{4} m U_{2,1}^2 U_{2,11} - \frac{1}{2} m U_{2,11} U D 1 - \frac{1}{2} m U_{2,1} U D 2$$

ここに、 $U D 1 = U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2, U D 2 = U_{1,11} + U_{1,1} U_{1,11} + U_{2,1} U_{2,11}$ である。

境界条件

$X_1=0$ で剛基盤と地層地盤の変位が等しいことから

$$U_1 = g_1(t), \quad U_2 = g_2(t) \dots\dots\dots (53)$$

$X_1=H$ で応力がゼロになることから

$$L_{11}=0, \quad L_{21}=0 \dots\dots\dots (54)$$

(54) 式に (50), (51) 式を代入し、線形弾性理論によるものと矛盾しない境界条件として次式をうる。

$$X_1=H \text{ で } U_{1,1}=0, \quad U_{2,1}=0 \dots\dots\dots (55)$$

(52) 式は非線形連立 偏微分方程式であるから、解析的に解を求めることはかなり困難である。以下では階差法によってその解を求め考察を加えることにする。

著者の 1 人が協同研究した参考文献 15) における比較的ゆるい砂 (間げき比 0.83) の場合は λ がおよそ 500~600 (kg/cm²), μ が 100 (kg/cm²) であったから、ここではもう少し小さい間げき比の砂を対象にすることにして、 $\lambda=800$ (kg/cm²), $\mu=200$ (kg/cm²) とした。対象とする地盤のモデルは Fig. 2 に示したもので、深さ H は 10 m, 単位体積密度は 2.1 (g/cm³) とした。なお地盤層に入射する波は正弦波として、その加速度振幅を 200 gal, 周波数を 3 Hz としたものである。Fig. 3 は鉛直下方から正弦的な SH 波が入った場

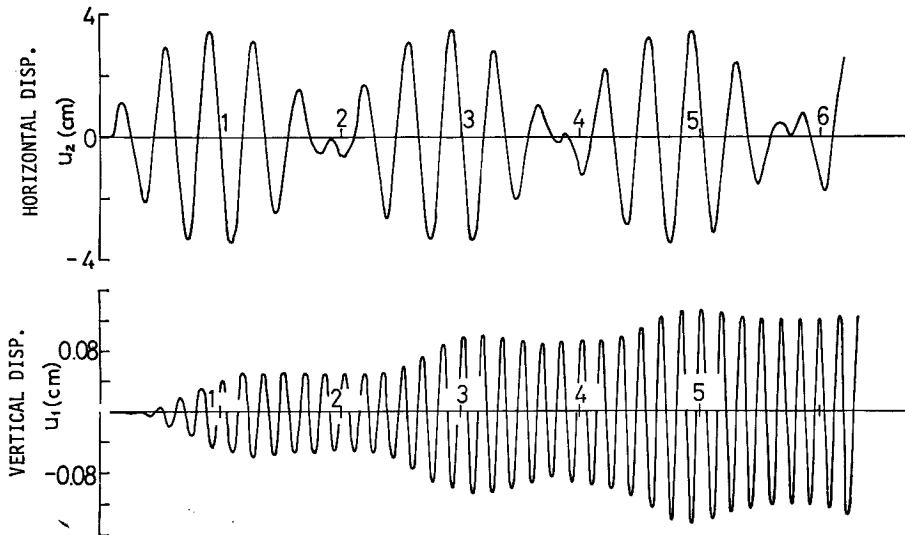


Fig. 3 Response of horizontal and vertical displacement at ground surface. (Input: horizontal acc. $A_h=200$ gal, $f_h=3$ cycle/sec)

合の地表面での水平変位と鉛直変位の応答を示したものである。非線形弾性係数 m, l はゼロに取ってあるが、方程式系が有限変形理論に基づいているため、水平変位のみでなく鉛直変位の発生することがわかる。すなわち、グリーンのひずみテンソルの 2 次の項に体積変化と形状変化の coupling があるために発生する現象と言える。また鉛直変位の周期は水平変位のそれのおよそ半分になっている。Fig. 4 は $l=m$ の条件下で非線形弾性係数を変化させた場合の鉛直変位の変動を調べたものである。破線は l, m が正の値で変化する場合であり、実線は負の値で変化する場合のものである。 l, m の値が λ, μ の値のオーダーに近くなるとその変動は急激に大きくなるのがわかる。前述の参考文献 15) のくり返し載荷試験の結果によれば λ, μ と l, m の値の大きさは 10^4 程度 l, m のほうが大きかったから、このような非線形性を考えるとかなり大

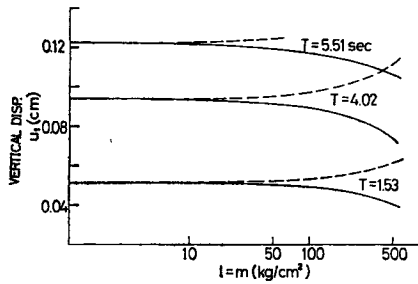


Fig. 4 Vertical displacement at ground surface versus non-linear elastic constant. (Input: horizontal acc. $A_h=200$ gal, $f_h=3$ cycle/sec)

大きな鉛直変位が発生するものと考えられる (実際の数値計算にこのような大きな値を入れると解の安定性がこわれる)。Fig. 5 は表層底面に鉛直下方から一様に正弦的 SV 波あるいは P 波の入った場合の変位応答におよぼす物体力の影響を調べたものである。非線形弾性係数 l, m はゼロに取ってある。(a) は物体力を考えない場合, (b) が物体力を考えた場合の地表面での変位応答を示している。変位応答におよぼす物体力の影響の非常に大きいことがわかる。なお残留ひずみの存在しない場合で, 入力変位が鉛直方向のみの場合には水平変位が発生しない。これは Fig. 3 の結果と比べると矛盾しているように考えられるが, Piola-Kirchhoff の応力テンソルが対称テンソルにならないことから起ってくる現象である。なお残留ひずみがあれば, 鉛

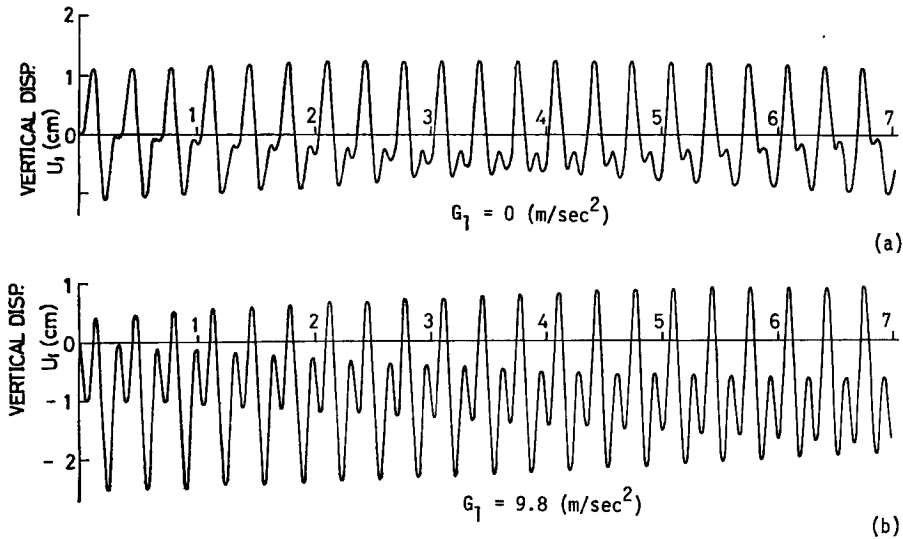


Fig. 5 The body force influence upon vertical displacement. (Input: vertical acc. $A_v=200$ gal, $f_v=3$ cycle/sec)

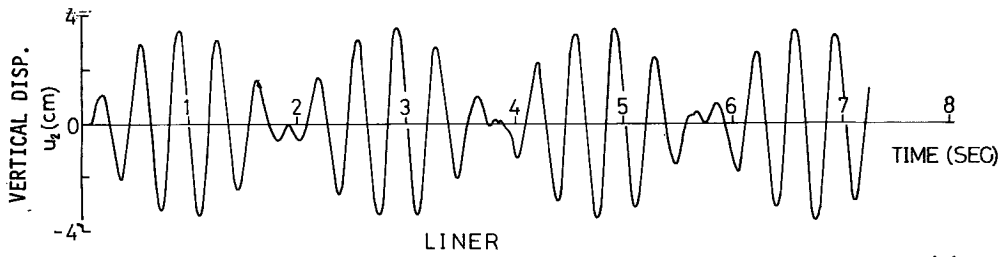
直入力変位だけの場合でも水平変位が発生する。Fig. 6 は水平入力と鉛直入力がある場合の地表面での変位応答を示したもので, 非線形弾性係数 l, m はゼロに取ってある。(a) は線形方程式系における水平変位応答を示し, (b) は物体力のない場合の水平変位応答を示し, (c) は物体力を考慮した場合のそれを示している。これから構成方程式が線形であれば, 有限変形系における運動方程式を用いても微小変形理論による応答とあまり大きな差は算出されないことがわかる。非線形弾性係数 l, m のオーダーが λ, μ のそれに等しいような場合でもこの性状は変わらない。

4.2 飽和した非線形多孔質弾性層の振動性状

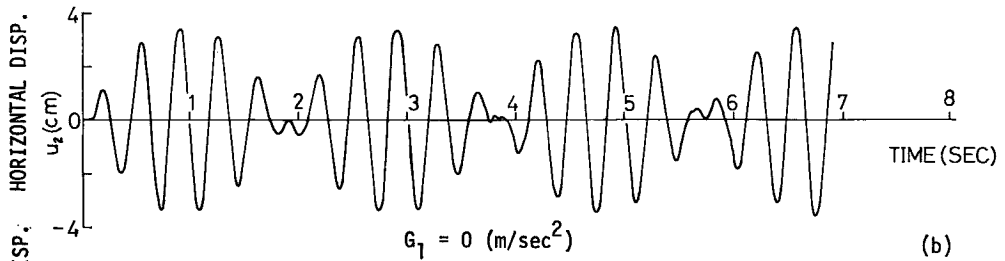
この場合, 運動方程式は (33) 式で与えられたものを, ひずみエネルギー W の形としては (40) 式を用いればよいことになる。いま簡単のために弾性相の変位 $U_I^{(1)}$ 流体相の変位 $U_I^{(2)}$ を次式でおき換える。

$$U_I^{(1)} \rightarrow U_I, \quad U_I^{(2)} \rightarrow V_I \dots\dots\dots (56)$$

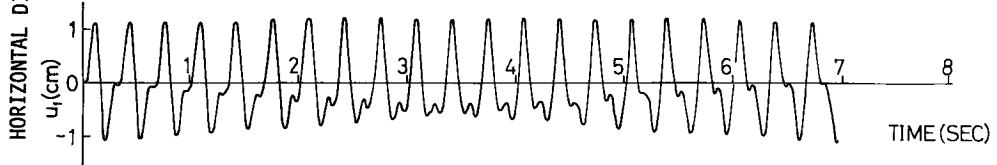
いま, 対象とする表層地盤を Fig. 2 のようなものとすれば層内に発生する変形は X_I, t のみの関数と考えてよい。すなわち



(a)



(b)



(c)

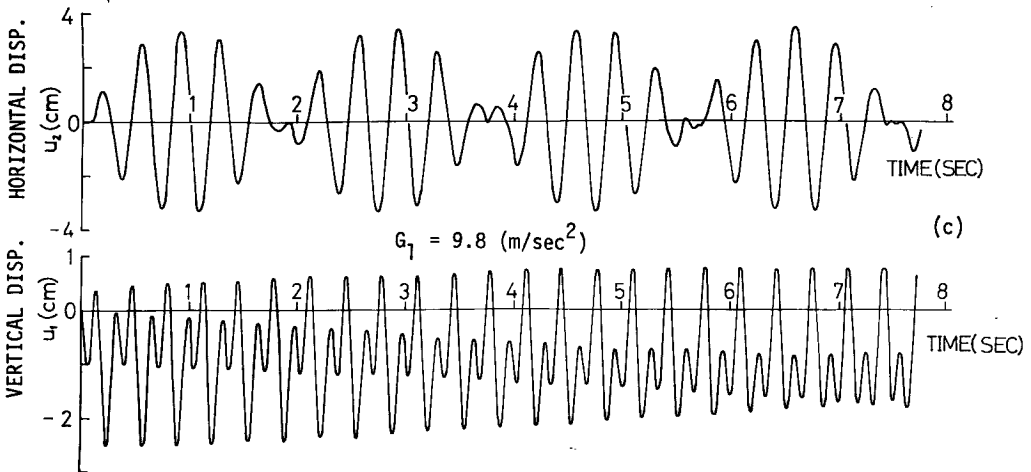


Fig. 6 Comparison of response between linear case and non-linear case.
 (Input: horizontal acc. $A_h=200\text{gal}$, Vertical Acc. $A_v=200\text{gal}$,
 $f_h=f_v=3\text{ cycle/sec}$)

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= U_1(X_1, t), \quad U_2 = U_2(X_1, t), \quad U_3 = 0 \\ V_1 &= V_1(X_1, t), \quad V_2 = V_2(X_1, t), \quad V_3 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

となる。(57) 式を (12) 式に代入し次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} E_{11}^{(1)} &= U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2, \quad E_{21}^{(1)} = \frac{1}{2} U_{2,1}, \\ E_{12}^{(1)} &= \frac{1}{2} U_{2,1}, \quad \text{他の } E_{IJ}^{(1)} = 0 \\ E_{11}^{(2)} &= V_{1,1} + \frac{1}{2} V_{1,1}^2, \quad \text{他の } E_{IJ}^{(2)} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

これから各相のひずみ不変量はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} I^{(1)} &= U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2, \quad II^{(1)} = -\frac{1}{4} U_{2,1}^2, \quad III^{(1)} = 0 \\ I^{(2)} &= V_{1,1} + \frac{1}{2} V_{1,1}^2, \quad II^{(2)} = 0, \quad III^{(2)} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (59)$$

(59) 式を (40) 式に代入し Piola-Kirchhoff の応力テンソル成分を計算すれば次式のようにになる。

$$\begin{aligned} L_{11}^{(1)} &= \frac{\partial W}{\partial U_{1,1}} = p_E^0(1+U_{1,1}) + (\lambda+2\mu) \left\{ U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2 \right\} (1+U_{1,1}) \\ &\quad + 3l \left\{ U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2 \right\}^2 (1+U_{1,1}) - \frac{1}{4} m U_{2,1}^2 (1+U_{1,1}) \\ &\quad + R \left\{ V_{1,1} + \frac{1}{2} V_{1,1}^2 \right\} (1+U_{1,1}) \\ &\quad + 2f_2 \left\{ V_{1,1} + \frac{1}{2} V_{1,1}^2 \right\} \left\{ U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2 \right\} (1+U_{1,1}) \\ &\quad + f_3 \left\{ V_{1,1} + \frac{1}{2} V_{1,1}^2 \right\}^2 (1+U_{1,1}) \dots\dots\dots (60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{11}^{(2)} &= \frac{\partial W}{\partial V_{1,1}} = p_f^0(1+V_{1,1}) + Q \left\{ V_{1,1} + \frac{1}{2} V_{1,1}^2 \right\} (1+V_{1,1}) \\ &\quad + R \left\{ U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2 \right\} (1+V_{1,1}) + 3L \left\{ V_{1,1} + \frac{1}{2} V_{1,1}^2 \right\}^2 (1+V_{1,1}) \\ &\quad - \frac{1}{4} f_1 U_{2,1}^2 (1+V_{1,1}) + f_2 \left\{ U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2 \right\}^2 (1+V_{1,1}) \\ &\quad + 2f_3 \left\{ U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2 \right\} \left\{ V_{1,1} + \frac{1}{2} V_{1,1}^2 \right\} (1+V_{1,1}) \dots\dots\dots (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{21}^{(1)} &= \frac{\partial W}{\partial U_{2,1}} = p_E^0 U_{2,1} + \mu U_{2,1} + (\lambda+2\mu) \left\{ U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2 \right\} U_{2,1} \\ &\quad + 3l \left\{ U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2 \right\}^2 U_{2,1} - \frac{1}{2} m \left\{ U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + U_{2,1}^2 \right\} U_{2,1} \\ &\quad + \left(R - \frac{1}{2} f_1 \right) \left\{ V_{1,1} + \frac{1}{2} V_{1,1}^2 \right\} U_{2,1} \\ &\quad + 2f_2 \left\{ V_{1,1} + \frac{1}{2} V_{1,1}^2 \right\} \left\{ U_{1,1} + \frac{1}{2} U_{1,1}^2 + \frac{1}{2} U_{2,1}^2 \right\} U_{2,1} \\ &\quad + f_3 \left\{ V_{1,1} + \frac{1}{2} V_{1,1}^2 \right\}^2 U_{2,1} \dots\dots\dots (62) \end{aligned}$$

$$L_{21}^{(2)} = \frac{\partial W}{\partial V_{2,1}} = 0 \dots\dots\dots (63)$$

ここに, $L_{11}^{(1)}, L_{21}^{(1)}$ は弾性相に対する, $L_{11}^{(2)}, L_{21}^{(2)}$ は液体相に対する Piola-Kirchhoff の応力テンソル成分を表わしている。ひずみがゼロの時に層内に発生している応力ならびに間げき水圧がゼロであるとすれば次式をうる。

$$p_E^0=0, \quad p_f^0=0 \quad \dots\dots\dots (64)$$

(60), (61), (62), (63) 式を (33) 式に代入して整理すると飽和した多孔質弾性層の運動方程式として次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c_{p1}^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \frac{1}{c_{p2}^2} \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} + B_p \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{\partial V_1}{\partial t} \right) + \rho_0^{(1)} G_1^{(1)} &= U_{1,11} + \frac{1}{\lambda+2\mu} L_{V1} \\ \frac{1}{c_{s1}^2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \frac{1}{c_{s2}^2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} + B_s \left(\frac{\partial U_2}{\partial t} - \frac{\partial V_2}{\partial t} \right) + \rho_0^{(1)} G_2^{(1)} &= U_{2,11} + \frac{1}{\mu} L_{U2} \\ \frac{1}{v_{p2}^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \frac{1}{v_{p1}^2} \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} - B_f \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{\partial V_1}{\partial t} \right) + \rho_0^{(2)} G_1^{(2)} &= V_{1,11} + \frac{1}{Q} L_{V1} \\ \frac{1}{v_{p2}^2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \frac{1}{v_{p1}^2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} - B_f \left(\frac{\partial U_2}{\partial t} - \frac{\partial V_2}{\partial t} \right) + \rho_0^{(2)} G_2^{(2)} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (65)$$

ここに, $c_{p1}^2=(\lambda+2\mu)/\rho_{11}$, $c_{p2}^2=(\lambda+2\mu)/\rho_{12}$, $c_{s1}^2=\mu/\rho_{11}$, $c_{s2}^2=\mu/\rho_{12}$, $v_{p2}^2=Q/\rho_{12}$, $v_{p1}^2=Q/\rho_{22}$, $B_p=b/(\lambda+2\mu)$, $B_s=b/\mu$, $B_f=b/Q$ である。

(65) 式は 4 元連立 2 階の偏微分方程式であるが, 最下の式から U_2 と V_2 の関係式が求まるから, これを上から 2 番目の式に代入することにより, 3 元連立 2 階偏微分方程式になおすことが可能である。したがって境界条件は 6 個で十分となる。 L_{V1}, L_{U2}, L_{V1} などは $L_{11,1}^{(1)}, L_{21,1}^{(1)}, L_{11,1}^{(2)}$ などを計算したときの非線形部分を表わすもので次式で示される。

$$\begin{aligned} L_{V1} &= (\lambda+2\mu)(U_{1,1}U_{1,11} + U_{2,1}U_{2,11}) + (\lambda+2\mu)U_{1,11}UD1 \\ &\quad + (\lambda+2\mu)U_{1,1}UD2 + 6UD1UD2(1+U_{1,1}) + 3lU_{1,11}UD1^2 \\ &\quad - \frac{m}{2}U_{2,1}U_{2,11}(1+U_{1,1}) - \frac{m}{4}U_{1,11}U_{2,1}^2 + RU_{1,11}VD1 + RVD2(1+U_{1,1}) \\ &\quad + 2f_2VD2UD1(1+U_{1,1}) + 2f_2VD1UD2(1+U_{1,1}) + 2f_2VD1UD1U_{1,11} \\ &\quad + 2f_3VD1VD2(1+U_{1,1}) + f_3VD1^2U_{1,11} \\ L_{U2} &= (\lambda+2\mu)U_{2,11}UD1 + (\lambda+2\mu)U_{2,1}UD2 + 6lUD1UD2U_{2,1} + 3lU_{2,11}UD1^2 \\ &\quad - \frac{m}{2}U_{2,11}UD1 - \frac{m}{2}U_{2,1}UD2 - \frac{3}{4}mU_{2,1}^2U_{2,11} + \left(R - \frac{f_1}{2}\right)VD1U_{2,11} \\ &\quad + \left(R - \frac{f_1}{2}\right)VD2U_{2,1} + 2f_2VD2UD1U_{2,1} + 2f_2VD1UD2U_{2,1} \\ &\quad + 2f_2VD1UD1U_{2,11} + 2f_3UD2VD1(1+V_{1,1}) + 2f_3UD1VD2(1+V_{1,1}) \\ &\quad + 2f_3UD1VD1V_{1,11} \\ L_{V1} &= QV_{1,1}V_{1,11} + QV_{1,11}VD1 + QV_{1,1}VD2 + 6LVD1VD2(1+V_{1,1}) \\ &\quad + 3LV_{1,11}VD1^2 + RV_{1,11}UD1 + R(1+V_{1,1})UD2 - \frac{f_1}{4}V_{1,11}U_{2,1}^2 \\ &\quad - \frac{f_1}{2}(1+V_{1,1})U_{2,1}U_{2,11} + f_2V_{1,11}UD1^2 + 2f_2(1+V_{1,1})UD1UD2 \\ &\quad + 2f_3V_{1,11}UD1VD1 + 2f_3(1+V_{1,1})UD2VD1 + 2f_3(1+V_{1,1})UD1VD2 \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned} UD1 &= U_{1,1} + \frac{1}{2}U_{1,1}^2 + \frac{1}{2}U_{2,1}^2, \quad UD2 = U_{1,11} + U_{1,1}U_{1,11} + U_{2,1}U_{2,11} \\ VD1 &= V_{1,1} + \frac{1}{2}V_{1,1}^2, \quad VD2 = V_{1,11} + V_{1,1}V_{1,11} \end{aligned}$$

である。

微小変形問題を考える場合にはひずみの 2 次以上の項を省略するから, (65) 式で

$$L_{U_1} \cong 0, \quad L_{U_2} \cong 0, \quad L_{V_1} \cong 0$$

とすればよい。こうして得られる運動方程式は Biot⁽¹⁶⁾ のものと一致する。この場合, 弾性骨格の孔隙が小さくなりかつその連続性がなくなった極限を考えれば, 弾性骨格と流体の間に相対的な変位はほとんどなくなり

$$U_2 = V_2 \dots\dots\dots (66)$$

と表わすことが可能であろう。上式を (65) 式の最下式に代入すれば次式をうる。

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} = - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} \right) \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \dots\dots\dots (67)$$

いま初期条件として $t=0$ で $V_2=0, \partial V_2/\partial t=0$ を考えれば

$$V_2 = - \left(\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} \right) U_2 \dots\dots\dots (68)$$

となる。(66) 式と (68) 式より次式をうる。

$$\rho_{12} = -\rho_{22} \dots\dots\dots (69)$$

上式と (30) 式の関係を用いて $\rho_0^{(2)}=0$ となる。(69) 式を (65) 式の第 2 式に代入し $V_2=U_2, L_{U_2} \cong 0$ を考慮すれば

$$(\rho_{11} + \rho_{12}) \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = \mu U_{2,11} \dots\dots\dots (70)$$

をうる。ここに $\rho_0^{(1)} = \rho_{11} + \rho_{12}$ 。すなわち, 孔隙の小さい線形多孔質弾性体では弾性相内に含まれる水の存在をまったく無視してそのせん断変形応答を求めてよいことになる。

境界条件

(i) $X_1=0$ で弾性相と流体相の鉛直変位は基盤層の変位に等しく, 水平変位は弾性骨格のみに与えられるものとする次式をうる (Fig. 2 参照)。

$$X_1=0: \quad U_1 = g_1(t), \quad V_1 = g_1(t), \quad U_2 = g_2(t) \dots\dots\dots (71)$$

(ii) $X_1=H$ で弾性相と流体相に発生する応力はゼロとなる。すなわち

$$L_{11}^{(1)}=0, \quad L_{21}^{(1)}=0, \quad L_{11}^{(2)}=0 \dots\dots\dots (72)$$

(60), (61), (62), (63) 式と (64) 式を考慮して, (72) 式は次式のように書き改められる。

$$X_1=H: \quad U_{1,1}=0, \quad U_{2,1}=0, \quad V_{1,1}=0 \dots\dots\dots (73)$$

(73) 式は地表面での境界条件が線形になることを示しており, (65) 式の解を求める場合その取り扱いが簡単になる。方程式は非線形 2 階の 4 元連立 (実際は 3 元連立) 偏微分方程式であるから解析的解を求めることはかなり困難である。したがって, 階差法でその数値解を求めることにする。数値計算を行なうには $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}, \lambda, \mu, l, m, n, Q, R, f_1, f_2, f_3$ の各値を決めなければならないが, そのような値を決める基準になるものが見当たらない。ここでは λ, μ は 4.1 で用いたと同じく $\lambda=800$ (kg/cm²), $\mu=200$ (kg/cm²) とし, Q は 15°C の水の体積弾性率 2.136×10^9 (kg/cm²) を用い, 他の変数はすべて同一の値を取ると考えて計算を行なった。今後これを未知係数 ($=l=m=R=f_1=f_2=f_3$) と呼ぶことにする。ただし ρ_{11} は弾性相の単位質量を, ρ_{22} は流体相の単位質量をとし, $\rho_{12}=0$ と考えた。入力力は鉛直下方から表層へ一様へ入る正弦的な SH 波, SV 波あるいは P 波とし, 入力強度は水平方向 200 gal, 鉛直方向 100 gal とした。なお入力周波数は水平方向 2.5 Hz, 鉛直方向 6.5 Hz とした。ダルシー形減衰を表わす係数 b については (24) 式で与えられる b_0 をその近似値として用いた。その時の間げき率は 0.4, 透水係数は 0.05 (cm/sec) を用いた。

Fig. 7 は地表面での弾性相の水平ならびに鉛直, 流体相の水平ならびに鉛直変位を水平入力の場合のみについて表わしている。いずれの応答も計算時間の関係で定常的応答を示すまでに至っていないが以下のような傾向が明らかに出ている, ただし未知係数の値は 100 (kg/cm²) にとつてある。同図 (a) は弾性相の水平変位, (b) は流体相の水平変位を表わしている。両者を比べるとその応答はほとんど一致している。透水

係数が 0.05 (cm/sec) と言うのはかなり粒径の大きな砂の場合に相当するが、このような場合でも固体相と流体相の水平変位間には相対的な変位が起らないことを示している。(d) は流体相の地表面での鉛直変位を示している。流体相の変形は負の側だけに起りその周波数成分は水平方向の変形 V_s, U_s などの約 2 倍のものが卓越していることがわかる。**Fig. 8** は水平入力の場合の表層地盤底面での間げき水圧応答を示して

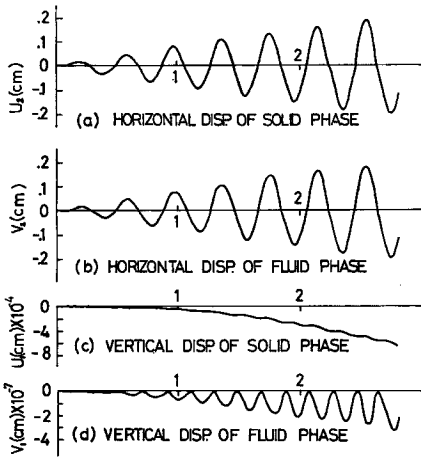


Fig. 7 Response of displacement at ground surface. (Input: horizontal acc. $A_h=200$ gal, $f_h=2.5$ cycle/sec)

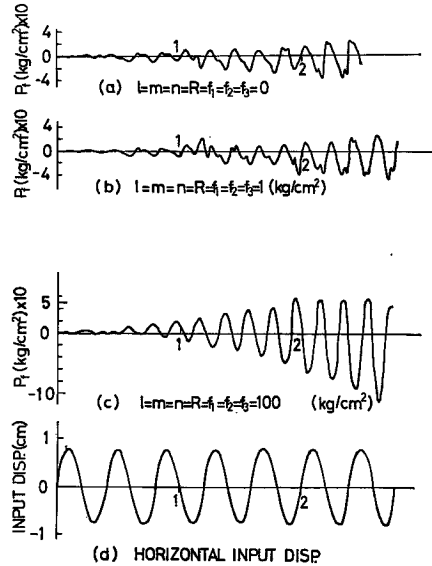


Fig. 8 Response of pore pressure at the boundary of base. (Input: horizontal acc. $A_h=200$ gal, $f_h=2.5$ cycle/sec)

いる。(a) は未知係数をゼロとした場合、(b) は 1 (kg/cm²)、(c) は 100 (kg/cm²) の値を取った場合の応答である。いずれの場合も時間がたつとその応答が負の側にかたよってくるのがわかる。これは **Fig. 7 (d)** の応答が時間の経過とともに負の値をもつて大きくなることに関係している。なお間げき水圧の応答は入力周期の約半分のものゝ卓越する。その大きさは、未知係数が 100 (kg/cm²) 程度ではあまり大きくないが、未知係数を 500 (kg/cm²) にすると解の安定性がなくなるなどから考えて、非線形項 (特に弾性相と流

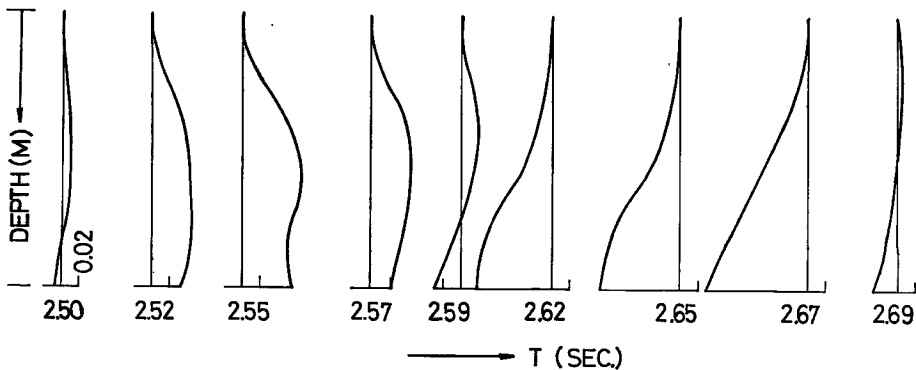


Fig. 9 Time history of distribution of pore pressure.

体相のひずみの coupling を表わす項) が大きくなると発生する間げき水圧の応答はかなり大きくなると考えられる。Fig. 9 は未知係数が $100 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$ のときの深さ方向の間げき水分布圧の形状を示したものである。これから無限に広がる表層地盤内に発生する間げき水圧は地表面でゼロになり、最大値は地盤の底面で発生することなどがわかる。Fig. 10 は水平入力と鉛直入力と同時にいる場合の地盤底面での間げき水圧の

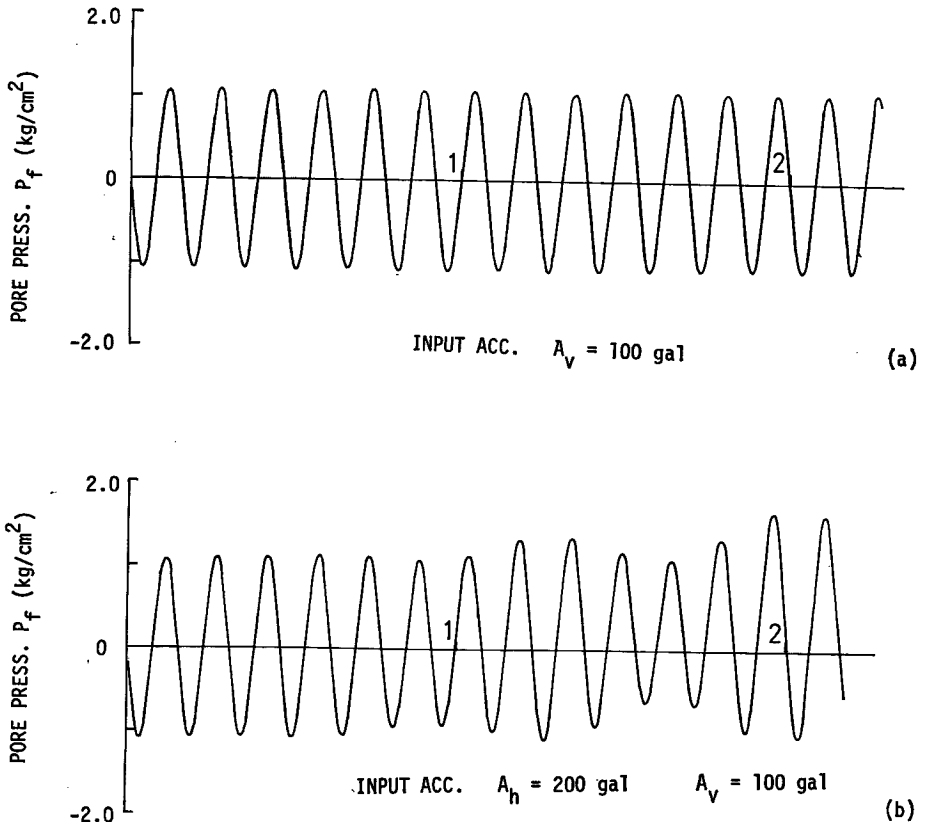


Fig. 10 Response of pore pressure at the boundary of base.
 (Input: horizontal acc. $A_h = 200 \text{ gal}$, vertical acc. $A_v = 100 \text{ gal}$, $f_h = 2.5 \text{ cycle/sec}$, $f_v = 6.5 \text{ cycle/sec}$)

大きさを未知係数が $100 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$ について示したものである。(a) は水平入力のない場合、(b) は水平と鉛直入力が入った場合である。これから鉛直方向の変位入力が地表層内に発生する間げき水圧におよぼす影響はかなり大きいことがわかる。したがって表層地盤内に発生する間げき水圧を問題にする場合には、層に入射する地震波の特性 (水平成分と鉛直成分の割合など) について十分な考慮が必要になると考えられる。なおここで誘導した式を用いて実際の地盤に発生する間げき水圧の推定を行なうには、未知係数の実験的な考察が必要になるが、それは今後研究されるべき課題であろう。

5. 結 言

本研究は多相混合体の理論を土のような物質の振動問題へ適用しようとする試みの一つとして地盤の振動現象を主体として多相混合体の力学性状について言及したものである。本研究で行なったことならびに得られた成果をまとめるとつぎのようになる。

まず、多相混合体の場の方程式を基準座標系で求めるため、ラグランジェの運動方程式の連続体における表示法について若干の考察を加え、非線形弾性相と流体相からなる二相系の運動方程式を基準座標系で表示した。なお有限変形時のダルシー形減衰についても検討を加えた後、ひずみエネルギーをひずみ不変量によりテラ展開することにより、非線形多孔質弾性体の近似表示式を求め、非線形性を考慮することによりダイラタンシー現象を動的問題に組み入れられることを示した。

これらの場の方程式と構成方程式を用いて地表層の振動解析を行なった。初めに非線形弾性体からなる地表層の振動応答について計算し、層に入射する波が SH 波のみの場合でも表層内に鉛直方向の変位が発生すること、その卓越周期は入力周期のおよそ半分のものになることなどを示し、非線形性が大きくなると鉛直方向の変位応答は急激に大きくなることなどを明らかにした。つぎに水で飽和された多孔質弾性体からなる地表層の振動性状について考察した。弾性相と流体相のひずみの coupling により、SH 波のみの入力の場合でも流体相に間げき水圧の発生すること、間げき水圧の応答を問題にする場合には層に入射する波の特性が大きな影響をおよぼすことなどを明らかにした。

以上は非線形多孔質弾性層の振動性状について研究を行なったものであるが、この理論をもっと一般的なものにするには、熱力学的変量を考慮した運動方程式を求めなければならないし、ダルシー形減衰を表わす dissipation 関数が各相の相対速度の 2 次形式のみで表示できるものかどうかと言う検討も必要になる。ここでの解析手法を実地盤に適用するためには、実地盤における未知係数の値についての実験的研究がなされなければならない。また、得られた方程式系は非線形連立偏微分方程式になるが、その解の有界性ならびに唯一性についてはほとんど明らかになっていない。実際問題へ適用されるような領域すべてについての解を求めるためには、今後、非線形偏微分方程式（特に準線形双曲形偏微分方程式）についての研究が詳しくなされねばならないであろう。

最後に本研究での数値計算はすべて京都大学大型計算機 FACOM-230-60 によったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Adkins, J.E. and A. J. M. Spencer: Non-linear Mechanics of Continua, Pergamon Press, 1960.
- 2) Truesdell, C. and R. A. Toupin: The Classical Field Theories, Handbuch der Physik, Bd. III/1, 1960.
- 3) Green, A.E. and P.M. Naghdi: A Dynamical Theory of Interacting Continua, Int. J. Engng. Sci., Vol. 3, 1965. pp. 231-241.
- 4) Noll, W.: A Mathematical Theory of the Mechanical Behaviour of Continuous Media, Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 2, No. 3, 1958. pp. 197-226.
- 5) Biot, M.A.: Theory of Deformation of a Porous Viscoelastic Anisotropic Solid, J. App. phys., Vol. 27, No. 5, 1956, pp. 459-467.
- 6) 石原藤次郎・尾島 勝：振動時の間げき水圧に関する基礎的研究，京都大学防災研究所年報，第12号 B, 昭 43. 3, pp. 97-115.
- 7) Eringen, A. C.: Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill 1962, p. 44.
- 8) Taylor, P. W.: Foundation of Soil Mechanics, John Wiley and Sons, New York, 1948.
- 9) 黒田勝彦・高田邦彦：振動を受ける飽和砂の透水性（その 1），土と基礎，Vol. 17, No. 8, 昭 44, pp. 23-29.
- 10) 金井 清：地震工学，共立出版，4 章，昭 45.
- 11) 竹中準之介：基礎地盤の動的性質（砂レキ及び粘土の静的，動的に関する実験），第 9 回セミナー

- (土質工学会) パンフレット, 11, 昭 45.
- 12) 柴田 徹, 石黒良夫: 土中を伝播する横波の異方向性, 昭和 45 年度京都大学防災研究所発表会, 昭 46.
 - 13) Idriss, I. M. and H. B. Seed: Response of Horizontal Soil Layer Analysis during Earthquake, Proc. A. S. C. E., SM 4, 1968, pp. 1003-1031.
 - 14) 小堀鐸二・瀬戸川 葆: Numerical Analysis on Foundation Vibration by Finite Element Technique, Proc. 3rd Jap. Earth. Eng. Symp., 1970, pp. 501-508.
 - 15) 柴田 徹・佐藤忠信・三浦 克: 砂質土の構成式に関する考察—非線形弾性論の立場から—第 26 回土質工学研究発表会, 昭 46.
 - 16) Biot, M. A.: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid, I. Low-Frequency Range, J. Acous. Sci. America, Vol. 28, No. 2, 1956, pp. 168-178.