

河川の乱流構造に関する一考察

石原安雄・余越正一郎

ON THE STRUCTURE OF TURBULENCE IN A RIVER FLOW

By Yasuo ISHIHARA and Shōtiro YOKOSI

Synopsis

It is spectrally distinct that the structure of large-eddy motion in a river flow is described by a definite structure. The structure of the large-eddy presented by the authors is “ Ω -shaped vortex tube” identical with the horseshoe vortex introduced by Theodorsen. The river flow may be considered in three parts, a mean flow, a set of the Ω -shaped vortex tube and an ordinary turbulent motion made up of a wide and continuous range of eddy sizes. The Ω -shaped vortex tube slanting in a downstream direction and producing a jet-like motion away from a river bed, gives a negative contribution to the Reynolds stress and derives an energy directly from the mean flow to pass it on to the smaller eddies. The smaller eddies may be defined as a multiple arrangement of smaller vortex filaments which cover the surface of the Ω -shaped vortex tube. Formation of a so-called “boil” at the surface of river is well interpreted by the existence of the Ω -shaped vortex tube.

1. ま え が き

水深にくらべて河巾の著しく大きな河川流れの乱流場は、河巾を特徴的スケールとするほぼ2次元的な水平乱流場と、水深を特徴的スケールとする鉛直乱流場に分けて考えることができる¹⁾。水工学上、水平乱流場の構造を考慮しなければならないような問題はほとんどないといつてよい。一例としては、速水²⁾による大河川における洪水の変形の問題がある。しかし、鉛直乱流場は抵抗の問題や物質の輸送、拡散の問題などあらゆる水理現象に本質的に関係している。したがって鉛直乱流場の構造解明が河川水理学の進歩に寄与するところは非常に大きい。

乱流においては、速度や圧力などが非常に不規則に変動していて、これがまた乱流の本質の一つであると考えられているので、乱流の研究は理論的にも実験的にも統計的手法を駆使して行なわれるのが普通である。しかし、実際に河川で測定した流速変動の記録をながめると、長周期の変動にはかなりはっきりした周期性の存在がみつめられる。このことはそのスペクトルを計算することでさらにはっきりしてくる。また、移動床における河床の凹凸形状や、河川の水面にみられる斑紋の観察からも、これらの現象の原因となっているスケールの大きな速度変動にはかなり規則性のあることが容易に推察される。これらの事実を考えあわせると、スケールの大きな乱れはある特定の幾何学的な構造をしていて、流れの場におけるその時間的、空間的配置は一定の規則に従っているものと考えることができる。したがって、スケールの大きな乱れに限ると、その特性はかなり決定論的に議論することができるであろう。最大乱子とか large eddies, big eddies と呼ばれるものがここでいうスケールの大きな乱れに相当しているように考えられるが、その形状や機構に関してはまだ定説がない。

Townsend³⁾ は最初、風洞境界層における速度の空間相関の測定から、大きな乱れのモデルとして、壁面に接して流れ方向の軸を有する円筒を考えたが、後にさらにくわしい測定結果から、それは壁面附近から外方へ向って噴出するジェットであると結論した。これより少し以前に、Theodorsen⁴⁾ は境界層における乱れの構成要素は普遍的な形状をしていて、それは horseshoe vortex であるとした。しかし、これを実証するようなものはほとんど示されなかった。

本文は、こうした諸特性を考慮して、実験用開水路における流れの可視化実験や、従来からえられている乱流境界層の測定結果、水面における湧昇流の形状などと、流れの場における渦管の基本的性質から河川の鉛直乱流場の構造の総合的な考察を行ない、河川の鉛直乱流場の大きな乱れの基本構造としては Theodorsen の考えたような $\cap$ 形渦管 (horseshoe vortex) が最も適切であると結論するに至った経緯について述べたものである。

$\cap$ 形渦管の導入にもとづく河川の鉛直乱流場像は、平均流と、河床から立ちあがった $\cap$ 形渦管、さらにその表面に分布した高次の渦管群とから構成されており、平均流と渦管あるいは渦管どうしの相互作用の場と考えるものである。河床から立ちあがる $\cap$ 形渦管は平均流から乱れのエネルギーを引き出すとともに、レイノルズ応力を通じて平均流に寄与するが、高次の渦管群はいわゆる普通の乱流変動の原因となるもので、局所等方性条件を満足し、連続的エネルギーカスケードに寄与するものである。

2. 渦度場としての乱流場

運動方程式の curl をとってえられる、渦度 $\boldsymbol{\omega} = \text{curl } \mathbf{u}$ に関する方程式、

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad \dots\dots\dots (1)$$

の両辺に $\boldsymbol{\omega}$ を乗じて、体積要素 τ の中の全渦度の変化を示す式を作ると、

$$\frac{d}{dt} \int \frac{\boldsymbol{\omega}^2}{2} d\tau = \int \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}) d\tau, \quad \dots\dots\dots (2)$$

がえられる。ここで、 $\mathbf{u}$ は速度、 ν は粘性である。(2) 式の右辺の粘性のきく項は、平衡状態の乱流では常に負であることが証明されている⁵⁾。また残りの項は、渦管に沿って軸方向に s をとると、

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \omega^2 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_s, \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表わされる。 $(\partial u / \partial s)_s$ は渦管に沿う速度成分の勾配であるから、渦管の伸びを表わしている。

乱流においては、平均的にみると隣り合う流体粒子は時間の経過とともに離れていく傾向にあるが、このことは渦管は伸張する傾向にあることを意味している。したがって、(3) 式は渦管の伸張にもとづく渦度の増大を表わしている。渦度増大の上限は当然粘性逸散によって規制されていることからきまる。

渦管はその占める位置における速度 $\mathbf{u}$ によって移動させられるだけでなく、渦管が伸びると渦度 $\boldsymbol{\omega}$ は増大し、縮むときには逆に減少する。渦度 $\boldsymbol{\omega}$ はこのようにして速度 $\mathbf{u}$ の影響を受けて変化するが、渦管はまた逆に Biot-Savart の法則を通じて速度 $\mathbf{u}$ を変化させる。すなわち、渦度 $\boldsymbol{\omega}$ の渦管の dV 部分から距離 r の点に誘導される速度 $\delta \mathbf{u}$ は、

$$\delta \mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{\omega} dV \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \dots\dots\dots (4)$$

である。したがって渦管どうしの誘導、さらに直線以外の渦管では自分自身の他の部分との相互誘導による渦管の変形、移動を生じる。

また渦管の基本的性質として、大きな渦管では粘性の影響は無視しえるので、渦管の強さ $\Gamma = \omega \sigma$ (σ は渦管の断面積) は時間的に不変であるという Helmholtz の渦定理が近似的に成立している。さらに渦管の断面積は 0 にはならないので、渦管は流れの中で中断することはない。すなわち、渦管は流れの境界から境界まで伸びているか、あるいは自分自身で閉じて渦輪を作るかのいずれかである。

3. 河床領域における Ω 形渦管の形成

河川の河床には種々の形態の3次元的な凹凸が形成されており、そのスペクトルが巾広く存在している⁶⁾。このような凹凸の上を流れるレイノルズ数の大きな河川流れでは、流線は剥離した状態にある。剥離した高度においては平均流の強いシアが発生し、渦度の集中が生じる。これが横断方向の渦度 ω_y を有する強さ $\Gamma = \omega_y \sigma$ の渦管の発生である。この渦管はその位置の平均流によって流されるが、その際渦管は循環流を伴うので、その一部が Magnus 効果による揚力を受け河床から上に向かってわん曲する。わん曲した部分はどうでない渦管部分より大きな平均流の領域にあるので、抗力を受けて下流に向かって傾斜することになる (Fig. 1)。このようにして発生した Ω 形渦管は平均流の存在と、その鉛直速度分布のために下流に傾いてずんずん伸張するとともに、横方向にも広がるであろう。渦管は伸びることにより断面積 σ が小さくなり、それに相当して渦度 ω が増大する。

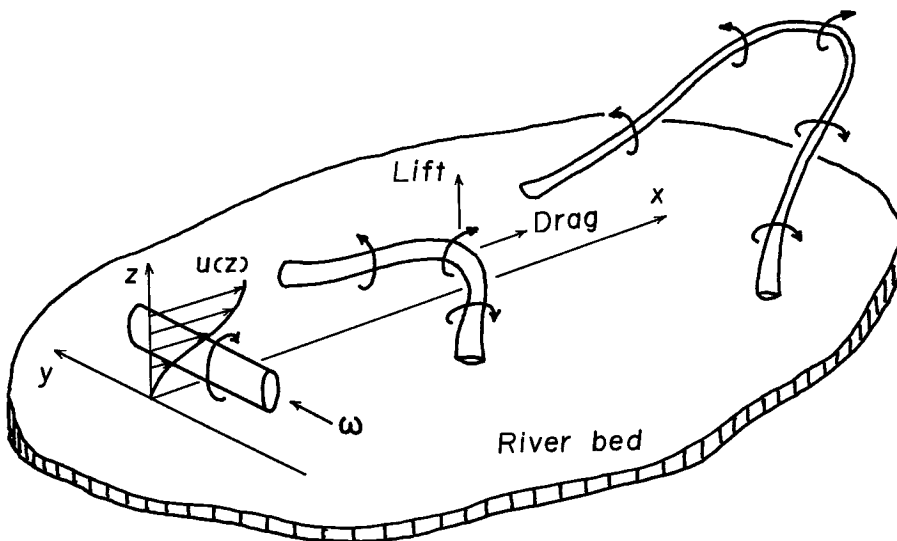


Fig. 1 Generation and stretching of the Ω -shaped vortex tube on river bed.

上にみたような渦管の発生はレイノルズ数の函数になっているのであろうが、一旦形成された渦管は特定のストローハル数で流下するものと考えられる。

なお Ω 形渦管の両脚は境界から境界へという条件により河床に接して移動しているとしているが、厳密には固定境界における速度は0であるから、この場合剥離面に接していると解釈することもできよう。

ここで考察した Ω 形渦管は河床領域に発生するものであるが、河川における乱れのエネルギーは河床領域より上の領域でも生じている。しかしその量は非常に少なく、上層でのエネルギー逸散は、河床領域で生成されたものの一部分で上層へ輸送されたエネルギーと近似的に平衡していると考えてよい⁷⁾。

4. Ω 形渦管の特性

Biot-Savart の法則に従い、強さ Γ の Ω 形渦管によって誘導される速度は、 Ω 形渦管の中央をくぐりぬけて斜め上方へ向う連続的な著しいジェットのような湧昇流を誘発するとともに、渦管自体も平均流に逆らって湧昇流の方向へ移動しようとする。すなわち Ω 形渦管は平均流にさからって起きあがろうとする。この起きあがりの大きさ及び誘導湧昇ジェットの大きさは、Biot-Savart の法則 (4) 式から明らかに Ω 形渦管の頭部において大きく、脚部において小さい。この状態を Fig. 2 に示す。

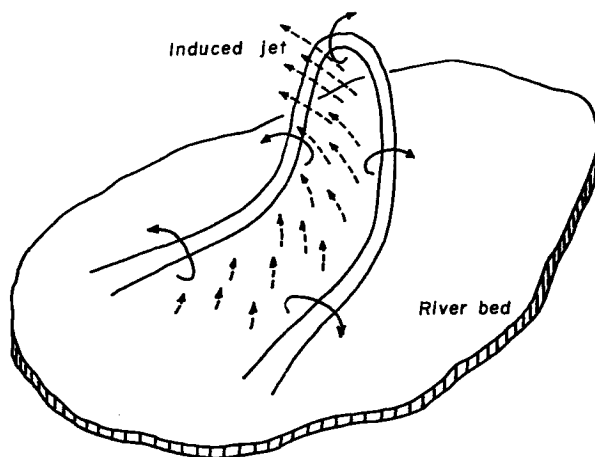


Fig. 2 N-shaped vortex tube which is slanting in a downstream direction and induces the jet-like eruption.

Townsend⁹⁾ は風洞境界層のスケールの大きな乱れの構造を、空間相関の測定から Fig. 3 のようなジェットと考えた。壁面領域と境界層外縁では少し異なるジェット構造を提案しているが、われわれは両者ともジェット領域の周囲にN形渦管の存在を仮定することによって合理的にジェットの原因を説明できると考えている。すなわち、境界層外縁のジェットは、N形渦管のうちで特に強いものが伸びて境界層外縁にまで達したものと考えるのである。

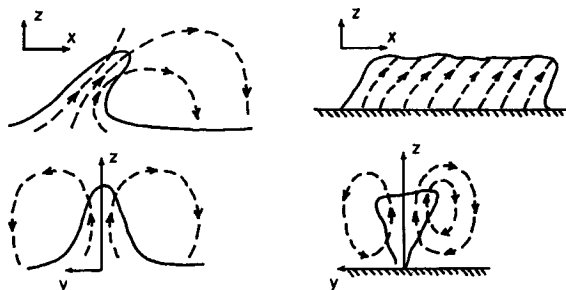


Fig. 3 Structure of jets in the outer part of boundary layer (left) and wall layer (right) after Townsend⁹⁾. The full lines represent the edge of the jet. The dashed lines are streamlines relative to the mean velocity.

N形渦管の形状をもっとくわしく調らべるためには、速度や圧力などの時空間相関の測定が必要である。このようなものとしては Favre 等の Marseille グループの風洞境界層における一連の研究が特に有名である⁹⁾。境界層の同一高度で主流方向に離れた2点における速度の時空間相関を測定すれば、乱れの移動速度が求められる。その結果はわれわれがここに提案したN形渦管の運動と同じように、平均流より遅い速度で流下していることを示している。また、同一鉛直軸上の2点での時空間相関の測定は、2点間の位相の差を与えるから、これと移動速度とから渦管の傾斜を知ることができる (Fig. 4)⁹⁾。Fig. 4 にみられるように高度が増すにつれて傾斜が急になる傾向は、われわれが考えているN形渦管の特性とよく一致している。

Marseille グループの測定は主流方向の乱れ速度の測定に限られているが、主流成分以外の速度¹⁰⁾や、速度と圧力の時空間相関の測定¹¹⁾が蓄積されると、われわれのN形渦管の構造がもっとはっきりしてくるであ

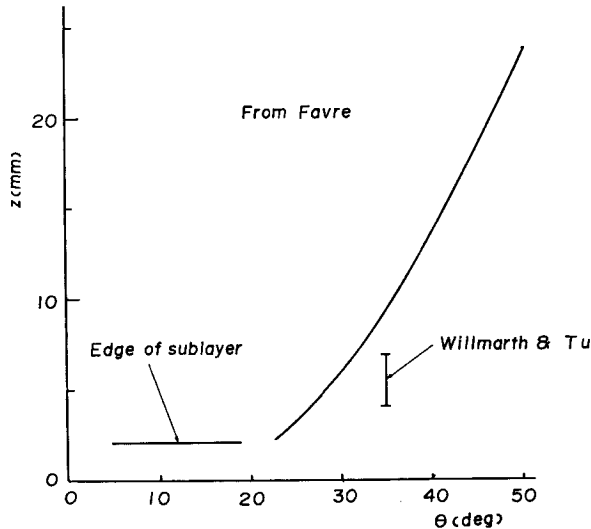


Fig. 4 Eddy inclination to the wall of the boundary layer. Sweepback increases approaching surface. Thickness of the boundary layer is 34 mm. Velocity outside the boundary layer is 12 m/sec.

ろう。これらの測定はいずれも風洞境界層におけるものであるが、最近大型開水路における同様な試みが始められたので¹²⁾、開水路乱流の構造も次第に明らかになってくるであろう。

普通の乱れ測定でえられる統計量のうちで、乱れ速度は Ω 形渦管の断面形状と傾斜角及び渦管の強さから説明が可能である。また乱れのスケールは Ω 形渦管の配列間隔で説明される。河床ではいろいろなスペクトルの Ω 形渦管が生成されるが、それらは強さに応じて上層へ伸び、特定の高度に至って、寿命時間を使い果たして Ω 形渦管としての特性を失い崩壊するものと考えられる。 Ω 形渦管の配列間隔と高度との間には一定の関係があり、われわれの測定によると流下方向に高度のほぼ10倍の間隔、横方向に約2倍の間隔で配列していることになる¹⁾。

Ω 形渦管が誘発する斜め上流向きのジェットは河床に近い低速部分を激しく上層の高速部分へ移動させ、このような大規模な運動量交換がレイノルズ応力に直接負の寄与をしていると理解される。河川における鉛直方向の土砂輸送は、このようなジェットによる空間的にかなり狭い領域の激しい上昇と、広い領域の緩な下降によって構成されているであろう。これは鉛直方向の速度変動分布に存在する歪度の特性や、実河川における観察からも十分理解できる。

以上のように、乱流場は Ω 形渦管の強さ、寸法、空間配置あるいは時間的消長によって決定される。ちなみに、Black¹³⁾は乱流境界層は層流境界層が間歇的なジェットによって変調された状態であるとして、非定常2次元層流境界層方程式を用いて、滑らかな壁面に近い領域の各種の乱れ特性を計算したが、その結果と実測値は驚くほどよく一致している。

5. Ω 形渦管といわゆるボイルについて

河川の表面にみられるいわゆるボイルは、内部からの湧昇流が水面に達したものであることは一目瞭然である。その強さ、あるいは大きさはレイノルズ数の大きな流れほど顕著なようである。Matthes が Mississippi 河下流部で観察したボイルは直径が数 10 m にも達し、そこでは大きな汽船でも傾くそうである。また直径数 m のボイルでは、その放射流れから逆算した湧昇流の速度水頭は数 cm 程度であるとしている。

われわれの考え方に従うと、ボイルは Ω 形渦管が伸張して、その頭部が水面領域にまで達したときに生ず

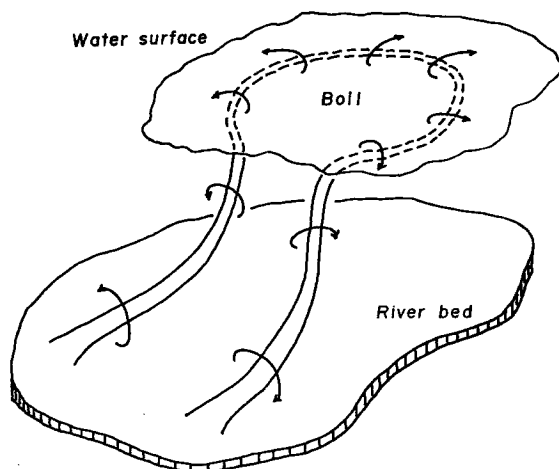


Fig. 5 “Boil” produced by the top part of the elongated N-shaped vortex tube.

るものである。N形渦管の頭部が水面領域に達すると、斜め上向き（上流向き）の誘導ジェットがまず水面を上昇させるが、水面は渦管の運動に対しては固定壁とほぼ同様な効果を与え、N形渦管の頭部は急速に放射状に広がる。すなわち、渦管の急激な伸張と、渦度の急激な増大をもたらす。この現象はN形渦管の寿命時間のあいだ継続する。このような状態のN形渦管の形状を Fig. 5 に示す。

実験水槽において渦輪を作り、水面に接近させると渦輪の直径は次第に大きくなり、接近速度は低下してくる。さらに水面に接近すると、誘導速度による水面上昇を発生させると共に渦輪の直径は急激に拡大して広い放射流れのボイル面が形成される (Fig. 6)。この過程を水面から観察したものは、河川の水面にみられるボイルの形成、発達、消滅などの過程と全く同じように思える。しかし、実河川のボイルが、N形渦管の頭部がちぎれたドーナツ形の渦輪によって保たれているのかどうかということは、まだはっきりとわからない。しかし、実験水路における可視化実験によるとその可能性は薄いようにも思える。

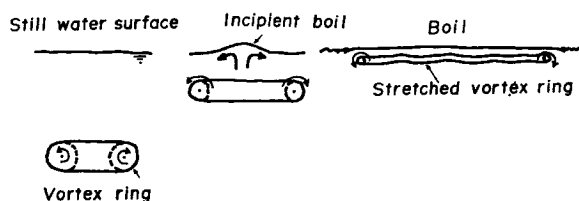


Fig. 6 Boil produced by vortex ring near the water surface.

ボイルの観察については、洪水時航空写真による木下の研究¹⁵⁾が最も詳しい。それによると、間歇的に発生する湧昇流によって水面にまいるボイル面が発達し、その上流端は一時流速が0になるほど強く拡大することもある。発達したボイル面の流下速度はその周囲の部分（沈降領域）より1～2割遅い。強い湧昇流が形成されるのは短時間らしく、流下してゆくボイル面が余勢による動きに変わると、ボイル面全体が平坦になり、やがて周辺からの新しい動きに影響されながら次第に消失してゆく。これらの記述は、われわれがここに考えているN形渦管によるボイルの発生、発達、崩壊の機構で非常によく説明できる。さらに木下は、ボイル面は流下方向に列をなして存在する傾向にあり、横方向に隣り合うボイル面の間隔は水深のほぼ2倍の値をしていることから、Fig. 7 のような2次流の存在を推定しているが、このような単純な2次流

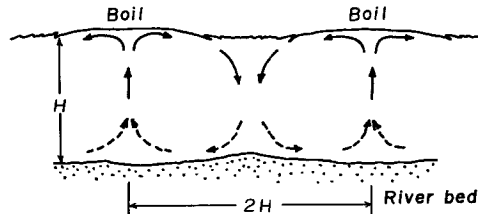


Fig. 7 Cylindrical secondary currents for the interpretation of the streets of boil after Kinoshita¹⁵⁾.

では、観察されるボイルの性状を十分説明し難いように思われる。**Fig. 7** に示された2次流による効果は Ω 形渦管ですべて説明ができる。また、河を漂流するボートが流れより速く進む現象¹⁶⁾は、平均流より遅く移動する Ω 形渦管に起因するボイルの列と、ボイル列に隣り合う平均流より速い沈降領域の列の存在で説明することもできる。

すでに説明したように、水面領域では急激な渦度の増大と渦管の伸張が生じる。したがって乱れエネルギーの粘性逸散 $\epsilon = \nu \omega^2$ は促進されるであろう。またボイルによる放射流れのために乱れ速度の水平成分の強さが、風洞境界層外縁近傍の値より大きくなるであろう。このような傾向はわれわれの測定¹⁷⁾においてもみられないことはない。河川流れの水面は応力ゼロで、水平方向の運動が制限されていない特殊な境界であるから、その乱流構造は特異なものであると思われるが、従来の測定からはまだはっきりしたことは解らない。開水路水面近傍の乱れについて考察したものは従来ほとんどないが、Ellison¹⁸⁾ は水面領域にもカルマン定数に似たものを考えて混合を取扱っている。

ボイルはその原因において、風洞境界層外縁の間歇的な乱流と非乱流境界の動きとよく似ているが、河川の水面領域の乱流特性を考える上で、河川の水面に superlayer の存在や表面張力の影響を考慮する必要はないように思える。

6. Ω 形渦管と小規模乱れ

Ω 形渦管は河床に接して流下する最大乱子に対応していると考えることができる。最大乱子以下の階級の

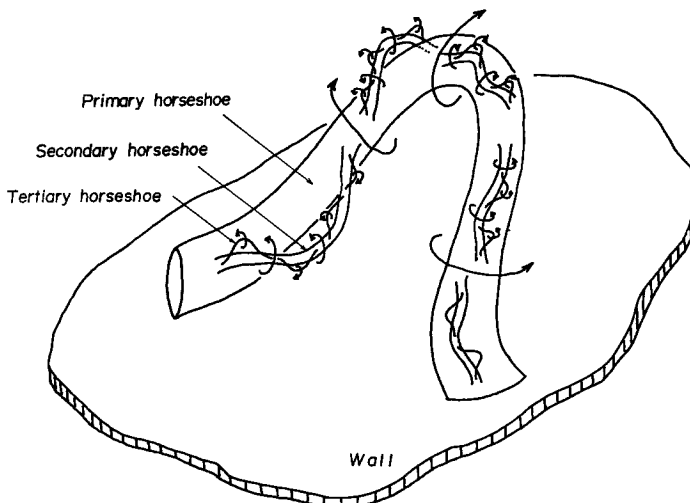


Fig. 8 Horseshoe vortex in the flow of large Reynolds number after Theodorsen⁴⁾.

乱れは河床に接するのではなく、 $\cap$ 形渦管の表面に順次重なっている渦管あるいは渦糸の集合と考えることができる。このような機構はすでに Theodorsen⁴⁾によって Fig. 8 のように示されている。このような乱流状態は、水路の中に入れた“うなぎ”(渦管)の集団の運動を連想させる。坂上¹⁰⁾も小さな渦管は細長い円筒状をしていて、Helmholtz の渦定理がよく成立しているうえに、流れに沿って前方へ傾いていることを観測している。

$\cap$ 形渦管の表面に分布する高次の渦管群は、平均流と直接に相互作用は行わず、 $\cap$ 形渦管から受取った乱れエネルギーを順次小さな渦糸へ伝達する役割を果たすだけであると考えられる。この伝達過程は粘性逸散に直接寄与するところの高渦度 $\omega = \sqrt{\varepsilon/\nu}$ (ε はエネルギー逸散率) の最小渦管に至るまで、カスケード的に行なわれる。これら渦管群の渦度分布は、多くの観測結果から、Kolmogorov の $-5/3$ 乗則に相当する渦度スペクトルの $1/3$ 乗則を満足していると考えてよいであろう。

7. $\cap$ 形渦管と河床形態

実河川における $\cap$ 形渦管の形成を考えて、3. では河床の凹凸を考えたが、一般に境界層における $\cap$ 形渦管の形成に壁面の凹凸の存在は本質的ではない。これはコンクリートでライニングされた水路流れの表面にもボイルがみられることから理解される。剝離状態にない場合でも、固定壁に近い領域では渦度が非常に大きいので、なんらかの刺激で簡単に渦管が形成されるのであろうが、凹凸の存在が渦管形成を強めることは確実である。これは粗面境界層における乱れの強さの分布から明らかである⁷⁾。

このように考えてくると、特定のレイノルズ数の流れにおいてはそのレイノルズ数に応じた $\cap$ 形渦管の特定の卓越パターンが形成され、それに応じて河床の凹凸が形成されて、両者は共鳴的に強い相互作用を行なっているのではないかと考えられる。したがって、流れのレイノルズ数が急に変化すると、そのレイノルズ数に特有の $\cap$ 形渦管と、すでにあった河床形態との間の共鳴状態がくずれるであろう。これは卓越したボイルが見える時と見えない時があることの原因の一つではないかと思う。

さらに、滑らかな壁面においても強い上向きジェットが存在することは最近になってかなりはっきりしてきた^{20), 21)}。これは境界層における乱れエネルギーの大部分は粘性底層外縁で生成されることから、壁面領域の構造を正確に理解しようとするもので、流れの可視化により壁面領域から外へ向う強いジェットがくわしく観察されている。このようなジェットは ejection, eruption, burst などの名前で呼ばれているが、それが境界層全体のエネルギーバランスの主役を演じていると考えられている。

8. む す び

最後に現在われわれの考えている河川鉛直乱流場像を記そう。i) 河川流れは3つの領域に分けられて、それは $\cap$ 形渦管の生成に寄与する河床領域、その間歇的な伸張が生じている中間領域、さらにボイル面の存在する水面領域である。ii) 乱流場は平均流、平均流から直接乱れエネルギーを引き出す決定論的性格の $\cap$ 形渦管、および統計的性格が普通にいわれている乱れの3者から構成されている。iii) $\cap$ 形渦管は下流に傾いて、平均流より少しゆるやかに流下しているが、レイノルズ応力に寄与する強力な上向き誘導ジェットをともなっている。この $\cap$ 形渦管の頭部が水面領域に達した結果が水面にみられる、いわゆるボイルである。また $\cap$ 形渦管の空間配置にはかなり強い規則性がある。

われわれが最も重点をおいてきた $\cap$ 形渦管の構造に関しては、まだ解らない点が多いが、今後構造の定式化につとめるとともに、河川における乱流測定では単純に測定結果を統計処理するのではなく、 $\cap$ 形渦管の存在を頭においてやっていきたいと考えている。

なお、本文で行なったと同様に、側壁近傍でも渦管の存在を考えると、2次流の説明も合理的にできるし²²⁾、水深にくらべて巾の狭い開水路流れにおける最大流速点降下の原因も理解できるように思われる。

参 考 文 献

- 1) Yokosi, S.: The structure of river turbulence, Bull. DPRI, **17**(2), (1967), 1.
- 2) Hayami, S.: On the propagation of flood waves, Bull. DPRI, **1**(1), (1951), 1.
- 3) Townsend, A. A.: The turbulent boundary layer, IUTAM Symposium "Grenzschichtforschung" ed. H. Görtler, Springer, (1958), 1.
- 4) Theodorsen, Th.: The structure of turbulence, 50 Jahre Grenzschichtforschung, ed. H. Görtler and W. Tollmien, Friedr. Vieweg & Sohn, (1955), 55.
- 5) Theodorsen, Th.: The structure of turbulence, Proc. Symp. Inst. for Fluid Dynamics and Appl. Math., Univ. of Maryland, (1961), 21.
- 6) Allen, J. R. L.: Current ripples, their relation to patterns of water and sediment motion, North-Holland, (1968), 433.
- 7) Hinze, J. O.: Turbulence, an introduction to its mechanism and theory, Chapt. 7, McGraw-Hill, (1959), 451.
- 8) Favre, A., Gaviglio, J. and Dumas, R.: Structure of velocity space-time correlations in a boundary layer, Phys. Fluids, Suppl. **10**, (1967), S 138.
- 9) Sternberg, J.: On the interpretation of space-time correlation measurements in shear flow, Phys. Fluids, Suppl. **10**, (1967), S 146.
- 10) Tritton, D. J.: Some new correlation measurements in a turbulent boundary layer, J. Fluid Mech. **28**, (1967), 439.
- 11) Willmarth, W. W. and Tu, B. J.: Structure of turbulence in the boundary layer near the wall, Phys. Fluids, Suppl. **10**, (1967), S 134.
- 12) 今本博健, 上野鉄男: 開水路流れにおける乱れの空間相関特性について, 京大防災研年報, **13B**, (昭45.3).
- 13) Black, T. J.: Some practical applications of a new theory of wall turbulence, Proc. 1966 Heat Transfer and Fluid Mech. Inst., Stanford Univ., (1966), 366.
- 14) Matthes, G. H.: Macroturbulence in natural stream flow, Trans. AGU, **28**(2), (1947), 255.
- 15) 木下良作: 航空写真による洪水流の解析, その乱流構造と表面の流れかたの特性について, 写真測量, **6**(1), (1967), 1.
- 16) Francis, J. R. D.: The speed of drifting bodies in a stream, J. Fluid Mech., **1**, (1956), 517.
- 17) 石原安雄, 余越正一郎, 上野鉄男: 河川におけるレイノルズ応力の分布について, 京大防災研年報, **12B**, (昭44.3), 503.
- 18) Ellison, T. H.: A note on the velocity profile and longitudinal mixing in a broad open channel, J. Fluid Mech., **8**, (1960), 33.
- 19) Sakagami, J.: On the structure of the atmospheric turbulence near the ground, III, Natural Sci. Rep., Ochanomizu Univ., **4**(2), (1953), 201.
- 20) Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A. and Runstadler, P. W.: The structure of turbulent boundary layers, J. Fluid Mech., **30**, (1967), 741.
- 21) Corino, E. R. and Brodkey, R. S.: A visual investigation of the wall region in turbulent flow, J. Fluid Mech., **37**, (1969), 1.
- 22) Einstein, H. A. and Shen, H. W.: A study on meandering in straight alluvial channels, J. Geophys. Res., **69**, (1964), 5239.