

浮流砂による河床変動について

芦 田 和 男

STUDY ON THE SUSPENDED SEDIMENT TRANSPORTATION UNDER NON-EQUILIBRIUM CONDITION

By Kazuo ASHIDA

Synopsis

In this paper, the author discussed the river bed variation due to the suspended sediment which occurs under non-equilibrium condition.

A rate of the river bed variation per unit area is considered to be $w_0|C - C_s|$ in which w_0 , fall velocity of the suspended particle, C , actual concentration near the bed and C_s is the concentration under the equilibrium condition which may be expressed as a function of w_0 and u_* (shear velocity).

The author obtained an equation calculating the variation of the sediment concentration with relation to distance under the non-equilibrium condition, by assuming the diffusion coefficient constant in a section and using the vertical distribution of the sediment concentration in equilibrium state for the first approximation.

In the case of the transition from one equilibrium state (shear velocity u_{*0}) to another state (u_*), the variation of the concentration is calculated from the parameters w_0/u_{*0} and u_{*0}/u_* . The diagrams for the calculation are prepared in this paper. The above procedure was applied to the experiment of the sedimentation in a reservoir in which case the suspended sediment has a grain-size distribution, by dividing the grain-size for some grades. The variation of the concentration near the bed obtained by the calculation showed fairly good agreement with the observed one.

1. 緒 言

貯水池の堆砂、河道幅の広い部分や渓渕個所などに見られる洪水による多量の土砂堆積には、浮流砂によるものが相当部分を占めているのが常である。そこで、こうした問題を考える場合には、浮流砂による河床変動することが必要になってくる。これは、浮流砂濃度が距離的に変化するいわば非平衡状態であり、濃度ばかりでなく、その分布形や粒度分布も距離的に変化する問題である。とくに、粒度分布の距離的变化は、この現象に本質的なものであって、これを無視することはできない。例えば、ある粒度構成を持った浮流砂が貯水池に流入する場合を考えよう。そこでは粗な粒子から先に堆積して行き、浮流砂の粒度分布も堆積砂のそれも下流へ行くほど次第に細かくなる。このことはしばしば経験する所である。こうした問題を例えれば貯水池へ流入する浮流砂の50%粒径で論議すると、現象とかなり異なった解しか得られないであろう。これは、堆砂現象が外力（摩擦速度）の変化に対応する濃度の応答過程として生ずるものであり、この応答過程が粒径により異なるためによるものである。

一方、浮流砂の運動や浮流砂流の特性に関しては、最近かなり研究されているが、平衡状態においてすら、底面付近の濃度や浮流砂量に関する適確な算定式が確立されていないのが現状である。このような状況から、著者は非平衡の問題に対して実際上有効な解を導くことは詫めざるをえないと考えていた。そこで先年、浮流砂による貯水池の堆砂に関する研究を行なった時にも、底面付近の濃度の変化に対して実験式を与えて堆砂形状を解析したのみで、それ以上の考察はしなかった。しかしこのような方法は一般的な適用性を持たないことはいうまでもない。

その後、著者は道上と共同で浮流砂に関する研究を進めており、底面付近の濃度を表示する式を河床面が比較的平滑で、かつ河床砂のしゃへい効果が無視しうる状態に対して求めた¹⁾。こうした結果を参考にすれば、非平衡状態における濃度およびその分布形の変化の概略の様子を計算しうるのではないかと考えて本研究に着手した。

得られた結果は、本文に示すように多くの仮定や近似的な取り扱いにもとづいたものであるが、その適用性が問題である。しかし、上述の貯水池の堆砂の実験に適用した結果、十分実用性を持つものであることが知られた。

すなわち、貯水池へ流入する土砂量を数個の粒径範囲に区分して考え、各粒径別に濃度の距離的変化を計算して、これを重ね合せて、各地点における濃度および粒度分布を求めた結果、実測値と比較的よい一致がえられた。

用いている仮定や近似については、さらに検討すべき所も少くないが、いたずらに複雑になると、解の実用性を失ない、簡単化しすぎると現象の本質を見失うので、この両面から、実験、実測にもとづいて検討すべきであろう。本論では実験的検証が必ずしも十分ではないので、さらに多くの実験、実測にもとづいて、本論の取り扱いを検討改良して行くべきである。

2. 浮流砂による河床変動の基礎式

浮流砂の濃度分布式は、

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial \left(\epsilon_x \frac{\partial c}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\epsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} \right)}{\partial z} + w_0 \frac{\partial c}{\partial z} \dots \dots \dots (1)$$

で与えられる。一般には、上式を初期条件および境界条件を与えて解けばよい。しかし、

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial c}{\partial x} &\gg v \frac{\partial c}{\partial y}, \quad w \frac{\partial c}{\partial z} \\ \frac{\partial \left(\varepsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} \right)}{\partial z} &\gg \frac{\partial \left(\varepsilon_x \frac{\partial c}{\partial x} \right)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \left(\varepsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} \right)}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \quad (2)$$

の条件を満足する場合が多いので、このことを考慮してかつ、定常状態を考えて、基礎式を、

として議論を進める。(3)式は、 u , ϵ を一定として、Kalinske²⁾ や合田³⁾によって解かれている。しかし底面濃を与える条件が明確ではない。河床変動は底面付近の条件により定まるので、本論ではこの点に重点をおいて考察を進める。 w_0 を一定として、(3)式を z に関して積分すれば、

$|\varepsilon \partial c / \partial z|_{z=0}$ は河床の単位面積から単位時間に浮上する割合で、沈降速度 w_0 と河床面における鉛直方向の乱れの強さ $\sqrt{w'^2}$ によって支配されると考えられる。 $\sqrt{w'^2} \propto u_*$ の関係から $|\varepsilon \partial c / \partial z|_{z=0}$ は結局 w_0 と u_* の関数となる。 $w_0 c_0$ は河床に沈降する割合で、この値が $|\varepsilon \partial c / \partial z|_{z=0}$ と等しい時には平衡状態になり、 $|\varepsilon \partial c / \partial z|_{z=0}$ より小さいときには洗掘、大きいときには堆積を生じる。浮上するものと沈降するものと

の差として河床変動を考え、浮上するものをその地点の平衡状態に対する濃度から算定しようとする考え方には土屋・星畠⁴⁾によても取られているが、これは妥当な考え方であろう。

芦田・道上¹⁾は平衡状態における河床付近の濃度 c_s は w_0/u_* の関数であることを導いた。これを用いると、

したがって、(4) 式は、

となる。浮流砂による河床変動は次式で与えられる。

境界条件と水理条件として、 $\epsilon(x, z)$, $u(x, z)$, w_0 , $c_s(w_0/u_*)$, $c(0, z)$ が与えられると、(6) 式を用いて $c(x, z)$ が算定でき、したがって (7) 式により河床変動量が計算される。

3. 基礎式の近似解

比較的単純な条件のもとで基礎式(6)式の近似解を求めておくことは浮流砂による河床変動現象を理解する上に非常に参考になるので以下若干考察を進めよう。

Fig. 1 に示すように $x=0$ で u_{*0} から u_* に急変する場合を取り扱う。 u_{*0} に対する平衡状態の濃度から u_* に対するそれへの変化の様子を解析することである。拡散係数としてはそれぞれの断面の平均値を用い、これを ε_0 , ε とする。(6) 式の $w_0(c_0 - c_s)$ は x の関数であるので、これを $a(x)$ の記号で表示しておく。

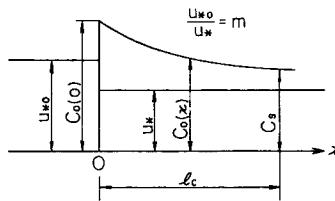


Fig. 1 Schematic sketch of longitudinal variation of the sediment concentration near a bed.

$z=h$ で $\varepsilon \partial c / \partial z + w_0 c = 0$ であるので、(6) 式より

(8), および (9) 式を (6) 式に代入して,

(10) 式の右辺の $\int u(\partial c / \partial x) dz$ の値は (10) 式を解いて始めて知り得るものであるが、それに対して次のような第1近似値を与えて、 $c(x, z)$ の第2近似値を求める。 ϵ は断面内一定としているから (3) 式は、

$\varepsilon = \varepsilon_0$ に対しては平衡状態の分布形を持っているから、

ϵ と ϵ_0 との差により $u(\partial c / \partial x)$ を生ずるが、 ϵ の ϵ_0 からの変化がわずかであるとして分布形の第1近似値が (11) 式で与えられるものとして、これを (3)' の右辺に代入して $u(\partial c / \partial x)$ を求め、これを (10) 式に代入することにより次式が得られる。

$$\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{w_0}{\varepsilon} c = \frac{a(x)}{\varepsilon} \left(1 - \frac{1 - e^{-(w_0/\varepsilon_0)z}}{1 - e^{-(w_0/\varepsilon_0)h}} \right). \quad (12)$$

(12) 式を $z=0$ で $c=c_0$ の条件のもとに解き,

$$\frac{w_0 h}{\varepsilon} = R_w = \frac{15 w_0}{u_*} \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

とおけば、

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{1 - e^{-Rw_0}} \frac{a(x)}{w_0 c_0} \left\{ \frac{m}{m-1} (e^{-Rw_0} \frac{z}{h} - e^{-mRw_0} \frac{z}{h}) - e^{-Rw_0} (1 - e^{-mRw_0} \frac{z}{h}) \right\} + e^{-mRw_0} \frac{z}{h} \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

が得られる。上式は、 u_{*0} の平衡状態から $u_* = u_{*0}/m$ のそれに変化する遷移過程における濃度分布形を与える。(16) 式は、 u_* に対する平衡状態に近づいた地点においては $a(x)=0$ となるから、確かに平衡状態の分布形を与えるが、 $x=0$ の地点においては u_{*0} に対する平衡状態の分布形と不連続的に異なった分布形を与える。これは近似的な取り扱いによるためであろう。したがってこれから、濃度分布形を詳細に論議することは、適切ではないが、変化の概略の様子を把握することはできる。つぎに、(16) 式にもとづいて底面付近の濃度変化を求めよう。

(16) 式から $\partial c / \partial x$ を求め、(9) 式に代入すれば、つぎに示すような $a(x)$ に関する微分方程式を得る。

$$-a(x) = \frac{a'(x)uh}{w_0} \left\{ \frac{m}{(m-1)R_{w0}} - \frac{e^{-R_{w0}}}{1-e^{-R_{w0}}} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (17)$$

$x=0$: $a=a_0=w_0c_0(0)-w_0c_s$ の条件で (17) 式を解くと

ただし、

$$\alpha = \frac{1}{\frac{m}{(m-1)Rw_0} - \frac{e^{-Rw_0}}{1-e^{-Rw_0}}} \quad \dots \dots \dots \quad (19)$$

(18) 式は底面付近濃度の流下方向の変化を与える式で、 $c_0(x)$ は $c_0(0)$ から c_s に漸変していくことを示している。(18) 式の関係を図示すると Fig. 2 のとおりである。また、(19) 式の関係を Fig. 3 のように R_{w0} をパラメーターとして $\alpha \sim m$ 関係図に示しておく。 R_{w0} が小さくなると m の値によって α はほとんど変化しなくなる。 R_{w0} が大きくなり浮遊限界 ($w_0 = u_*$ とすると $R_{w0} = 15$) に近づいていくと、 m のわずかな変化に対しても α は大きくなり、急速に沈降することがわかる。

平衡状態を、

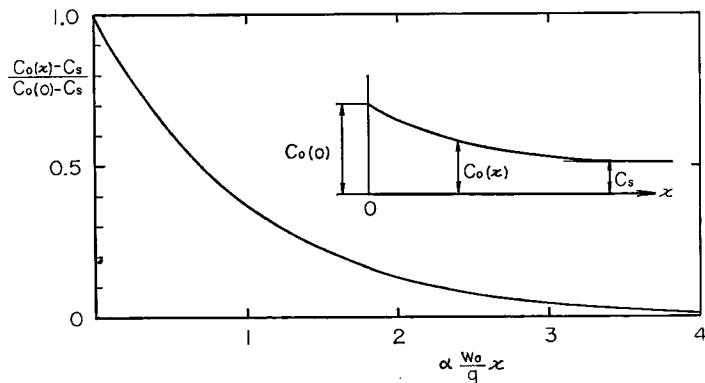


Fig. 2 Diagram for longitudinal variation of the sediment concentration near a bed.

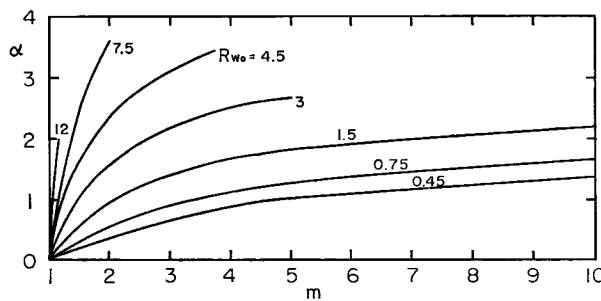


Fig. 3 Relation between a coefficient α and $m (= u_{*0}/u_*)$ with a parameter Rw_0 .

を満足する状態と定義して、平衡状態に到達するに要する距離 l_0 を(18)式から求めると Fig. 4 のとおりである。

同一の R_{w0} では m が増大するほど、同一の m では R_{w0} が増大するほど l_c は短くなる。

I_c の算定においても、(18) 式から $c_0(x)$ を求める場合においても、 $c_s/c_0(0)$ の値が必要である。比較的平滑な河床状態に対しては、 c_s と $w_0/u_*(=R_w/15)$ の関係は Fig. 5 のとおりである。 c_s は河床状態や粗な粒子のしゃへい効果などにより大きく変化する。例えば Kalinske の与えた c の値は Fig. 5 の 1/30 程度である。したがって c_s の絶対値を求めるにはまだ問題があるが、Kalinske 式と Fig. 5 の曲線とはほぼ平行であるので、

の形にすると両者ほぼ一致するので絶対値の相異は緩和される。

以上により、 w_0 , u_{*0} , u_* および $x=0$ における底面付近濃度 $c_0(0)$ が与えられると、任意の点の底面付近濃度 $c_0(x)$ を (18) 式から算定することができ、(7) 式により河床変動量を求める。

以上は解析の便宜上均一粒径を対象としたが、実際には浮流砂はある粒度分布を持っている。こうした問題について線型的な取り扱いが可能かどうかは大いに議論のある所であるが、ここでは線型的な取り扱いができるものとして、均一粒径の解析を混合粒径の場合に拡張する。

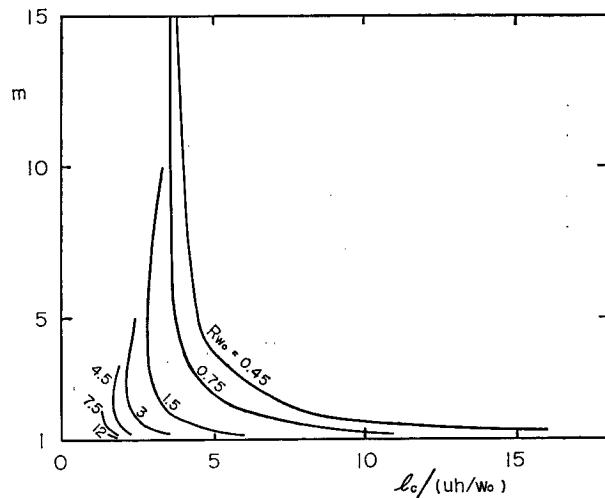


Fig. 4 Relation between a non-dimentional length required to attain an equilibrium condition and m with a parameter R_{w_0} .

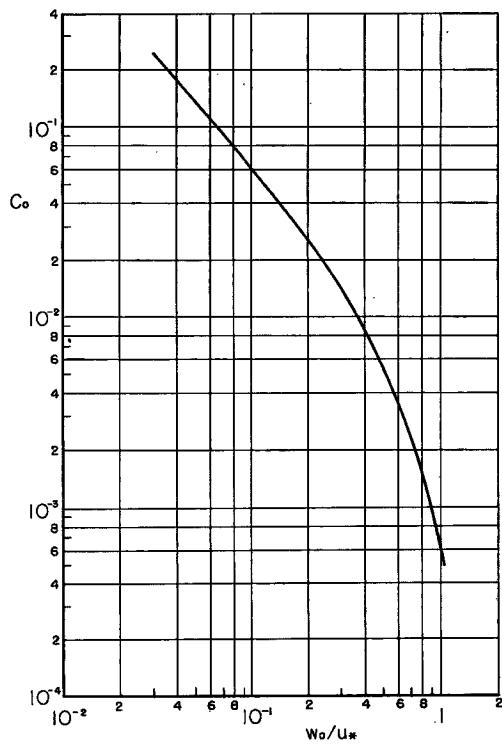


Fig. 5 Relation between the sediment concentration near a bed under an equilibrium condition and w_0/u_* for a smooth bed obtained by Ashida and Mitchie.

$x=0$ において、沈降速度 w_0 の粒子の底面付近濃度 $c_0(0)w_0$ が全粒子濃度 $c_0(0)$ の中で占める割合を $i_0(0)w_0$ とすると、

沈降速度 w_0 が河床砂において占める割合を $i_w w_0$ とすれば同様に、

となる。

(23) および (24) 式の $c_0(0)w_0$, cs_{w0} を $c_0(0)$, c_s の代りに用いることにより各粒径ごとの $c_0(x)u_0$ を求めることができ、これをすべての粒径について加算して全濃度 $c_0(x)$ を算出しうる。

w_0 が大きいものほど u_* の変化に対する応答が早いことから、上の計算過程において粒度分布の流下方向の変化が現われてくる。また洗掘あるいは堆積により、河床構成材料の粒度分布の変化が現われ、 c_s も時間とともに変化していくが、これについては時間的に区切りながら計算を進めて行けばよい。

4. 適用例—浮流砂による貯水池の堆砂実験への適用—

以上の計算法を浮流砂による貯水池の堆砂実験¹³⁾に適用して、底面濃度の流下方向の変化を計算し実験結果と比較することにより、計算法の妥当性を明らかにしよう。

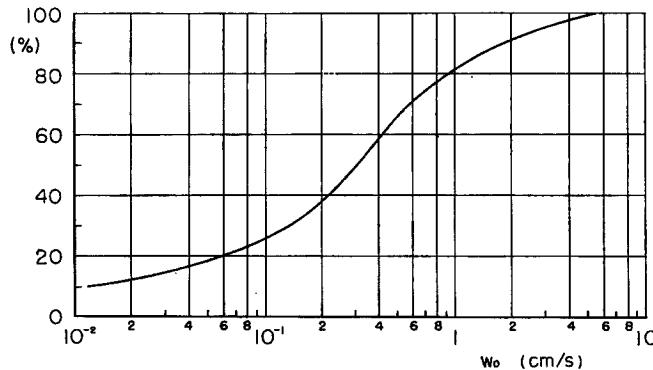


Fig. 6 Grain-size distribution of the sand used in the experiments.

幅 20 cm の水路の下流部にせきを設けて Fig. 7 に示すような貯水池を作り、Fig. 6 の粒度分布を持った比重 2.67 の珪砂を 30.4 gr/s の割で給砂し、流量 5l/s のもとで、通水開始から 1, 2, 3, 4 時間後における堆砂形状、濃度分布を測定したので堆砂形状は Fig. 7 のとおりである。

デルタの先端においては、濃度や水深などの諸量が、時間に関係なくほぼ一定で平衡状態が保たれている。この点から下流へ距離 x における底面濃度および摩擦速度は Table 1 のとおりである。ここで摩擦速度 u_* は

$$u_* = (n \cdot q/h) (g^{1/2}/R^{1/6}) \quad \dots \dots \dots \quad (24)$$

n=0.01

式から求めた。Fig. 6 の粒度分布から、Table 2 に示す粒径範囲に区分して、計算を進めるこ

実験条件では、 u_x が x 方向に変化しており、上の解析で行なったような $x=0$ で u_x が急変し、その後一定であるという条件とは異なるのでそのままでは適用しにくい。そこでつぎのように考えた。

与えられた w_0 と u_* の大小関係を調べると、 u_* が x とともに減少するので、つぎの二つの場合が現われる。

- i) すべての領域で $u_* > w_0$
 ii) $u_* > w_0$ から $w_0 > u_*$ への遷移点が現われる。

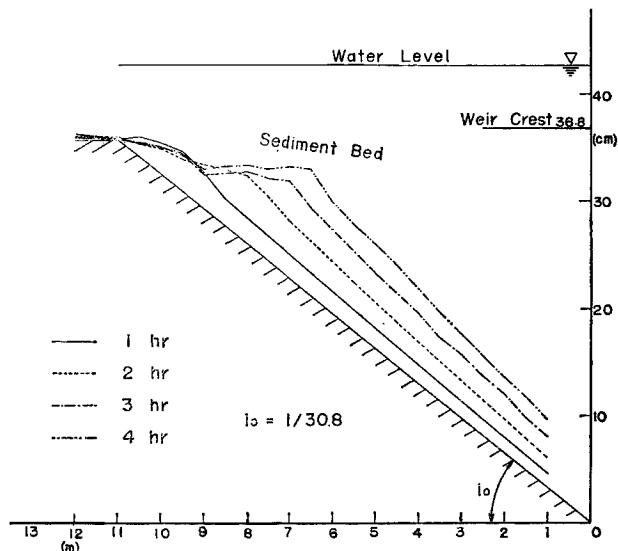


Fig. 7 Sediment bed profiles for the experiment of sedimentation in a reservoir.

Table 1 Sediment concentration near the beds and shear velocity obtained by experiment.

	x (m)	0	0.400	2.400	4.400	6.400	8.400
$t=1\text{hr}$	$c_0 \times 10^3$	9.00	6.460	3.400	3.020	2.580	2.200
	u_* (cm/s)	1.36	1.220	0.710	0.495	0.382	0.315
$t=2\text{hr}$	x (m)	0	1.000	3.000	5.000	7.000	
	$c_0 \times 10^3$	9.00	4.320	3.530	2.920	2.580	
	u_* (cm/s)	1.36	0.850	0.546	0.410	0.328	
$t=3\text{hr}$	x (m)	0	2.000	4.000	6.000		
	$c_0 \times 10^3$	9.00	3.950	3.370	3.020		
	u_* (cm/s)	1.36	0.675	0.455	0.354		

Table 2 Representative fall velocities and their frequencies used for the calculation.

w_0 (cm/s)	Range	iw_0
0.10	$w_0 < 0.2$	0.38
0.30	$0.2 < w_0 < 0.4$	0.21
0.50	$0.4 < w_0 < 0.6$	0.12
0.80	$0.6 < w_0 < 1.0$	0.10
1.36	$1.0 < w_0$	0.18

i) の場合には、 $x=0$ において u_{*0} から最下流断面の u_* （考へている領域における u_* の最小値）に急変その後、一定値を保ったものとして取り扱う。ii) の場合には、 $w_0 > u_*$ の断面ではこの粒径の粒子はすべて沈降しておるものと考え、 $u_* > w_0$ の領域についてのみ考える。かつ i) の場合と同様に、 $x=0$ において u_{*0} から上の領域の最小値に急変したものとみなす。例えば、 $w_0 = 0.1 \text{ cm/sec}$, $t = 1 \text{ hr}$ の場合には、すべての断面で $u_* > w_0$ であるので、 $x=0$ において $u_* = 1.36 \text{ cm/sec}$ から与えられた u_* の最小値 $u_* = 0.315$ に急変したものとみなす。また $w_0 = 0.5 \text{ cm/sec}$ に対しては、 $x = 4.4 \text{ m}$ では $u_* < w_0$, $x = 2.4 \text{ m}$ では $u_* > w_0$ であるので、 $x = 4.4 \text{ m}$ では $w_0 = 0.5 \text{ cm/sec}$ の濃度成分は存在せず、かつ $x \leq 2.4 \text{ m}$ の領域については、 $x = 0$ で $u_* = 1.36 \text{ cm/sec}$ から $u_* = 0.71 \text{ cm/sec}$ に急変したものとする。

Fig. 3 に示したように、 Rw_0 が小さい場合には、 m がかなり変化しても、濃度の減衰係数 α がそれほど変化せず、また Rw_0 が大きくなり浮流限界に近づくと、 m のわずかな変化に対しても α は急速に大きくなり、沈降は急速に生ずることから上の取り扱いは許容しうるであろう。

上の取り扱いにより、各粒径範囲ごとに、 Rw_0 , m の値が定まるから、(19) 式により α が決定される。また(22)式から $c_s/c_0(0)$ が求まるが、上の条件では非常に小さくなるので、ここでは $c_s/c_0(0) = 0$ とした。

Table 3 Relative sediment concentration near the beds obtained by the experiment and the calculation.

$t = 1 \text{ hr}$

x (m)	$c_0(x)_w/c_0(0)$					$c_0(x)_w/c_0(0)$	
	w_0 (cm/sec) $= 0.1$	0.3	0.5	0.8	1.36	Calcu.	Measured
0	0.38	0.21	0.12	0.10	0.18	1.00	1.00
0.4	0.37	0.18	0.10	0.06	—	0.71	0.71
2.4	0.33	0.09	0.03	—	—	0.45	0.38
4.4	0.29	0.05	—	—	—	0.34	0.34
6.4	0.26	0.03	—	—	—	0.29	0.29
8.4	0.23	0.01	—	—	—	0.24	0.24

$t = 2 \text{ hr}$

x (m)	$c_0(x)_w/c_0(0)$					$c_0(x)_w/c_0(0)$	
	w_0 (cm/sec) $= 0.1$	0.3	0.5	0.8	1.36	Calcu.	Measured
0	0.38	0.21	0.12	0.10	0.18	1.00	1.00
1	0.36	0.15	0.06	0.04	—	0.61	0.48
3	0.33	0.08	0.02	—	—	0.42	0.39
5	0.28	0.04	—	—	—	0.32	0.32
7	0.25	0.02	—	—	—	0.27	0.29

$t = 3 \text{ hr}$

x (m)	$c_0(x)_w/c_0(0)$					$c_0(x)_w/c_0(0)$	
	w_0 (cm/sec) $= 0.1$	0.3	0.5	0.8	1.36	Calcu.	Measured
0	0.38	0.21	0.12	0.10	0.18	1.00	1.00
2	0.34	0.11	0.04	—	—	0.49	0.44
4	0.30	0.06	—	—	—	0.36	0.37
6	0.27	0.03	—	—	—	0.30	0.34

(18) 式において $c_0(0)$ の代りに (23) 式の $c_0(0)w_0$ を用いると、各粒径ごとの濃度 $c_0(x)w_0$ が求まる。計算の結果は Table 3 に示すとおりであり、濃度変化に対する計算の結果は実測値とかなりよく一致する。また浮流砂の粒度構成、したがって堆積砂の粒度構成が流下距離とともに細かくなつて行く過程が明瞭に把握される。各時刻における底面濃度の距離的变化の計算値と実測値との比較を行なつたのが Fig. 8 であり、時刻による相異はなく、いずれも計算値と実測値とはよく一致している。

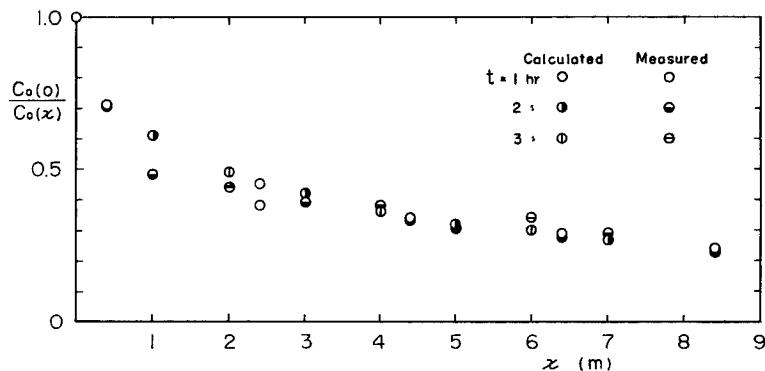


Fig. 8 Comparison between calculated values and measured ones for the sediment concentration near the beds in a reservoir.

5. 結 論

以上、非平衡状態における濃度分布および河床面近傍の濃度変化を表示する式を導いた。基本的な考え方は、単位時間、単位面積当たり沈降または洗掘される量は、平衡状態の濃度と実際の濃度の差に沈降速度を掛けたものに等しく、さらに平衡状態の濃度は、沈降速度と摩擦速度の関数として与えられるとするものである。さらに式の誘導に当っては、拡散係数を断面内で一定とし、濃度分布形の第一近似として平衡状態のものを用いた。一つの平衡状態（摩擦速度 u_{*0} ）から他の平衡状態 (u_*) への濃度変化の様子は、 w_0/u_{*0} と u_{*0}/u_* の二つのパラメーターによって規定されるが、この計算を簡単に行なうための図表を作製した。

以上の計算法を、ある粒度分布を持った浮流砂が貯水池に流入する場合に対して、粒径ごとに区分して適用し河床付近の濃度を求めて重ね合せた結果、実測値とかなりよい一致が得られた。したがって、本論に述べた計算法はかなり多くの仮定にもとづいるが、十分適用性を持っているものと考えられる。

参 考 文 献

- 1) 芦田和男・道上正規：浮流砂に関する研究(1)—底面付近の濃度について—、京都大学防災研究所年報、第13号、昭44.3.
- 2) A. A. Kalinske: Suspended Material Transportation under Non-equilibrium Conditions, Trans. A. G. U., 1940.
- 3) 合田 健：上水浄化における水理学上の基礎的諸問題、京都大学学位論文、昭31.
- 4) 土屋昭彦・星畠国松：浮遊による河床変動、第13回水理講演会講演集、土木学会、水理委員会、1969.2.
- 5) 矢野勝正・芦田和男・大同淳之・前田武志：浮遊流砂による貯水池の堆砂に関する研究、京都大学防災研究所年報、第7号、昭39.3.