

ダム群による洪水調節に関する研究 (I)

— DP の利用とその問題点 —

高 棹 琢 馬・瀬 能 邦 雄

A STUDY ON FLOOD CONTROL BY GROUP OF DAM RESERVOIRS (I)

—Utilization of DP and some Incidental Problems—

By *Takuma* TAKASAO and *Kunio* SENO

Synopsis

For the optimal flood control by dam reservoirs, a precise forecast of floods (especially, flood hydrographs) is the most necessary matter. But a precision of flood forecast is now very low. Therefore, we must establish a system that copes flexibly and optimally with any floods under their insufficient forecast. Such system will need a method that can get the optimal solutions of flood control for any floods logically, universally and rapidly. And it will be very available to utilize the Dynamic Programming (DP) as such method.

In this study, we firstly try a multidimensional DP formulation of a general optimal flood control process considering correlation of dam reservoirs, effects of floods from interbasins, and multi-point-defense. Secondly, showing some examples of computed solutions for some basic types of flood control system by the DP formulation, we discuss about criterion of optimality and about possibility of diminution of system dimension, and find out some available results with disclosure of some problems left to resolve.

1. ま え が き

近年、河道改修の進捗にともない自然的遊水作用が減じ、洪水流量は次第に大きくなる傾向にある。一方、土地利用の高度化は河道の拡幅や遊水調節池の築造をきわめて困難にしている。このため、ダムによる洪水調節が重要視され、現在、わが国の多くの河川で実施され、計画されており、とくに、利根川、淀川、北上川等の主要大河川では、数多くのダムによって洪水調節を行なおうとしている。

こうした場合、従来各ダムに独立に設けられている一定量放流、一定率貯留等¹⁾のいわば固定的な操作規定に従っていたのでは、その調節効果は十分に発揮できないばかりでなく、場合によってはかえって悪い結果をもたらすことも考えられ、ダム群相互の有機的な関連、ダム残流域群の出水等を考慮した柔軟な最適操作方式、いわゆるダム群の統合操作方式（従来、一部の特殊な流域で試みられている不定率調節方式の一般化したもの）の確立が近年の重要な課題となっているわけであるが、そこには多くの困難な問題が内在している。そのうち最大の問題は、洪水、ことにそのハイドログラフの予知能力の時間的・精度的限界にある。すなわち、ダム群によって、それらの限られた調節能力を駆使した最適な洪水調節を行なうためには、ダム流域およびダム残流域の洪水ハイドログラフの確度の高い予知を必須条件とするが、一般にわが国では、そ

うした中小流域の出水がとくに急激（流出時間遅れ数時間）であるため、ハイドログラフの適確な予知には、少なくとも雨量の時間的・地域的分布の正確な予知が必要である。しかし、現段階では、短時間後の面積平均的雨量規模の予知は降雨原因によってはかなりの精度で可能であるが、雨量分布の予知については、予測時間が長くなるにつれてその精度が急激に低下するのが実情である²⁾。

こうした制約のもとで、できるだけ効果的な洪水調節を行なうにはつぎのような2つの方策が考えられよう。ただし、いずれの方策も関連地域の気象状況、および流域内各地点の洪水時の過去・現在の降雨量、水位等を即座に集中的に計量できるシステムを構成しておくことを前提とする。

その一つは、まず、気象情報によって大雨が予測された時点において大雨の規模とその予測精度に見合った予備放流を行ない、つぎに洪水を起すと予測される降雨の開始後は、たとえ数時間でも流出遅れがあるという事実を利用して、すでに観測された降雨分布に気象情報による予測降雨分布をつけ加えたハイドログラフによって、ダム流域、ダム残流域のハイドログラフを適当な時間間隔ごとに予測する作業を繰り返し、各時点で予測されたハイドログラフに対して、予測精度を勘案し、かつ水位情報等から既操作による誤差回復を行なうことをも含めた、最適な洪水調節の解を迅速に求め、実行していく方式、いわば適応制御方式である。

いま一つの方策は、当該流域で考えられる洪水パターンを数多く想定し、各パターンの洪水についてあらかじめ最適操作の解を求めておき、現実の洪水時には気象情報、降雨情報等からどのパターンに最も近いかを判定し、修正を加えながら操作を行なっていく、いわば型紙方式である。しかし、現実の洪水パターンは無数にあるわけであり、また各ダムの貯水状態の組合せも無数にあるため、どの程度のパターン数について解を求めておけば十分であるかは難しい問題であろう。

いずれの方策をとるにしても、任意の洪水に対して、任意の貯水状態にあるダム群による水系全体として最適な洪水調節の解を、合理的、普遍的に求める手法（適応制御方式の場合は、とくに迅速性が要求される）の確立が必要であり、これはまた河川計画一般にも役立つことはいうまでもない。

本研究は、こうした手法を確立するにあたり、ダム（群）による洪水調節が明らかに制御過程であることに着目し、最適制御の一般的な数学的解法として、近年電子計算機の著しい発達とともに注目されているDP³⁾ (Dynamic Programming) を利用することがきわめて有効であると考え、まず、ダム群相互の関連、ダム残流域群の効果、多地点防御を考慮する一般的な最適洪水調節のDPによる定式化を試みた。ついで、数種の仮定の洪水調節系における計算例を示すとともに、こうした手法にDPを利用する際に生ずる問題点を挙げ、その解決手法について考察を加え、今後の研究課題を明らかにしたものである。

2. ダム群による最適洪水調節のDPによる定式化

2.1. ダム群による最適洪水調節の数学的記述

ダム群のゲート操作によって洪水調節を行なう過程は明らかに制御過程である。この制御過程を最適化するにはいかなることかを、DPを利用する準備として、数学的に記述しておく必要がある。

一般に制御系にはつぎの4種の変数が関係している⁴⁾。すなわち、(i) 決定変数（過程を制御するための操作変数——制御変数ともいう）、(ii) 状態変数（任意の時刻における過程の状態を測定・記述するための変数）、(iii) 合成変数（制御系の動作の質を指示・測定するための変数）、および(iv) 外乱（制御することのできない環境変数）である。最適制御の一般の問題は、外乱とパラメータ変動によって生ずる系の動揺に打ち勝って合成変数をその最適値に保持する方法をみいだすことにある。合成変数は通常制御系の動作評価指数（目的関数）を記述するのに用いられるから、けっきょく、最適制御問題は目的関数を最小化または最大化することに帰する。この最適制御問題を数式で記述すれば、一般につぎのようになる⁵⁾。すなわち、系の状態ベクトル、制御ベクトル、外乱ベクトルをそれぞれ、 $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{u}(t)$ 、 $\mathbf{z}(t)$ とするとき、系の性状を表現する微分方程式、

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}, t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

が成り立つとする。このとき、各時点で制御系に課せられた

$$g(y) \leq 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

なる拘束条件のもとで、初期状態、

$$x(0) = C \quad \dots\dots\dots (3)$$

として、目的関数、

$$J(y) = \int_0^T F(x, y, z) dt \quad \dots\dots\dots (4)$$

を最大あるいは最小にする制御ベクトル $y(t)$ ($0 \leq t \leq T$) を決定する問題であるということである。

上記のことをダム群（ダム数 N ）による洪水制御系にあてはめてみよう。まず、系を構成する変数については、(i) の決定変数（制御変数）にあたるものは、各ダムの放流流量 O_k ($k=1, 2, \dots, N$)、(ii) の状態変数にあたるものは、各ダムの貯水量 S_k ($k=1, 2, \dots, N$)、(iii) の合成変数に相当するものは、ダム下流の沿川に設けられた評価地点 i ($i=1, 2, \dots, m$) を通過する流量 Q_i 、(iv) の外乱に相当するのは、各ダムへの流入流量 I_k ($k=1, 2, \dots, N$)、およびダム残流域流量 q_j ($j=1, 2, \dots, n$) である。すると、系の性状を表現する微分方程式は、各ダムにおいて成立する連続式、

$$\frac{dS_k}{dt} = I_k - O_k \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (5)$$

であり、拘束条件として、各時点における放流能力の制限、

$$O_k \leq g_k(S_k) \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (6)$$

が考えられる。ここに、 g_k はダム k に固有のもので貯水量の関数である。このとき、各ダムの初期貯水量（あるいは最終貯水量）を

$$S_{k0} = C_k' \quad (\text{or } S_{k0} = C_k) \quad \dots\dots\dots (7)$$

として、目的関数（被害あるいは危険度を意味するものとする）、

$$J(O) = \int_0^T F(Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots, Q_m) dt \quad \dots\dots\dots (8)$$

を最小とする $O = \{O_1, O_2, \dots, O_k, \dots, O_N\}$ を決定するのが最適洪水制御の問題であると考えることができる。

この問題を解く手法として DP がきわめて有効なわけであるが、DP の計算はデジタル電子計算機によって行なう必要があるため、上記の変数、関係式を離散的な表現に直しておこう。まず、各ダムに共通な有限の洪水制御期間を考える。この全制御期間を T 個に等分し、順に期間 $1, 2, \dots, t, \dots, T$ と番号をつける。そして、任意の期間 t ($t=1, 2, \dots, T$) におけるダム k ($k=1, 2, \dots, N$) の流入量、放流量をそれぞれ、 $I_k(t)$ 、 $O_k(t)$ とし、期間 t の期首の貯水量を $S_k(t)$ とする。すると、(5) 式に相当するものとして、つぎの階差方程式、

$$S_k(t+1) = S_k(t) + I_k(t) - O_k(t) \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (9)$$

が成り立つ。(6) 式に相当するものとして、形式的に

$$O_k(t+1) \leq g_k(S_k(t) + I_k(t)) \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (10)$$

と書けよう。すなわち、期間 t の平均的な貯水量は $S_k(t) + I_k(t)$ によって規定され则认为られるからである。つぎに、

(7) 式に相当するものとして、われわれは、ダム k の制御終了時の貯水量 $S_k(T+1)$ を

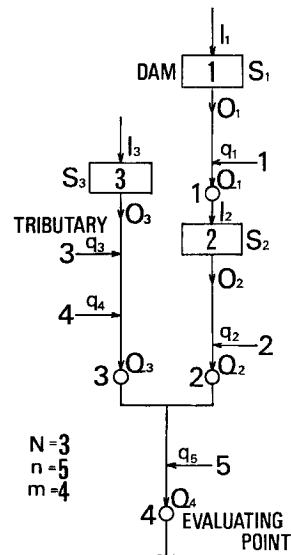


Fig. 1 An example of flood control system model having three dams, five tributaries, and four evaluating points.

$$S_k(T+1) = C_k \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(11)$$

と与えることにする。この C_k の値は、たとえば、まえがきで述べたような適応制御を行なう場合、洪水ハイドログラフの予測精度が高い場合は有効貯水容量 V_k に近い値にするのが当然有利であるが、精度が悪い場合はその精度に応じて、余裕を考慮した値にすべきであろう。

さて、つぎに目的関数 J の表現であるが、その前に、われわれは (8) 式の F をつぎのように定義することにする。

$$F(Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_i(t), \dots, Q_m(t)) \equiv \sum_{i=1}^m D_i(Q_i(t)) \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 D_i は評価地点 i ($i=1, 2, \dots, m$) に付与する評価関数で、期間 t の制御の結果、地点 i を通過する流量 $Q_i(t)$ (期間 t に通過するのではない) によって起る被害、あるいは破堤の危険度を表わす指標と考える (この評価関数については後述する)。すると、目的関数 J の離散的表現は、

$$J = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m D_i(Q_i(t)) \quad \dots\dots\dots(13)$$

となる。この J を与えられた条件のもとで最小化する各ダムの放流量系列 $\{O_k(t)\}$ ($k=1, 2, \dots, N$; $t=1, 2, \dots, T$) を決定するわけである。そのためには、 $Q_i(t)$ を各ダムからの放流量とダム残流域からの流量との関数として表わさなければならない。これは、つぎの2つの仮定を設けることによって可能となる。すなわち、(1) 残流域によるダム下流の流量増はすべて支川流入の形態で起るとする (山腹斜面等から直接河道に流入する量は支川流量に配分すると考える)、および (2) 洪水の流下合流機構は線形とする、という仮定をおけば、 $Q_i(t)$ はつぎのように表わせる。

$$Q_i(t) = \sum_{(k)_i} O_k(t) + \sum_{(j)_i} q_j(t) \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここに、右辺第一項は、期間 t のダム k ($k=1, 2, \dots, N$) の放流量 $O_k(t)$ のうち、途中他のダムを通過しないで評価地点 i に到達するものの総和、第二項は支川流量 $q_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, n$) のうち、途中ダムを通過しないで評価地点 i に到達するものの総和を表わす (Fig. 1 参照)。もちろん、これらは同時に評価地点 i ($i=1, 2, \dots, m$) に到達するように、最下流の評価地点を基準として、洪水の伝達時間を考慮したハイドログラフの平行移動による共通の制御時間座標 t ($t=1, 2, \dots, T$) を与えているわけである。

2.2. DP の理論とその適用

前項で定義したダム群による最適洪水制御問題を解く数学的手法として DP を適用するまえに、まず DP の理論の概略を説明しておこう。

DP は R. Bellman⁶⁾ によって創始された数理計画法の一分野であり、適用の対象となるものは多段決定過程である。多段決定過程とは、ある系の状態を変化させる決定 (制御) の選択が多段階にわたって行なわれる過程であり、この場合の決定の系列を方策 (policy) といい、ある制限のもとにある量を最適にするような方策を最適方策 (optimal policy) と呼ぶ。DP の目的はこの最適方策を求めることにあるわけであるが、このために、“最適性の原理 (Principle of Optimality)” によって妥当性を保障された極値演算子 (すなわち max または min) を含む関数方程式を立てるところに DP の本質があるといえる。ここに、“最適性の原理” とはつぎのようなものである。すなわち、“最適方策とは、最初の状態がどうであり、またそれに対してどんな決定をしてもこの状態、決定とは無関係に、その後に行なわれる決定が、最初の決定によって生じた状態に関して最適方策となるような性質をもつことである” というものである。つぎに、この DP によってわれわれが先に定義したダム群による最適洪水制御過程を定式化 (関数方程式を立てる) しよう。

われわれは適応制御方式への応用を考慮して、制御終了時の状態を (11) 式のように規定した。したがって、DP の計算は時間の流れと逆方向に進める後進型計算法をとることになる。

そこで、いま任意の期間 t から最終期間 T までの最適方策 (最適放流量系列) $\{O_k(t)\}$ ($t=t, t+1, \dots, T$; $k=1, 2, \dots, N$) による目的関数の最小値 (これは期間 t の期首の各ダムの貯水量 $S_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, N$) の関数である) を $f_t(S_1, S_2, \dots, S_N)$ とすると、(13) 式の構造と最適性の原理によりつぎの関数方程式が成

立することは明らかである。

$$f_t(S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_N) = \min_{\substack{0 \leq S_k \leq V_k \\ (k=1, 2, \dots, N)}} \left\{ \sum_{i=1}^m D_i(Q_i(t)) + f_{t+1}(S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_N) \right\} \dots (15)$$

ここに、 $Q_i(t)$ は (14) 式で表わせるものであり、 f_{t+1} は期間 $t+1$ の期首の各ダムの貯水量 $S_k(t+1)$ ($k=1, 2, \dots, N$) の関数であるから、(9) 式を考慮して上式を詳しく書けばつぎのようになる。

$$\begin{aligned} f_t(S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_N) = & \min_{\substack{0 \leq S_k \leq V_k \\ (k=1, 2, \dots, N)}} \left\{ \sum_{i=1}^m D_i \left(\sum_{(k)_i} O_k(t) + \sum_{(j)_i} q_j(t) \right) + f_{t+1}(S_1(t) \right. \\ & + I_1(t) - O_1(t), S_2(t) + I_2(t) - O_2(t), \dots, S_N(t) \\ & \left. + I_N(t) - O_N(t) \right\} \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

この漸化式を解く手がかりとして、制御最終段階の決定 $O_k(T)$ ($k=1, 2, \dots, N$) による目的関数値 $f_T(S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_N)$ が必要であり、それは、(13)、(14) 式と (9)、(11) 式を考慮することによってつぎのようになる。

$$\begin{aligned} f_T(S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_N) = & \sum_{i=1}^m D_i(Q_i(T)) \\ = & \sum_{i=1}^m D_i \left(\sum_{(k)_i} (S_k(T) + I_k(T) - C_k) + \sum_{(j)_i} q_j(T) \right) \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

以上に示した (16) および (17) 式がわれわれの定義したダム群による最適洪水制御過程の DP による定式化であり、これを解く、すなわち最適放流量系列 $\{O_k(t)\}$ ($t=1, 2, \dots, T; k=1, 2, \dots, N$) を求めるためには、まず、ダム流域およびダム残流域の洪水ハイドログラフ、すなわち $\{I_k(t)\}$ ($t=1, 2, \dots, T; k=1, 2, \dots, N$) および $\{q_j(t)\}$ ($t=1, 2, \dots, T; j=1, 2, \dots, n$) を与えなければならない。この値として、型紙方式や計画の場合は想定したハイドログラフを用い、適応制御方式の場合は刻々予測されるハイドログラフを用いるわけであって、後者の場合その予測精度が問題となるわけである。しかし、さらに本質的な問題は目的関数の設定の仕方であって、われわれが (13) 式のように設定した目的関数については、評価地点 i の配置およびそれに付与する評価関数 D_i そのものの与え方が重要な問題となる。

2.3. 評価地点・評価関数の設定

評価地点・評価関数の設定の仕方は、洪水調節の目的をどう考えるかに直接関係する。

ダム（群）による洪水調節の目的は、概念的には、“洪水によって引起される当該水系内の人間社会における被害をできるだけ少なくすること”であるといえよう。ところで、洪水による被害のうちもっとも甚大なるものは破堤・はん濫によるものであり、それは評価しえない人命の損失をも引起す。したがって、洪水調節の第1目的は破堤・はん濫の防止におくべきであり、さらに余裕のある場合は堤外地の護岸・水制・橋梁等の被害をできるだけ少なくすることを目的とすればよいであろう。また、内水災害の軽減は本来、排水ポンプ等の完備によるべきであり、2次的な目的と考えられる。ところで、いかなる調節を行なってもいずれかの地点で破堤・はん濫を免れない大洪水を迎えた場合、どの地点で破堤させ、どの地点を守るべく調節するのが最適かといった重要度のからむ問題を議論することは、ここでは避け、その前段階として、要防御区域のすべてに破堤・はん濫を起させない調節の可能性を追求する立場をとりたい。

さて、洪水調節の目的を以上のように考えた場合、評価地点を設定すべき箇所は、破堤・はん濫を防止すべき河道全体（すなわち点ではなく線的に）ということになるが、ある河道区分をとって考えた場合、その間に大きな流量増を起すような支川が流入していないときには、その河道区分を代表する一点を選らばよいと考えられる。

つぎに、この評価地点に付与すべき評価関数の具体的な設定であるが、そのためには、洪水に対する、堤防自体の強度、護岸・水制・床固め等の機能および強度、あるいは水防能力等と、洪水のもつ加害素因（水位・流量・流速・流向、およびこれらの時間的変化、流木、土石流等）との関係が明らかにされねばならない。しかし、現段階では、ただ定性的に、洪水の加害力は、最大流量の大きさ Q_p 、ある流量以上の継続時

間、洪水ハイドログラフの上昇期の流量増加率 dQ/dt 等が大きいほど増大するといわれている程度である。そこで、現在考えられる具体的な洪水調節目標として、評価地点において、①洪水ピーク流量をできるだけ小さくすること、②洪水継続時間をできるだけ短くすること、③急激な流量増を起さないこと、等が挙げられる。ここに、①と②は互いに対立する事項であり、その兼合いをいかにすればよいかは現在の知識ではわからない。そこで、洪水調節の第1目的とする破堤・はん濫を起さないということを考えるなら、①をとるべきであろう。すなわち、土を材料とする現在の堤防は越水すれば、かならずといってよいほど破堤・はん濫するわけであり、その防止策はきわめて困難であるのに対し、漏水、洗堀等による破堤は、その防止策を講じることが現在十分可能であると考えられる⁹⁾からである。また、このように考えるなら、③を目的とすることも、さほど重要でなくなり、また、現在の知識では定量的な規定もできない。

以上の考察により、洪水調節の具体的な目標は評価地点における洪水ピーク流量をできるだけ小さくすることと考えることにするが、ここに、新たな問題が生じる。それは、1つの評価地点のみを考える場合は問題ないが、2地点以上に対して、この目標を達成しようとする場合、各地点間に対立が生じるということである。この問題については、次項において計算例とともに考察することにし、ここでは、その計算を行なうために設定した評価関数 $D(Q)$ の具体的な関数形のいくつかを示し、そのように設定した理由について述べておこう。

その一つは、ある流量による被害あるいは破堤の危険度を表わすとする評価関数 $D(Q)$ の増加率は、その時の流量の大きさに一次比例すると考えると、次式、

$$\frac{dD(Q)}{dQ} = a' \cdot Q \quad (a' > 0) \quad \dots\dots\dots (18)$$

が成り立ち、これを $D(0)=0$ として積分すると、

$$D(Q) = a \cdot Q^2 \quad \left(a = \frac{a'}{2} > 0\right) \quad \dots\dots\dots (19)$$

となる。ここに、 a は被害あるいは危険度への変換定数を意味する。これと類似の形として

$$D(Q) = b \cdot \left(\frac{Q}{Q_d}\right)^2 \quad (b > 0) \quad \dots\dots\dots (20)$$

も考えられる。ここに、 Q_d はその地点の許容流量を表わす。

また、ある流量による破堤の危険度を表わすとする $D(Q)$ の増加率が、その時点の許容残流量 ($Q_d - Q$) に逆比例すると考えれば、すなわち、

$$\frac{dD(Q)}{dQ} = \frac{\alpha}{Q_d - Q} \quad (\alpha > 0) \quad \dots\dots\dots (21)$$

とすれば、 $D(0)=0$ として積分して、

$$D(Q) = \alpha \log \left\{ \frac{Q_d}{Q_d - Q} \right\} \quad (\alpha > 0) \quad \dots\dots\dots (22)$$

が得られる。ここに、 α は危険度への変換定数を表わす。

なお、もっと単純に、洪水による被害、危険度は流量が大きくなればなるほど増大すると考えれば、さらに様々な関数形が設定できるが、その一つとして、(19)、(20)、(22) 式とちがって、凸関数でない

$$D(Q) = b' \cdot Q + \alpha' \sin(\beta \cdot Q) \quad (\alpha' \cdot \beta < 1) \quad \dots\dots\dots (23)$$

という形のものも設定してみた。

なお、以上に設定した評価関数 (19)、(20)、(22)、(23) 式中の変換定数は、一義的に決定できる性質のものではなく、またその必要もないため、次項に示す計算例においては適当に仮定したものを与える。

3. 計算例と問題点の考察

ここでは、ダム、評価地点および支川等の基本的な配置形式をもつ仮想の洪水制御系に対し、具体的な計算条件、すなわち洪水ハイドログラフ $\{I_k(t)\}$ 、 $\{q_j(t)\}$ ダムの有効貯水容量 V_k 、制御終了時の貯水量 C_k 、

および 2.3. で設定した数種の評価関数 $D_i(Q)$ を与えた場合、2.2. で示した一般的な最適洪水制御の DP による定式化 (16), (17) 式による解、すなわち $\{O_k(t)\} (t=1, 2, \dots, T)$ はいかなるものになるかを示すとともに、その結果より、われわれが設定した評価関数の妥当性、問題点を考察し、さらに、ダム数が多くなった場合に生じる多次元性の問題の解決手法として、次元の節減化について行なった考察を示すことにする。

3.1. 計算例と評価関数に関する考察

まず、最も基本的な場合として、Fig. 2 の左端に示すような、一つのダム 1、一評価地点 1、流入支川なし (A-1 型) の計算例を示す。この場合の DP の定式化は、(16), (17) 式より、

$$\begin{cases} f_t(S_1) = \min_{0 \leq S_1 \leq V_1} \{D_1(O_1(t)) + f_{t+1}(S_1(t) + I_1(t) - O_1(t))\} & \dots\dots\dots (24) \\ f_T(S_1) = D_1(S_1(T) + I_1(T) - C_1) & \dots\dots\dots (25) \end{cases}$$

である。

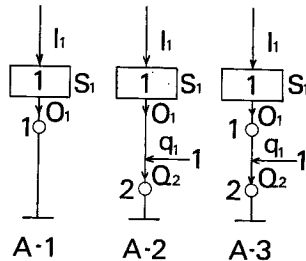


Fig. 2 Designation of the flood control system types having one dam.

いま、ダム 1 の有効貯水容量 $V_1=99$ 、洪水制御期間を $T=15$ 、制御終了時の貯水量を $C_1=99$ と与える。ここに、 $V_1=99$ というのは、実際のダムの有効貯水容量を 0, 1, 2, ..., 99 と 100 の段階に分割したことを意味し、たとえば、2000(万 m^3) の有効貯水容量をもつダムでは、 $2000/99=21$ (万 m^3) が 1 単位となるわけである。したがって、たとえば貯水量 $S_1=5$ とは、 $21 \times 5=105$ (万 m^3) を意味する。また、 $T=15$ というのは、たとえば実際の全制御期間が 30 時間であれば、1 単位の制御期間 $t(t=1, 2, \dots, T)$ は、各々 2 時間を意味する。したがって、この場合、たとえば $I_1(t)=3$ ということは、2 時間の間に $21 \times 3=63$ (万 m^3) がダム 1 へ流入することを意味するわけである。

さて、ダム 1 への洪水ハイドログラフとして、Table 1 の上段に示すような $\{I_1(t)\} (t=1, 2, \dots, 15)$ を与え、評価関数として、つぎの 3 通りを考えることにする。

(a) $D_1(Q)=Q^2/100$ ((19) 式に相当する)

(b) $D_1(Q)=\log \{30/(30-Q)\}$ (<30) ((22) 式に相当し、 $Q_d=30$ としたもの)
 $=Q^2$ ($Q \geq 30$)

(c) $D_1(Q)=Q+4\sin(\pi Q/16)$ ($Q \leq 70$) ((23) 式に相当する)
 $=Q^2$ ($Q > 70$)

以上の条件のもとに、(24), (25) 式によって計算した結果の一部 (実際には、初期貯水状態 $S_1(1)=0, 1, 2, \dots, 99$ に対して解が得られる) は Table 1 に示す通りであるが、これからつぎのことが明らかとなる。すなわち、(a), (b) と評価関数が異なるにもかかわらず、それらによる解 $\{O_1(t)\} (t=1, 2, \dots, T)$ は同等であり、いずれも評価地点 1 の通過流量 $Q_1(t)(=O_1(t))$ を可能な限り平滑化する、すなわちピーク流量をできるだけ小さくするものとなっている。このことは、評価関数 (a), (b) がいずれも凸関数であるということから、つぎのように考えれば理解できる。

ダム 1 からの放流量の全制御期間を通じての和 $\sum_{t=1}^T O_1(t)$ は初期貯水量 $S_1(1)$ 、最終貯水量 C_1 、および

Table 1 Comparison of computed solutions $\{Q_i(t)\}$ by three evaluation functions (a), (b) and (c), for the system type A-1 shown in Fig. 2.

A-1	$S_1(1)$	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		$D_1(Q)$	$I_1(t)$														
			2	4	14	20	40	30	24	20	12	8	6	4	4	4	2
$O_1(t)$	0	(a)	2	4	8	9	9	9	9	9	8	8	6	4	4	4	2
		(b)	2	4	8	8	9	9	9	9	9	8	6	4	4	4	2
		(c)	0	0	0	0	0	23	24	24	0	24	0	0	0	0	0
	30	(a)	10	11	11	10	11	11	11	11	11	8	6	4	4	4	2
		(b)	10	10	11	11	11	11	11	11	11	8	6	4	4	4	2
		(c)	0	0	0	0	25	25	25	25	0	25	0	0	0	0	0
	60	(a)	14	14	14	14	14	15	15	15	12	8	6	4	4	4	2
		(b)	14	14	14	14	14	15	15	15	12	8	6	4	4	4	2
		(c)	0	0	22	22	22	22	22	22	0	23	0	0	0	0	0
	99	(a)	19	19	19	19	19	19	20	20	12	8	6	4	4	4	2
		(b)	19	19	19	19	19	19	20	20	12	8	6	4	4	4	2
		(c)	24	0	24	24	25	24	24	24	0	25	0	0	0	0	0

Evaluation functions (a) $D_1(Q) = Q^2/100$
 (b) $D_1(Q) = \log(30/30-Q)$ ($Q < 30$)
 $= Q^2$ ($Q \geq 30$)
 (c) $D_1(Q) = Q + 4 \sin(\pi Q/16)$ ($Q \leq 70$)
 $= Q^2$ ($Q > 70$)

$\{I_1(t)\}$ ($t=1, 2, \dots, T$) が与えられると, $\sum_{t=1}^T O_1(t) = S_1(1) + \sum_{t=1}^T I_1(t) - C_1$ と表わされ, その値は一定となる。そして, 最適放流量系列 $\{O_1(t)\}$ は $J = \sum_{t=1}^T D_1(O_1(t))$ を最小とするように決定されるわけで, $D_1(Q)$ が凸関数なら, 一般の微分法の示すごとく $O_1(t)$ は一定値 $\sum_{t=1}^T O_1(t)/T$ に等しくなるべきである。ところが,

$$S_1(t) + I_1(t) - V_1 \leq O_1(t) \leq S_1(t) + I_1(t) \quad ((9) \text{ 式を考慮した } 0 \leq S_1 \leq V_1 \text{ と同等の条件})$$

なる制約条件があるために, 上記の一定値をとれず, 可能な限り平滑化されたものとなると考えられる。

ところが, $D_1(Q)$ が凸関数でない (c) の場合には, ピークをできるだけ小さくするものではなく, むしろ洪水継続時間を短くするような解を与えており, 2.3. で述べたわれわれの求める最適洪水制御とは, ほど遠いものといえるため, 以後の計算例ではすべて凸関数を用いることにする。

つぎに, Fig. 2 に示す A-2 型に対する計算例を示そう。DP の定式化は (16), (17) 式よりつぎのようになる。

$$\begin{cases} f_t(S_1) = \min_{0 \leq S_1 \leq V_1} \{D_2(O_1(t) + q_1(t)) + f_{t+1}(S_1(t) + I_1(t) - O_1(t))\} & \dots\dots\dots (26) \\ f_T(S_1) = D_2(S_1(T) + I_1(T) - C_1 + q_1(T)) & \dots\dots\dots (27) \end{cases}$$

計算条件として $V_1=59$, $T=14$, $C_1=59$, $D_2(Q) = Q^2/100$ とし, 仮想洪水 $\{I_1(t)\}$, $\{q_1(t)\}$ を Table 2 の上段に示すものを与えて, (26), (27) 式により計算した結果は同表に示す通りである。A-1 型の場合の結果からも明らかに, $D_2(Q)$ を凸関数としたことによって, 地点2の通過流量 $\{Q_2(t)\}$ は可能な限り平滑化されている。すなわち解 $\{O_1(t)\}$ は $q_1(t)$ が大きいときに小さくなっているわけで, いわゆる不定率調節となっている。

Table 2 An example of computed solutions for the system type A—2 shown in Fig. 2.

A—2	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	$I_1(t)$	2	4	6	8	12	16	18	14	10	8	6	6	4	4
$S_1(1)$	$q_1(t)$	2	2	4	8	12	16	16	14	12	10	8	6	6	4
0	$O_1(t)$	2	4	6	8	5	0	0	2	5	7	6	6	4	4
	$Q_2(t)$	4	6	10	16	17	16	16	16	17	17	14	12	10	8
20	$O_1(t)$	11	11	10	8	5	0	0	2	5	7	6	6	4	4
	$Q_2(t)$	13	13	14	16	17	16	16	16	17	17	14	12	10	8
59	$O_1(t)$	17	17	15	11	8	4	4	6	8	8	6	6	4	4
	$Q_2(t)$	19	19	19	19	20	20	20	20	20	18	14	12	10	8

以上のように評価地点が一個所の場合は、評価関数として任意の凸関数を与えれば十分であることがわかったが、つぎに評価地点が2地点ある A—3 型 (Fig. 2) の場合の計算例を示し、若干の考察を加える。

この場合の DP の定式化は、(16), (17) 式より、

$$\begin{cases} f_t(S_1) = \min_{0 \leq S_1 \leq V_1} \{D_1(O_1(t)) + D_2(O_1(t) + q_1(t)) + f_{t+1}(S_1(t) + I_1(t) - O_1(t))\} & \cdots \cdots (28) \\ f_T(S_1) = D_1(O_1(T)) + D_2(O_1(T) + q_1(T)) & \cdots \cdots (29) \end{cases}$$

となる。 $I_1(t), q_1(t), V_1, T, C_1$ は A—2 型の場合と同じ値を与え、評価地点 1, 2 に付与する評価関数は、つぎの4通りを考えることにする。

$$(A) \quad \{D_1(Q) = Q^2/100, D_2(Q) = Q^2/200\} \quad (B) \quad \{D_1(Q) = (Q/12)^2, D_2(Q) = (Q/25)^2\}$$

$$(C) \quad \{D_1(Q) = D_2(Q) = Q^2/100\}$$

$$(D) \quad \begin{aligned} D_1(Q) &= \log \{12/(12-Q)\} \quad (Q < 12), \quad D_2(Q) = \log \{25/(25-Q)\} \quad (Q < 25) \\ &= Q^2 \quad (Q \geq 12) \quad \quad \quad = Q^2 \quad (Q \geq 25) \end{aligned}$$

(ただし、 $Q_{1d}=12, Q_{2d}=25$ と仮定)

このような条件のもとで得られた計算結果を Table 3 に示すが、この表よりつぎのことがわかる。すなわち、(A), (B), (C), (D) はいずれも凸関数であるが、評価地点が2箇所あるため、A—1, A—2 の場合のように評価地点の通過流量 $\{Q_1(t), \{Q_2(t)\}$ が両者とも“可能な限り”平滑化されているとはいえない。このことは Table 2 の $\{Q_2(t)\}$ と比較すれば明らかであり、2.3.でも述べたように当然起る問題であって、評価関数の相対的大小関係の妥当な決定法が問題となる。すなわち、ここには示さなかったが、 $D_2(Q) \gg D_1(Q)$ とした場合の計算結果は評価地点 1 を考慮しない A—2 型の解とほぼ同等であり（逆もいえる）、評価関数の大小関係が、いわゆる重要度の大小関係と直接関係があることは明らかであるが、われわれはこの重要度なる概念を導入する前段階、すなわち、まず、いずれの地点でも破堤・はん濫を起さない調節を目指すべきであり、そのような解を与える評価関数の組合せを追求すべきである。ここに示した計算例はそうした意味で行なったものであり、この計算例では Table 4 に示すごとく、(D) が最も望ましい結果を示している。すなわち、制御の結果地点 i を通過するピーク流量を Q_{ip} 、地点 i の許容流量を Q_{id} としたとき、次式、

$$\frac{Q_{ip}}{Q_{id}} \leq 1 \quad (\text{for all } i) \quad \cdots \cdots (30)$$

を満足することがもっとも望ましいわけであり、(D) による解は初期貯水量 $S_1(1)=59$ (満水) の場合でさえ (20) 式を満足している。しかし、これはこの場合のみの結果であって一般的に (D) のタイプがよいというわけではもちろんない。

Table 3 Examples of computed solutions by the evaluation functions (A), (B), (C) and (D), for the system type A—3 shown in Fig. 2.

A—3	$D_1(Q),$	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Initial condition	$D_2(Q)$	$I_1(t)$ $q_1(t)$	2 2	4 2	6 4	8 8	12 12	16 16	18 16	14 14	10 12	8 10	6 8	6 6	4 6	4 4
$S_1(1)=0$ (empty)	(A)	$O_1(t)$ $Q_2(t)$	2 4	4 6	6 10	7 15	4 16	1 17	2 18	3 17	4 16	6 16	6 14	6 12	4 10	4 8
	(B)	$O_1(t)$ $Q_2(t)$	2 4	4 6	6 10	5 13	4 16	3 19	4 20	4 18	4 16	5 15	5 13	5 11	4 10	4 8
	(C)	$O_1(t)$ $Q_2(t)$	2 4	4 6	6 10	6 14	4 16	2 18	2 18	3 17	4 16	6 16	6 14	6 12	4 10	4 8
	(D)	$O_1(t)$ $Q_2(t)$	2 4	4 6	6 10	6 14	4 16	2 18	2 18	3 17	5 17	5 15	6 14	6 12	4 10	4 8
$S_1(1)=20$	(A)	$O_1(t)$ $Q_2(t)$	11 13	11 13	9 13	7 15	4 16	2 18	2 18	3 17	4 16	6 16	6 14	6 12	4 10	4 8
	(B)	$O_1(t)$ $Q_2(t)$	7 9	7 9	7 11	6 14	5 17	5 21	5 21	5 19	6 18	6 16	6 14	6 12	4 10	4 8
	(C)	$O_1(t)$ $Q_2(t)$	9 11	9 11	9 13	6 14	5 17	3 19	3 19	4 18	5 17	6 16	6 14	6 12	4 10	4 8
	(D)	$O_1(t)$ $Q_2(t)$	8 10	8 10	7 11	7 15	6 18	3 19	3 19	5 19	6 18	6 16	6 14		4 10	4 8
$S_1(1)=59$ (full)	(A)	$O_1(t)$ $Q_2(t)$	15 17	15 17	14 18	11 19	6 18	6 22	6 22	8 22	9 21	8 18	6 14	6 12	4 10	4 8
	(B)	$O_1(t)$ $Q_2(t)$	11 13	11 13	11 15	10 18	10 22	9 25	9 25	9 23	10 22	8 18	6 14	6 12	4 10	4 8
	(C)	$O_1(t)$ $Q_2(t)$	13 15	14 16	12 16	11 19	10 22	9 25	8 24	6 20	7 19	8 18	6 14	6 12	4 10	4 8
	(D)	$O_1(t)$ $Q_2(t)$	11 13	11 13	11 15	11 19	10 22	8 24	8 24	10 24	10 22	8 18	6 14	6 12	4 10	4 8

Evaluation functions (A) $D_1(Q)=Q^2/100$, $D_2(Q)=Q^2/200$
 (B) $D_1(Q)=(Q/12)^2$, $D_2(Q)=(Q/25)^2$
 (C) $D_1(Q)=Q^2/100$, $D_2(Q)=Q^2/100$
 (D) $D_1(Q)=\log\{12/(12-Q)\}$ ($Q<12$)
 $=Q^2$ ($Q\geq 12$)
 $D_2(Q)=\log\{25/(25-Q)\}$ ($Q<25$)
 $=Q^2$ ($Q\geq 25$)

Table 4 Comparison between controled peak discharge Q_{ip} picked up from Table 3 and the allowable peak discharge Q_{id} at the evaluating point i (for $i=1, 2$).

$S_i(1)$	$D_i(Q)$	Q_{1p}	Q_{2p}	Q_{1p}/Q_{1d}	Q_{2p}/Q_{2d}
0	(A)	7	18	0.58	0.72
	(B)	6	20	0.50	0.80
	(C)	6	18	0.50	0.72
	(D)	6	18	0.50	0.72
20	(A)	11	18	0.92	0.72
	(B)	7	21	0.58	0.84
	(C)	9	19	0.75	0.76
	(D)	8	19	0.67	0.76
59	(A)	15	22	1.25	0.88
	(B)	11	25	0.92	1.00
	(C)	14	25	1.17	1.00
	(D)	11	24	0.92	0.96

(30) 式を満足する $D_i(Q)$ の組合せを決定する一般的な手法は今のところないわけであり、そのため、各洪水パターンごとに試算的に求めておく必要がある。

3.2. 計算例と次元の節減化に関する考察

われわれの行なったダム群による最適洪水制御の定式化 (16), (17) 式は DP の N 次元定式化であり、 N 次元問題として解くことにより“ダム群相互の関連を考慮する”ことになるわけである。ところで、一般に DP の分野においては多次元性の問題がある。これは端的に言えば、次元数が多くなることによって計算の実行可能性に限界が生じるということである。もちろん DP の計算は電子計算機で行なうわけであるが、1 次元すなわちダム数 $N=1$ の場合、 S_1 の離散区間の選び方を V_1 の $1/99$ (S_1 の段階を 100) とするなら、少なくとも 100 語の記憶容量が必要であり、 $N=2$ の場合、 S_1, S_2 の離散区間をそれぞれ上と同様に選ぶなら、少なくとも $100 \times 100 = 10^4$ 語必要となる。同様に $N=3$ なら 10^6 語となる。すなわち次元数の増加とともに必要な記憶容量は幾何級数的に増加し、それと同時に計算時間も飛躍的に長くなる。ところが現在のわが国の大型計算機でも記憶容量はせいぜい 8×10^5 語程度にすぎない⁹⁾。それで、上記のような離散区間の選び方をすると、1 次元の場合には計算に要する時間もごくわずかであり、2 次元の場合は最近の計算機で可能であるが計算時間は相当長くなる。さらに 3 次元になると解けない場合が多く、あるいは解けても非常に長時間を要することになる。

この問題の一つの解決策として、離散区間の選び方を粗くすることが考えられるが、あまり粗くすると実用的な解が得られず、根本的な解決策とならないのは当然である。そこで、次元の節減化、すなわち多次元問題をより低次元の問題に置き換えることを考えねばならない。また、適応制御方式に適用する場合、計算の迅速性がことに要求されるため、できることならそれは 1 次元、あるいは 2 次元の問題に置き換える必要がある。

つぎに、ダム群として最も基本的な 2 つのダムからなる洪水制御系について、直列配置と並列配置の場合に分けて、それぞれ計算例を示すとともに次元の節減化の可能性について考察を加えることにする。

1) 直列配置の場合

まず、Fig. 3 の左端に示す S—1 型の場合を考える。この場合の DP の 2 次元定式化は、(16), (17) 式より、

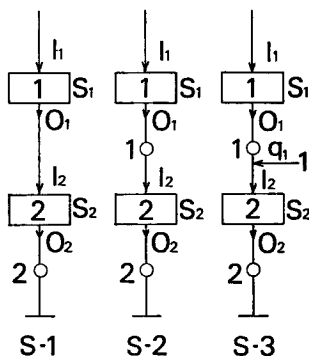


Fig. 3 Designation of the series types of flood control system having two dams.

Table 5 An example of computed solutions for the system type S—1 shown in Fig. 3.

S—1	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(S_1(1), S_2(1))$	$I_1(t)$	1	2	3	5	8	4	3	2	1
(0, 0) (both empty)	$O_1(t)$	0	0	0	0	0	4	3	2	1
	$O_2(t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(0, 19)	$O_1(t)$	0	0	0	0	0	4	3	2	1
	$O_2(t)$	1	1	2	1	1	1	1	1	1
(10, 19)	$O_1(t)$	0	0	0	2	8	4	3	2	1
	$O_2(t)$	2	2	3	3	2	2	3	2	1
(19, 19) (both full)	$O_1(t)$	1	2	3	5	8	4	3	2	1
	$O_2(t)$	3	4	4	4	4	4	3	2	1

$$\left\{ \begin{aligned} f_t(S_1, S_2) &= \min_{\substack{0 \leq S_1 \leq V_1 \\ 0 \leq S_2 \leq V_2}} \{ D_2(O_2(t)) + f_{t+1}(S_1(t) + I_1(t) - O_1(t), S_2(t) \\ &\quad + I_2(t) - O_2(t)) \} \dots\dots\dots(31) \\ f_T(S_1, S_2) &= D_2(S_2(T) + I_2(T) - C_2) \dots\dots\dots(32) \end{aligned} \right.$$

となる。 $V_1 = V_2 = C_1 = C_2 = 19$, $T = 9$, $D_2(Q) = Q^2/100$ とし, $\{I_1(t)\}$ として Table 5 の上段に示したものを与えた計算結果は同表に示す通りである。この結果によると、ダム1は満水になるまで一方的に貯留し、満水後は流入量をそのまま放流するという解で、ダム2は A—1 型と同じく地点2のピークをできるだけ小さくする解となっている。

この場合、 $I_2(t) = O_1(t)$ であることと、一般に $0 \leq S_k \leq V_k$ なる制約条件は、(9) 式より、 $S_k(t) + I_k(t) - V_k \leq O_k(t) \leq S_k(t) + I_k(t)$ なる条件と同等であることを考慮すれば、 $O_2(t)$ の変動域は、 $S_2(t) + O_1(t) - V_2 \leq O_2(t) \leq S_2(t) + O_1(t)$ となり、(31) 式から明らかなように $O_2(t)$ のみが目的関数に直接的影響を受け、 $O_1(t)$ はその $O_2(t)$ の変動域を規定するだけであることがわかる。したがってダム1の操作はかなり自由度があり、Table 5 に示した結果はその一例にすぎないといえる。すなわち、この場合、とくに2次元問題として取扱う必要がないといえよう。

つぎに、Fig. 3 の S—2 型の場合であるが、この定式化は、

Table 6 An example of computed solutions for the system type S—2 shown in Fig. 3, and comparison with the solutions for the system type A—1 on the same conditions.

S—2	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(S_1(1), S_2(1))$	$I_1(t)$	1	2	3	5	8	4	3	2	1
(0, 0)	$O_1(t)$	1	1	2	1	1	1	1	1	1
	$O_2(t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(0, 19)	$O_1(t)$	1	1	1	1	1	1	1	2	1
	$O_2(t)$	1	1	1	1	1	1	1	2	1
(10, 19)	$O_1(t)$	2	2	2	2	3	3	3	2	1
	$O_2(t)$	2	2	2	2	3	3	3	2	1
(19, 19)	$O_1(t)$	3	4	4	4	4	4	3	2	1
	$O_2(t)$	3	4	4	4	4	4	3	2	1
A—1	$I_1(t)$	1	2	3	5	8	4	3	2	1
$S_1(1) = 0$	$O_1'(t)$	1	1	2	1	1	1	1	1	1
10	$O_1'(t)$	2	2	3	3	2	2	3	2	1
19	$O_1'(t)$	3	4	4	4	4	4	3	2	1

$$\left\{ \begin{aligned} f_t(S_1, S_2) &= \min_{\substack{0 \leq S_1 \leq V_1 \\ 0 \leq S_2 \leq V_2}} \{D_1(O_1(t)) + D_2(O_2(t)) + f_{t+1}(S_1(t) + I_1(t) \\ &\quad - O_1(t), S_2(t) + O_1(t) - O_2(t))\} \dots\dots\dots(33) \\ f_T(S_1, S_2) &= D_1(S_1(T) + I_1(T) - C_1) + D_2(S_2(T) + O_1(T) - C_2) \dots\dots\dots(34) \end{aligned} \right.$$

となる。 V_1, V_2, T, C_1, C_2 および $\{I_1(t)\}$ は S—1 型の計算例と同じとし、 $D_1(Q) = Q^2/200$, $D_2(Q) = Q^2/100$ として上式より計算した結果、および上記と同じ $V_1, T, C_1, \{I_1(t)\}, D_1(Q)$ を与え、A—1 型の計算を行なった結果を Table 6 に示す。この表は 2 次元問題として求めた解 $\{O_1(t)\}$ が、ダム 1 と評価地点 1 のみからなる A—1 型の解 $\{O_1'(t)\}$ と全く同等であるということを示している。このことは、ダム 1 と地点 1 からなる系と、ダム 2 と地点 2 からなる系を別々に、1 次元問題として解くことが、2 次元問題として解く場合と同等であることを示唆している。つぎに、このことが一般的にいえるかどうかを考察してみよう。

いま、2 つの 1 次元問題として別々に得られた解を、 $\{O_1'(t)\}, \{O_2'(t)\}$ とし、それによる目的関数の値をそれぞれ、 J'_1, J'_2 とすると、系全体としての目的関数の値 J' は $J' = J'_1 + J'_2$ となる。一方、2 次元問題として得られた解を $\{O_1(t)\}, \{O_2(t)\}$ とし、それらによる目的関数の値を J とすると、 $J = J_1 + J_2$ と表わせる。ここに、 J_1 は $\{O_1(t)\}$ のみによる値、 J_2 は $\{O_2(t)\}$ のみによる値である。ここで、 $J \leq J'$ と仮定する。すなわち、2 つの 1 次元問題として別々に解いた場合が、2 次元問題として解いた場合に劣るか、同等であると仮定する。ところで、 $\{O_1'(t)\}$ は A—1 型の最適解であるから、明らかに $J'_1 \leq J_1$ である。そして $\{O_1'(t)\}$ は $D_1(Q)$ が凸関数であるなら可能な限り平滑化されたものとなってダム 2 へ流入する。ここに、 $J'_1 \leq J_1$ ということは、 $\{O_1(t)\}$ が可能な限り平滑化されたものではないということも意味するが、評価地点 2 における評価関数 $D_2(Q)$ が凸関数であるならば、ダム 2 への流入ハイドログラフは、できるだけ平滑化されたものである方がその操作は容易となることは明らかである。すなわち式で表わせば、 $J'_2 \leq J_2$ ということになる。したがって、 $J' = J'_1 + J'_2 \leq J_1 + J_2 = J$ となり、先の仮定を考えれば、 $J' = J$ でなければならない。すなわち、S—2 型のような場合は、評価関数 $D_1(Q), D_2(Q)$ の大小関係、洪水ハイドログラフの形状にかかわらず、一般に、2 次元問題を 2 つの 1 次元問題に分離して考えてよいといえる。

Table 7 An example of computed solutions for the system type S—3 shown in Fig. 3, and comparison with solutions for the system type A—1 on the same conditions.

S—3	t	1	2	3	4	5	6
	$I_1(t)$	5	8	4	3	2	1
	$q_1(t)$	6	4	2	2	1	0
$S_1(1)=14$	$O_1(t)$	3	5	4	3	2	1
$S_2(1)=19$	$O_2(t)$	9	9	6	5	3	1
A—1	$I_1(t)$	5	8	4	3	2	1
$S_1(1)=14$	$O_1(t)$	4	4	4	3	2	1

つぎに、S—3 型の場合であるが、 $I_2(t)=O_1(t)+q_1(t)$ であることを考慮すれば、DP の定式化はつぎようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} f_t(S_1, S_2) &= \min_{\substack{0 \leq S_1 \leq V_1 \\ 0 \leq S_2 \leq V_2}} \{ D_1(O_1(t)) + D_2(O_2(t)) \\ &\quad + f_{t+1}(S_1(t) + I_1(t) - O_1(t), S_2(t) \\ &\quad + O_1(t) + q_1(t) - O_2(t)) \} \dots\dots\dots (35) \\ f_T(S_1, S_2) &= D_1(S_1(T) + I_1(T) - C_1) \\ &\quad + D_2(S_2(T) + O_1(T) + q_1(T) - C_2) \\ &\quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned} \right.$$

この場合の計算例として、 $V_1=V_2=C_1=C_2=19$ 、 $T=6$ 、 $D_1(Q)=Q^2/100$ 、 $D_2(Q)=100Q^2$ と与え、 $\{I_1(t)\}$ 、 $\{q_1(t)\}$ として、Table 7 の上段に示すものを与えた場合の結果、および上記と同じ $V_1, T, C_1, D_1(Q)$ を与えた A—1 型の結果を同表に示す。この表は、前者の $\{O_1(t)\}$ と後者のそれとが若干異なっていることを示しており、S—3 型の場合には、S—2 型のような分離ができないことを示唆しているようである。

さて、以上に示した計算例と考察を総合し、ことに S—2 型の場合に行なった考察を拡張すれば、一般に、つぎのダムへ流入するハイドログラフがその前のダムによって可能な限り平滑化されるような評価地点配置をしている Fig. 4 の左側に示すような、 N 次元の直列配置のダム群による洪水制御系の問題は、 N 個の 1 次元問題に置き換えることができるといえる。

2) 並列配置の場合

まず、Fig. 5 の左端に示す P—1 型の場合を考えよう。この DP による定式化は、(16)、(17) 式によると、つぎのようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} f_t(S_1, S_2) &= \min_{\substack{0 \leq S_1 \leq V_1 \\ 0 \leq S_2 \leq V_2}} \{ D_8(O_1(t) + O_2(t)) + f_{t+1}(S_1(t) + I_1(t) \\ &\quad - O_1(t), S_2(t) + I_2(t) - O_2(t)) \} \dots\dots\dots (37) \\ f_T(S_1, S_2) &= D_8(S_1(T) + I_1(T) - C_1 + S_2(T) + I_2(T) - C_2) \dots\dots\dots (38) \end{aligned} \right.$$

計算条件として、 $V_1=V_2=C_1=C_2=19$ 、 $T=10$ 、 $D_8(Q)=Q^2/100$ とし、 $\{I_1(t)\}$ 、 $\{I_2(t)\}$ として、Table 8

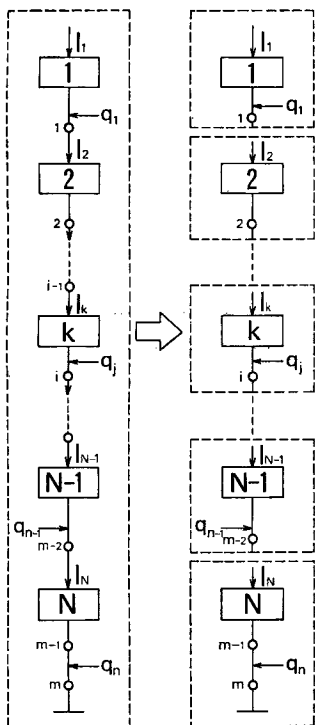


Fig. 4 Translation of an N -dimensional series type system into one-dimensional N systems by separation.

Table 8 An example of computed solutions for the system types P—1 and P—2 shown in Fig. 5.

P—1	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(S_1(1), S_2(1))$	$I_1(t)$	1	2	3	5	8	4	3	2	1	0
	$I_2(t)$	0	1	2	3	5	8	4	3	2	1
(0, 0) (both empty)	$O_1(t)$	1	2	1	0	0	1	2	2	1	0
	$O_2(t)$	0	1	2	2	2	1	0	0	1	1
	$Q_3(t)$	1	3	3	2	2	2	2	2	2	1
(0, 19)	$O_1(t)$	0	0	0	0	0	4	3	2	1	0
	$O_2(t)$	5	5	4	4	4	0	1	3	2	1
	$Q_3(t)$	5	5	4	4	4	4	4	5	3	1
(10, 19)	$O_1(t)$	0	0	0	4	6	4	3	2	1	0
	$O_2(t)$	5	5	6	2	0	2	3	3	2	1
	$Q_3(t)$	5	5	6	6	6	6	6	5	3	1
(19, 19) (both full)	$O_1(t)$	1	2	3	6	7	4	3	2	1	0
	$O_2(t)$	6	5	4	1	0	3	4	3	2	1
	$Q_3(t)$	7	7	7	7	7	7	7	5	3	1
P—2	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(0, 0)	$O_1(t)$	1	1	1	1	2	1	1	1	1	0
	$O_2(t)$	0	1	1	1	1	1	1	1	2	1
	$O_3(t)$	1	2	2	2	3	2	2	2	3	1
(0, 19)	$O_1(t)$	1	1	1	1	1	1	1	2	1	0
	$O_2(t)$	3	3	3	3	3	4	4	3	2	1
	$Q_3(t)$	4	4	4	4	4	5	5	5	3	1
(10, 19)	$O_1(t)$	2	2	2	2	3	3	3	2	1	0
	$O_2(t)$	3	3	4	4	3	3	3	3	2	1
	$Q_3(t)$	5	5	6	6	6	6	6	5	3	1
(19, 19)	$O_1(t)$	4	3	4	4	4	4	3	2	1	0
	$O_2(t)$	3	4	3	3	3	3	4	3	2	1
	$Q_3(t)$	7	7	7	7	7	7	7	5	3	1

Evaluation functions $D_3(Q) = Q^2/100$ (for P—1), $D_1(Q) = Q^2/200$
 $D_3(Q) = Q^2/100$ (for P—2)

の上段に示すものを与えると、(37)、(38)式による解は、同表の上半に示すものとなる。評価関数として凸関数を与えたため、 $\{Q_3(t)\}$ は可能な限り平滑化されている。

この場合の次元の節減化を考えてみよう。(37)、(38)式は帰納法によりつぎのように変形できる。まず(38)式は、明らかに $f_T(S_1, S_2) = g_T(S_1 + S_2)$ と表わせる。そこで、 $f_{t+1}(S_1, S_2) = g_{t+1}(S_1 + S_2)$ と表わせるとすると、

$$\begin{aligned}
 f_t(S_1, S_2) &= \min_{S_1(t)+I_1(t)-V_1 \leq O_1(t) \leq S_1(t)+I_1(t), S_2(t)+I_2(t)-V_2 \leq O_2(t) \leq S_2(t)+I_2(t)} \{D_3(O_1(t)+O_2(t)) + f_{t+1}(S_1(t)+I_1(t)-O_1(t), S_2(t)+I_2(t)-O_2(t))\} \\
 &= \min_{S_1(t)+S_2(t)+I_1(t)+I_2(t)-V_1-V_2 \leq O_1(t)+O_2(t) \leq S_1(t)+S_2(t)+I_1(t)+I_2(t)} \{D_3(O_1(t)+O_2(t)) + g_{t+1}(S_1(t)+S_2(t)+I_1(t)+I_2(t)-O_1(t)-O_2(t))\} \\
 &= g_t(S_1 + S_2)
 \end{aligned}$$

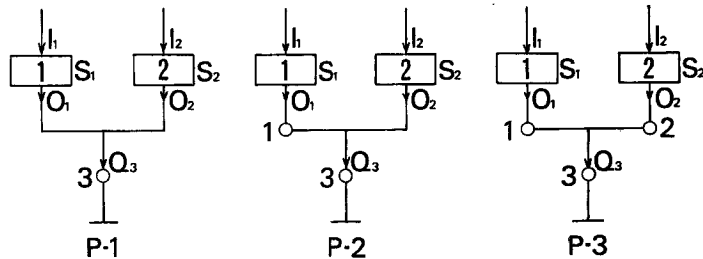


Fig. 5 Designation of the parallel types of flood control system having two dams.

となり, $S_1(t) + S_2(t) = S(t)$, $O_1(t) + O_2(t) = O(t)$, $V_1 + V_2 = V$, $C_1 + C_2 = C$, $I_1(t) + I_2(t) = I(t)$ と置くことにより, 結局 (37), (38) 式は,

$$\begin{cases} f_t(S) = \min_{S(t)+I(t)-V \leq O(t) \leq S(t)+I(t)} \{D_s(O(t)) + f_{t+1}(S(t) + I(t) - O(t))\} \\ f_T(S) = D_s(S(t) + I(t) - C) \end{cases}$$

と変形される。これは A-1 型と同じ定式化であり, $\{O(t)\}$ のみを決定する一次元問題である。ここに, $O_1(t) + O_2(t) = O(t)$ という関係があるため, $O_1(t), O_2(t)$ の最適解の組は自由度 1 で決定され, 先に示した計算結果はそのうちの一つにすぎない。つぎに, P-2 型の計算例を示そう。この DP の定式化は, (16), (17) 式によりつぎのようになる。

$$\begin{cases} f_t(S_1, S_2) = \min_{\substack{0 \leq S_1 \leq V_1 \\ 0 \leq S_2 \leq V_1}} \{D_1(O_1(t)) + D_s(O_1(t) + O_2(t)) \\ \quad + f_{t+1}(S_1(t) + I_1(t) - O_1(t), S_2(t) + I_2(t) + O_2(t))\} \dots\dots\dots (39) \\ f_T(S_1, S_2) = D_1(S_1(T) + I_1(T) - C_1) \\ \quad + D_s(S_1(T) + I_1(T) - C_1 + S_2(T) + I_2(T) - C_2) \dots\dots\dots (40) \end{cases}$$

評価関数として, $D_1(Q) = Q^2/200$, $D_s(Q) = Q^2/100$ を与え, 他の条件は P-1 型の場合と全く同様とした場合の計算結果を Table 8 の下半に示す。この結果を見る限りでは, 地点 1, 3 の通過流量は可能な限り平滑化されている。それは, $\{O_1(t)\}$ については, Table 6 の下段に示した A-1 型の結果を, $\{Q_3(t)\}$ に関しては, 先の P-1 型の結果を参照すれば, それぞれ同等であることよりわかる。このことが一般的にいえるかどうか考えよう。DP の定式化ではなく, もとの目的関数 J について考える。この場合の J は, $J = \sum_{t=1}^T D_1(O_1(t)) + \sum_{t=1}^T D_s(O_1(t) + O_2(t))$ となり, D_1, D_s はいずれも凸関数であるから D_1, D_s の相対的大小関係とは関係なしに, J を最小化するには, 第 1 項と第 2 項を独立に最小化すればよい。それには, A-1 型の場合に考察したように $\{O_1(t) + O_2(t)\}$ および $\{O_1(t)\}$ を可能な限り平滑化すれば, この目的は達成されると考えられる。そしてこの場合は, $O_1(t)$ と $O_2(t)$ は全く独立であるところから, そのことが可能となる。したがって, P-2 型の場合は, 一般に, 評価関数の大小に関係なく, (39), (40) 式を解くことによって, 地点 1, 3 におけるハイドログラフをいづれも可能な限り平滑化する解が得られるといえる。すると, この場合の次元の節減は明らかに可能である。すなわち, ダム 1 は評価地点 1 のみを考慮する A-1 型の計算, ダム 2 は評価地点 3 のみを考慮するやはり A-1 型の計算を行なうことによって, 2 次元問題として解いた場合と同等の結果が得られる。

つぎに P-3 型の計算例を示そう。この DP の定式化は, (16), (17) 式よりつぎのようになる。

$$\begin{cases} f_t(S_1, S_2) = \min_{\substack{0 \leq S_1 \leq V_1 \\ 0 \leq S_2 \leq V_1}} \{D_1(O_1(t)) + D_2(O_2(t)) + D_s(O_1(t) + O_2(t)) \\ \quad + f_{t+1}(S_1(t) + I_1(t) - O_1(t), S_2(t) + I_2(t) - O_2(t))\} \dots\dots\dots (41) \\ f_T(S_1, S_2) = D_1(S_1(T) + I_1(T) - C_1) + D_2(S_2(T) + I_2(T) - C_2) \end{cases}$$

Table 9 Comparison of computed solutions by the evaluation functions (I) and (II), for the system type P—3 shown in Fig. 5.

P—3		t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(S_1(1), S_2(1))$	$D_t(Q)$	$I_1(t)$	1	2	3	5	8	4	3	2	1	0
		$I_2(t)$	0	1	2	3	5	8	4	3	2	1
(0, 0) (both empty)	(I)	$O_1(t)$	1	1	1	1	1	1	2	1	1	0
		$O_2(t)$	0	1	1	1	2	1	1	1	1	1
		$Q_3(t)$	1	2	2	2	3	2	3	2	2	1
	(II)	$O_1(t)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
		$O_2(t)$	0	1	1	2	2	2	2	3	2	1
		$Q_3(t)$	1	2	2	1	1	1	2	1	3	1
(0, 19)	(I)	$O_1(t)$	1	1	1	1	1	1	1	2	1	0
		$O_2(t)$	3	3	3	4	3	4	3	3	2	1
		$Q_3(t)$	4	4	4	5	4	5	4	5	3	1
	(II)	$O_1(t)$	1	1	1	1	1	1	1	2	1	0
		$O_2(t)$	3	3	3	3	3	4	4	3	2	1
		$Q_3(t)$	4	4	4	4	4	5	5	5	3	1
(10, 19)	(I)	$O_1(t)$	2	2	2	2	3	3	3	2	1	0
		$O_2(t)$	3	3	4	4	3	3	3	3	2	1
		$Q_3(t)$	5	5	6	6	6	6	6	5	3	1
	(II)	$O_1(t)$	2	2	3	3	2	2	3	2	1	0
		$O_2(t)$	3	4	3	3	3	4	3	3	2	1
		$Q_3(t)$	5	6	6	6	5	6	6	5	3	1
(19, 19) (both full)	(I)	$O_1(t)$	3	4	4	4	4	4	3	2	1	0
		$O_2(t)$	4	3	3	3	3	3	4	3	2	1
		$Q_3(t)$	7	7	7	7	7	7	7	5	3	1
	(II)	$O_1(t)$	3	4	4	4	4	4	3	2	1	0
		$O_2(t)$	4	3	3	3	3	3	4	3	2	1
		$Q_3(t)$	7	7	7	7	7	7	7	5	3	1

Evaluation functions (I) $D_1(Q) = Q^2/200$, $D_2(Q) = Q^2/300$, $D_3(Q) = Q^2/100$ (II) $D_1(Q) = D_2(Q) = D_3(Q) = Q^2/100$

$$+D_3(S_1(T)+I_1(T)-C_1+S_2(T)+I_2(T)-C_2) \dots\dots\dots(42)$$

これに、P—2 型と同じ条件を与え、評価関数としてつぎの 2 組、

(I) $\{D_1(Q) = Q^2/200, D_2(Q) = Q^2/300, D_3(Q) = Q^2/100\}$

(II) $\{D_1(Q) = D_2(Q) = D_3(Q) = Q^2/100\}$

を与えて計算を行なった結果は、Table 9 に示す通りである。この表より、評価関数が (I), (II) と異なるものであるにもかかわらず、全く同じ解となっていること、および Table 8 の P—2 型とも同等であることがわかる。この理由は P—2 型の場合と全く同じであり、P—3 型は P—2 型と同等であることがわかる。

以上に示した並列配置の場合に対する計算例と考察の結果、つぎのようなことがいえる。まず、P—1 型の場合の考察を拡張すれば、Fig. 6 に示すような並列配置の N 次元問題は、

$$I(t) = \sum_{k=1}^N I_k(t), \quad S(t) = \sum_{k=1}^N S_k(t), \quad O(t) = \sum_{k=1}^N O_k(t), \quad V = \sum_{k=1}^N V_k, \quad C = \sum_{k=1}^N C_k,$$

および

$$q(t) = \sum_{j=1}^n q_j(t)$$

とする1つの仮想ダムを想定することにより、A-2型の1次元問題として解くことができる。また、P-2, P-3型の場合の結果を拡張すれば、Fig. 6において、支川 n がなく、支川 $1, 2, \dots, j, \dots, n-1$ の直下流に

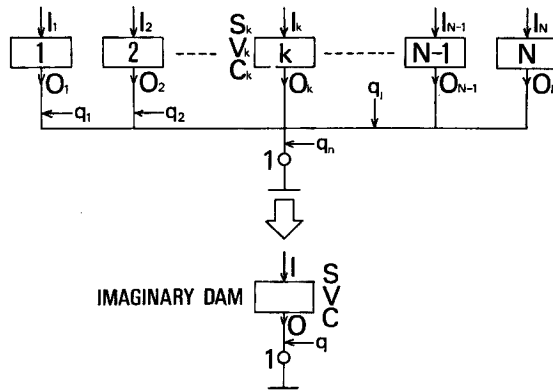


Fig. 6 Translation of an N -dimensional parallel type system into one-dimensional imaginary system by summing up all elements.

Table 10 Comparison of CPU T for the various conditions.

System type	N	T	V	CPU T (sec)	Kinds of computer
A-1	1	15	99	32	FACOM 230-60
A-2	1	14	59	28	HITAC 5020
A-3	1	14	59	18	FACOM 230-60
S-1	2	9	19	196	
		9	19	436	HITAC 5020 (HCM : 24KW)
S-2	2	9	19	676	
S-3	2	9	19	725	
P-1	2	10	19	418	
P-2	2	10	19	640	FACOM 230-60 (HCM : 84KW)
		10	19	300	
P-3	2	10	19	387	
P-1'	3	10	9	995	

N ; Number of dams.

T ; Number, flood control time interval divided into.

V ; Number, effective capacity of dam reservoirs divided into.

CPU T ; Occupied time of central processing unit.

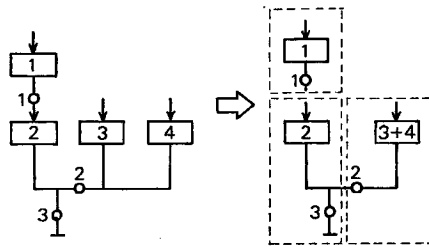


Fig. 7 An example of diminution of system dimension, showing translation into three one-dimensional systems from a four-dimensional system.

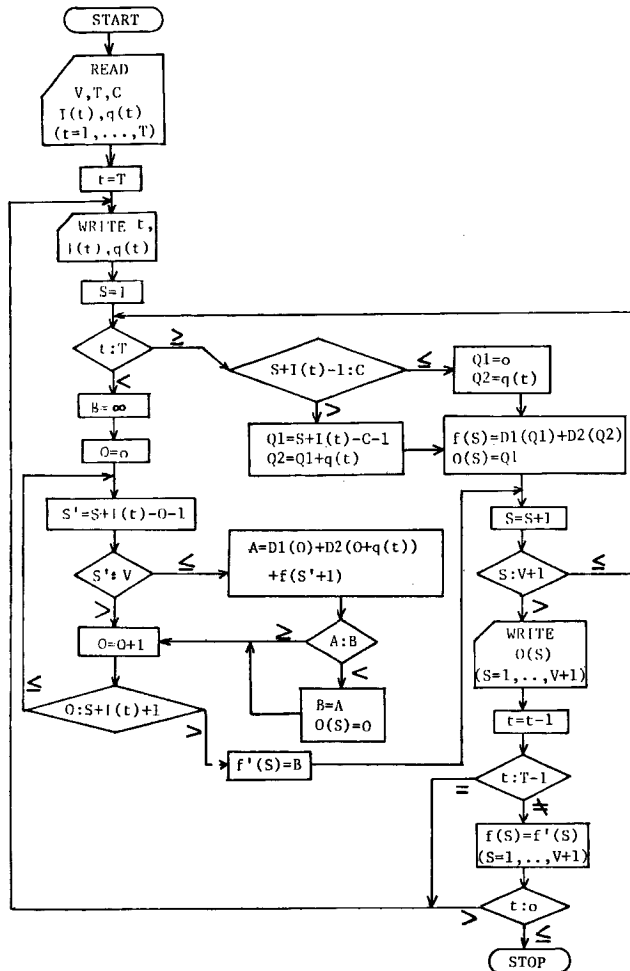


Fig. 8 An example of flowchart (for the type A-3 shown in Fig. 2).

それぞれ評価地点を有し、かつその評価地点で可能な限り平滑化されるような評価地点配置がなされている多次元問題は、その評価地点の上流のみを考慮する1次元問題の組に分離することができるといえる。

以上、直列、並列の基本的な場合について行なった考察の結果を総合すれば、直列、並列の混在する、かなり一般的な洪水制御系の次元の節減化が可能であり、たとえば Fig. 7 の左に示すような4次元問題は、S-2 型、P-1 型、P-2 型で考察した結果を適用すれば、その右に示すように、3つの1次元問題に置き換えることが可能になる。しかし、評価地点、支川の配置形式によっては、このような次元の節減化ができない場合もあり、こうした場合、準最適化についての検討、あるいはラグランジュの乗数法等の数学的手法¹⁰⁾を応用すること等によって、さらに次元の節減化の可能性が期待できると考えられる。また、実際現象による次元の節減化ということも考えられよう。すなわち、洪水が水系全体に同時に起らない場合である。

なお、われわれがここに示した一連の計算を行なうに際し、作成した電子計算機のプログラムのフローチャートの一例として、A-3 型の場合を Fig. 8 に示す。また、各種の条件に対する計算所要時間の参考として、CPUT (中央処理装置占有時間) の例を Table 10 に示す。ここに、P-1' 型とは、P-1 型のダム数3の場合である。

4. あとがき

ダム (群) による洪水調節において、できるだけ正確かつ迅速な洪水予知は欠くことのできないものであるが、不十分な洪水予測であっても、それに対して柔軟かつ最適に対処していく調節方式の確立が要求されている。こうした調節方式として、適応制御方式等が考えられるが、そのための一つの支柱となるものとして、任意の洪水に対する最適調節の解を合理的、普遍的、かつ迅速に求める手法の確立が必要である。

本研究では、そうした手法に DP を利用することがきわめて有効であると考え、まず、ダム群相互の関連、ダム残流域群の効果、多地点防御を考慮する一般的な洪水調節系の数学的表現を行ない、それに対する DP の定式化 ((16), (17) 式) を試みた。また、それと同時にわれわれの考える洪水調節の目的について明らかにし、数種の評価関数を設定した。ついで、9種の基本的な洪水調節系の型を想定し、仮定の諸数値を与えた (16), (17) 式による計算例を示すとともに、つぎのような考察を行なった。まず、もっとも基本的な単ダムの場合に対し、設定した評価関数の妥当性および問題点を考察し、その結果、評価地点が1地点の場合は、任意の凸関数で十分であるが、2地点以上 (ただし A-3 型のように、途中で調節不可能な支川が流入する評価地点配置の場合) になると、その相対的大小関係を決定する必要があり、その関係の妥当な決定はいまのところ試算法によらざるを得ないことが明らかとなった。つぎに、多次元性の問題に対処する次元の節減化の必要性を指摘し、ダム群としてもっとも基本的な2つのダムからなる系を、直列と並列に分けて計算例を示すとともに次元の節減化の可能性を追求し、その結果、評価関数として凸関数を用いる限り、かなり一般的な多次元問題を、1次元あるいは2次元の問題に置き換えうることが明らかとなったが、それが不可能な場合も多々あり、そのために別の手法を考えなければならないことを指摘した。

本研究は概略上記のようであるが、上記したもの以外に、今後さらに研究すべき事項として、(1) DP では時間、流量等を離散的に扱うが、その単位時間、単位流量等の合理的な決定法の検討、(2) 洪水流の非線形効果の導入、(3) 考慮にいれる残流域流入支川の限界の合理的決定、等があり、さらに一般に、適応制御方式等に関連して、洪水予知法、その予測精度の定量的評価等の研究を推し進めなければならないことはいままでもない。なお、評価関数の相対的大小関係の妥当な決定法がいまのところ試算法によらざるを得ないということは、迅速性を要求する適応制御方式にとって致命的であるため、(16), (17) 式の修正、あるいは別の形式の定式化を目下検討中である。

最後に、本研究を行なうにあたって、終始御指導をいただいた京都大学工学部、石原藤次郎教授に深く感謝するとともに、適切な助言をいただいた当研究所、石原安雄教授、計算および図面の作成等に絶大な援助を願った中部地建、入江洋樹氏、京都大学大学院学生、斎藤雄三郎、横田稷二の両君に厚く謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 防災ハンドブック編集委員会編：防災ハンドブック，技報堂，pp.384～388.
- 2) たとえば，川畑幸夫編著：水文気象学，地人書館，1961，pp.17～29.
- 3) たとえば小田中敏夫：ダイナミック・プログラミング，丸善株式会社，1962.
- 4) Tou, J. T. 原著，中村嘉平，伊藤正美，松尾強共訳：現代制御理論，コロナ社，1967，pp.9～10.
- 5) 前出4)
- 6) Bellman, R.: Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1957.
- 7) 前出3)
- 8) 佐々木八郎：河道計画の合理化に関連する諸問題の研究，京都大学学位論文，pp.10～11.
- 9) たとえば，野村電子計算センター編：100万人のコンピュータ事典，コンピュータ・エージ社，1968，pp.334～343.
- 10) 前出3)