

斜面透水層中の浸透流

福 尾 義 昭

GROUND WATER FLOW DUE TO THE INFILTRATION IN SLOPING SOIL LAYER

By Yoshiaki FUKUO

Synopsis

Ground water flow may be generated in sloping soil layer laid on semi-pervious rock surface when the infiltration of rain water I throughout the soil layer exceeds in the downward leakage of water L out of bed rock surface. The author investigated theoretically the development of such a flow due to the infiltration under semi-infinite region of rainfall in the case where the bed rock surface is flat with a inclination $b \equiv \tan \beta$ to horizontal plane and the soil layer has a porosity σ , permeability k and an uniform vertical thickness D and found an uniform flow which is covered by two free surfaces; the one stretching downstream from upper limit of leak surface with a constant inclination $c \equiv \tan \gamma$ to horizontal surface and the other growing upwardly at a constant rate $(I-L)/\sigma$ in parallel with the bed rock surface. This flow exists within the limit of conditions $1-i \geq (1-l)(1-\tan^2 \beta/2)$ and $i > l$, where $i \equiv I/k$ and $l \equiv L/k$ may be called the specific infiltration and leakage, respectively. In the case where $1-i = 1-\tan^2 \beta/2$, then $\gamma = \beta/2$. The frontal line of steady free surface will seep at the position in the distance $S = UD \sec \beta / (I-L)$ (U : horizontal Darcy's velocity of flow) downwardly along sloping soil surface from the fringe of rain-fall region at the time $T = \sigma D / (I-L)$ after the wetting front of the infiltration reached the bed rock surface.

1. ま え が き

山腹斜面や人工造成地が豪雨で崩壊する際に、その斜面土壤中に形成された地下水流が重要な役割を演ずることは、今までの崩壊災害に多くの例を見る。田中氏¹⁾²⁾らは雨水の地中への浸透について詳しく研究し、浸透を一般に2段階に分けている。その第一段階は、浸透開始とともに浸透前面 wetting front が地中を下方に進行し、それが不透水層または相対的に水を通しにくい層の表面あるいは地下水面または毛管水帯の上面に達し、浸透前線が消失して、地表面からこのような面までの間の均等質の土の層がすべてほぼ均一な含水状態になるまでの間の浸透である。この第一段階が終了すると、不透水層表面等に自由水面が生成され、雨水は地下水流となって重力と水圧のもとにいわゆるダルシー則に従って流下することになる。この段階を第二段階と呼んでいる。この地下水流が斜面表面上に露出したときに piping 現象と称し、崩壊がよく起ることを多くの実験例を挙げて論じている³⁾。

第一段階については多くの研究があり不飽和帯の水分移動の問題として現在も解明されつつあるが、第二段階の地下水浸透流についてはまだ考察は少なく、研究すべき多くが残っているように思う。それは浸透水量や漏洩水量によって刻々変化する自由水面をもった地下水流を求める問題であり、解析が困難であるせいだろう。著者はこの浸透地下水流の発達を考察し、田中氏らが指摘するパイピング現象の過程を解析し、山腹崩壊の理論的解明に努力したいと思っている。この論文は崩壊理論の第一歩として上述の浸透地下水流の発達を考察したものである。

2. 浸透地下水流の基礎方程式

Fig. 1 にみられるように、一様な漏洩率 leakage L をもった平面状傾斜基岩の上に一様な厚み D の風化土壌層を考える。図のように、正の x 軸上無限遠まで一様な降雨があり、この降雨水が一様な浸透率 infiltration I で風化層を浸透第一段階として鉛直下方に浸透する。この浸透水の wetting front が基岩表

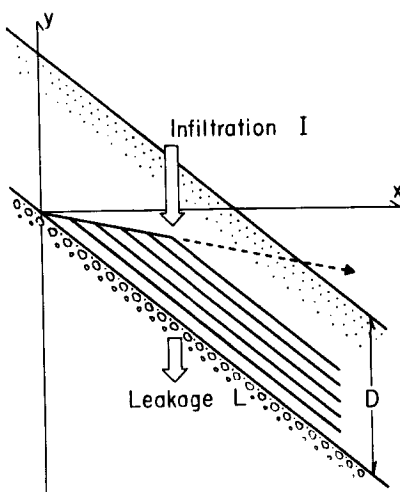


Fig. 1 Model of ground water flow due to the infiltration in sloping soil layer laid on semi-pervious rock surface.

面に達した時に時刻 $t=0$ と定め、これ以後浸透水が形成する地下水流の発達を考察する。

地下水流は勿論流速零から出発し発達するが、多くの例で取扱うように水流にはたらく摩擦力が大きく水流は直ちに定常流としてダルシー則に従って流下すると考えよう。 y 軸を鉛直上方にとると

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{g}{k} U \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{g}{k} V - g \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 ρ は水の密度、 g は重力加速度、 k は風化層の透水係数であり、 p , U および V はそれぞれ地下水流の水圧、 x 方向 y 方向の比流量（ダルシー流速）である。

連続の方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

境界条件は

$$\text{自由表面 } y=\eta(t, x) \text{ で } \sigma \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} - V - I = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{基岩表面 } y=h(x) = -bx \text{ で } U \frac{\partial h}{\partial x} - V - L = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 σ は土壌層の空隙率である。

(3) 式より

$$\int_b^a \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dy = \int_b^a \frac{\partial U}{\partial x} dy + \left(\sigma \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} - I \right) - \left(U \frac{\partial h}{\partial x} - L \right) = 0$$

すなわち

$$\sigma \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\eta}{h} U dy \right\} = (I-L) \quad \dots\dots\dots (6)$$

初期条件は

$$\eta|_{t=0} = h(x) = -bx \quad \dots\dots\dots (7)$$

である。

3. 準定常解

雨域の端すなわち原点よりある程度の距離を離れたところでは、地下水流発達の条件はいずれの場所でも同じであるから、Fig. 2 でみられるように、自由水面はその時の地下水流 M の上に毎時 $(I-L)$ の水量

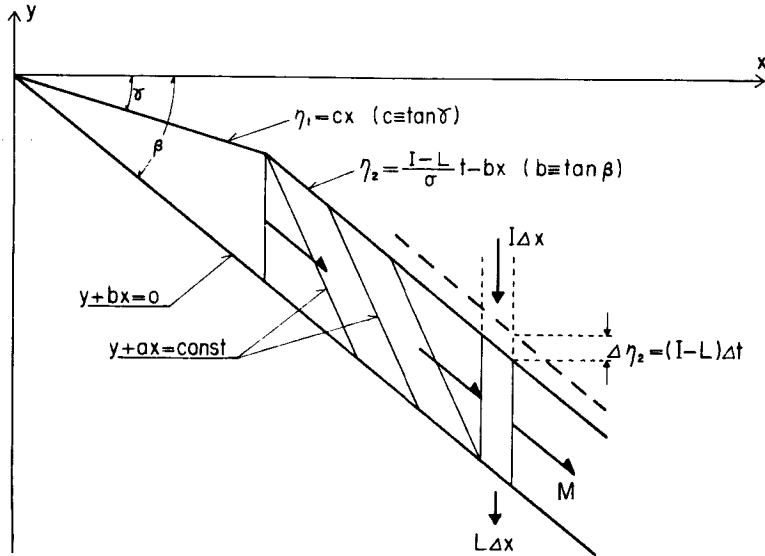


Fig. 2 Relation between steady free surface η_1 , and growing free surface η_2 in ground water flow.

を増加しながら基岩面 $y = -bx$ に平行に発達すると考えられる。浸透水は地下水流にとらえられると前述のように瞬時に定常流になると考えているから、運動は流線を作りながら流れるであろう。一様な流れを予想して流線を

$$\Psi = kA(y+ax), \quad k \text{ は透水係数} \quad \dots\dots\dots (8)$$

とおけば、常数 a および A は運動方程式や連続方程式、境界条件等で決定されるべきものである。

(5) 式 (基岩表面条件) より

$$kA(a-b) = L \quad \dots\dots\dots (9)$$

また、(6) 式 (連続方程式) より

$$\sigma \frac{\partial \eta}{\partial t} + kA \frac{\partial \eta}{\partial x} + bkA = I-L \quad \dots\dots\dots (10)$$

初期条件 (7) を満たすこの微分方程式の解は

$$\eta_2 = \frac{I-L}{\sigma} t - bx \quad \dots\dots\dots (11)$$

これは始めに予想した自由水面の方程式である。 η_2 は時間的に成長する自由水面であるからこれを成長自由水面 Growing free surface と呼ぶことにする。この自由水面をもった浸透流の鉛直断面を通過する流量 M は

$$M=U(\eta_2+bx)=kA\frac{I-L}{a}t \quad \dots\dots\dots(12)$$

で x に無関係であり、浸透量と漏洩量の差 $(I-L)$ によって水面上昇率 $\partial\eta_2/\partial t$ が生じている。

ところで、原点では上流より流入する流量はないから流線 $\Psi=kA(y+ax)$ を保ちながら下流への質量輸送を作り出すためには、(11) 式とはことなつた自由水面を持たなければならない。その自由水面のうち、時間的には変化しない解を考えてみよう。これは $\eta_1=f(x)$ と表現される。 $x=0$ では浸透量はないから地下水水位は 0 であり、 $\eta_1|_{x=0}=f(0)=0$ である。この定常自由水面 steady free surface η_1 が 2 つの流線 $y+ax=0$ と $y+ax=q$ によつてはさまれる x -切片 ($y+ax=q$ と $\eta_1=f(x)$ との交点の x 座標) 中に浸透する水量は $\Psi(y+ax=q)-\Psi(y+ax=0)=qkA$ に等しく、同時に基岩表面 $y=-bx$ が同じ 2 流線ではさまれる x -切片 ($y+ax=q$ と $y+bx=0$ との交点の x 座標) 中に漏失する水量 $Lq/(a-b)$ に等しいはずである。したがって infiltration I が一定ならば自由水面 η_1 の x 軸切片がやはり常係数 q に比例して増加しなければならぬ。これは η_1 が x に比例して増加することを要求する。それで Fig. 2 でみられるように

$$\eta_1 \equiv cx \quad \dots\dots\dots(13)$$

としよう。すると浸透水量は $Iq/(a+c)$ となり、これは漏洩量に等しいから

$$qkA = \frac{q}{a+c} I = \frac{q}{a-b} L \quad \dots\dots\dots(14)$$

また、 $\eta_1=cx$ 上では圧力 p は大気圧に等しくなければならぬ (毛管上昇量は無視する)。運動方程式 (1), (2) より

$$p = \rho g[(aA-1)y - Ax] \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\therefore \eta_1 \equiv cx = \frac{A}{aA-1} x \quad \dots\dots\dots(16)$$

(14) (16) より

$$kA = \frac{aA-1}{a(aA-1)+A} I = \frac{1}{a-b} L \quad \dots\dots\dots(17)$$

この式から a および A の値が決定される。

$$\frac{I}{k} \equiv i, \quad \frac{L}{k} \equiv l \quad \dots\dots\dots(18, 19)$$

を定義し、これをそれぞれ比浸透率、比漏洩率と呼ぶことにすると (17) 式より

$$A = \frac{b}{2(1+b^2)} \left[(i-l) + (1-l) \pm \sqrt{(1-i)^2 - \frac{4}{b^2}(i-l)(1-l)} \right]$$

$$a = \frac{b}{2(i-l)(1-i)} \left[(i-l) + i(1-l) \mp l\sqrt{(1-i)^2 - \frac{4}{b^2}(i-l)(1-l)} \right]$$

根号内が正でなければならぬという条件と、 $1>i$ すなわち透水係数は浸透能より常に大きいという物理的条件と、 $i>l$ という現象発生条件 ($i \leq l$ ならば今考えているような浸透地下水流は生起し得ない) とから

$$i < 1 + \frac{2}{b^2} (1-l) \{1 - \sqrt{1+b^2}\} \quad \dots\dots\dots(20)$$

すなわち

$$i-l < (1-l) \tan^2 \frac{\beta}{2} \quad \dots\dots\dots(20')$$

でなければならぬ。

$$i_c \equiv 1 - (1-l) \left(1 - \tan^2 \frac{\beta}{2}\right) \quad \dots\dots\dots(21)$$

を critical specific infiltration と呼ぶことにしよう。限界というのは、この i_c 以上の浸透量ならば浸透流は上述のような流線 $\Psi=kA(y+ax)$ で表わされなくなり、もっと複雑な流れに移る限界という意味であ

る。特に $l=0$ のときの i_c を i_{0c} と表わせば

$$i_{0c} \equiv i_c(l=0) = \tan^2 \frac{\beta}{2} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$I_{0c} = k \tan^2 \frac{\beta}{2} \quad \dots\dots\dots (23)$$

Fig. 3 に種々の β について I_{0c} と k との関係を図示しておいた。

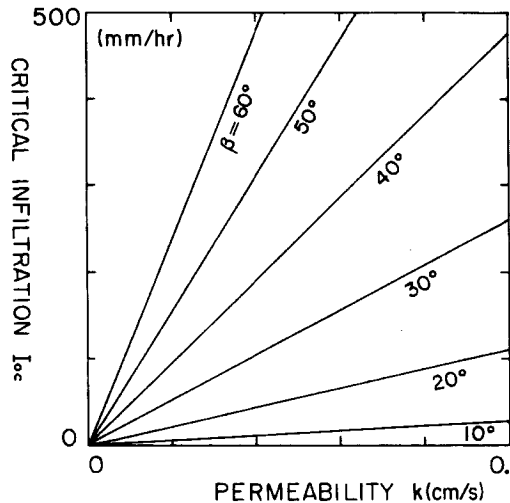


Fig. 3 The values of critical infiltration I_{0c} against the permeability k of sloping soil layer for various inclinations of bed rock surface β ,

根号の正負符号の採択は $i=l$ のとき基岩に達した浸透水はそのまま鉛直下方に流下するという物理的判斷からきめられる。すなわち

$$i=l \text{ のとき } U=kA=0, \quad V=-akA=I=L, \quad a \rightarrow \infty$$

である。したがって

$$A = \frac{b}{2(1+b^2)} \left[(i-l) + (1-l) - \sqrt{(1-i)^2 - \frac{4}{b^2} (i-l)(1-l)} \right] \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$a = \frac{b}{2(i-l)(1-l)} \left[(i-l) + i(1-l) + l \sqrt{(1-i)^2 - \frac{4}{b^2} (i-l)(1-l)} \right] \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$c = \frac{A}{aA-1} = -\frac{b}{2(1-l)} \left[(1-i) - \sqrt{(1-i)^2 - \frac{4}{b^2} (i-l)(1-l)} \right] \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$U=kA = \frac{kb}{2(1+b^2)} \left[(i-l) + (1-l) - \sqrt{(1-i)^2 - \frac{4}{b^2} (i-l)(1-l)} \right] \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$V = -akA = -\frac{kb^2}{2(1+b^2)} \left[(1+i) + 2\frac{l}{b^2} - \sqrt{(1-i)^2 - \frac{4}{b^2} (i-l)(1-l)} \right] \quad \dots\dots\dots (28)$$

Fig. 4 に (24)~(28) 式の解を持ち得る i と l の範囲を斜線で示してある。この範囲の i と l は $l=0$ のときの i の値を i_0 とすると

$$i = l + i_0(1-l), \quad 0 < i_0 \leq i_{0c} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ですべて表現され、この直線上にある i, l を持つ斜面透水層中に生ずる定常自由水面 η_1 の勾配 $c \equiv -\tan \gamma$ は (26) 式から i_0 の関数として

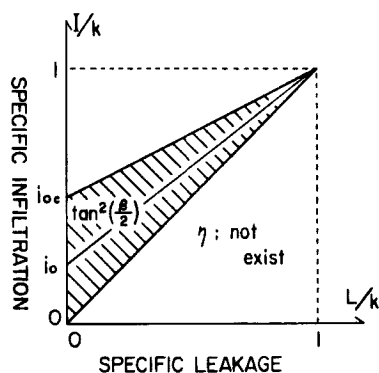


Fig. 4 Domain of specific infiltration and specific leakage where uniform ground water flow with steady and growing free surfaces is allowable to exist

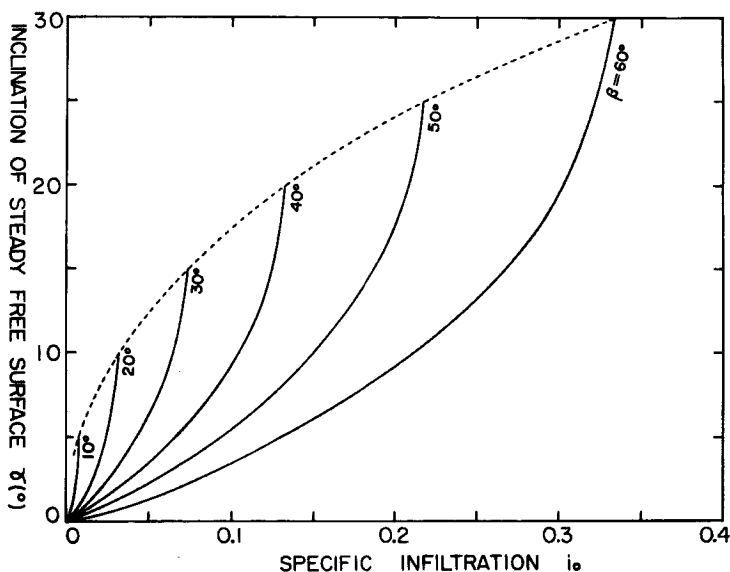


Fig. 5 Relation between the inclination of steady free surface γ and specific infiltration i_0 at no leakage for various inclinations of bed rock surface β

$$C = -\frac{b}{2} \left[(1-i_0) - \sqrt{(1-i_0)^2 - \frac{4}{b^2} i_0} \right] \quad \dots\dots\dots (30)$$

で表わされる。種々の基岩面勾配 $b \equiv -\tan \beta$ について i_0 と γ との関係を Fig. 5 に示す。とくに、 $(1-i_0)^2 - 4i_0/b^2 = 0$ をみたす i_0 すなわち

$$i_{0c} = \tan^2 \frac{\beta}{2} \quad \text{のときには} \quad c \equiv -\tan \frac{\beta}{2} \quad \text{すなわち} \quad \gamma = \frac{\beta}{2} \quad \dots\dots\dots (31)$$

となる。

4. 定常自由水面の発達

前節で求めた定常自由水面 $\eta_1 = cx$ の成長を考えよう。この成長は定常自由水面 η_1 と成長自由水面 η_2 との交線すなわち定常自由水面の前線 frontal line の移動速度で明示出来る。交線は

$$\eta_1 = \eta_2 \quad \text{すなわち} \quad cx = \frac{I-L}{\sigma}t - bx$$

で与えられ

$$x = \frac{I-L}{\sigma(b+c)}t \quad \eta_1 = \eta_2 = \frac{c(I-L)}{\sigma(b+c)}t \quad \dots\dots\dots(32)$$

が得られる。この交線（線といっても現象は 2 次元的であり、Fig. 2 では η_1, η_2 の交点で代表される）を通る鉛直断面での定常水面側の流量は成長水面側の流量に等しくなっている筈である。

$$U(\eta_1 + bx) = U(\eta_2 + bx) \quad \text{すなわち} \quad kA(b+c)x = kA \frac{I-L}{\sigma}t \quad \dots\dots\dots(33)$$

前線の x 軸および y 軸方向の移動速度 u_f および v_f は

$$u_f = \frac{dx}{dt} = \frac{I-L}{\sigma(b+c)} = \frac{U}{\sigma} \quad \dots\dots\dots(34)$$

$$v_f = \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{c(I-L)}{\sigma(b+c)} = \frac{1}{\sigma}(I+V) \quad \dots\dots\dots(35)$$

基岩上の透水層の鉛直厚 D が与えられると、この浸透地下水流が斜面表面上に露出 seepage するまでの時間 T とその露出点の位置 (x_s, y_s) は

$$T = \frac{\sigma}{I-L}D \quad \dots\dots\dots(36)$$

$$x_s = \frac{1}{b+c}D, \quad y_s = \frac{c}{b+c}D \quad \dots\dots\dots(37)$$

であり、斜面表面での雨域端 $(0, D)$ から水流露出点までの斜面に沿っての距離 S は

$$S = \{x_s^2 + (D - y_s)^2\}^{1/2} = \frac{kAD}{I-L} \sec \beta \quad \dots\dots\dots(38)$$

である。

5. 考 察

限界浸透率 I_{0c} はたとえば斜面勾配 $\beta = 30^\circ$ 透水係数 $k = 0.02 \text{ cm/sec}$ においては Fig. 3 から約 50 mm/hr であり、通常の降雨では大部分が限界浸透率以下の場合になるだろう。したがって前述の理論的考察は浸透地下水流の発達の傾向を把握する上に役立つと思われるが、この理論的考察の実用性をさらに高めるためには、降水の斜面透水層中への不飽和浸透や基岩面での漏洩に関するより正確な記述と関連させて解析を進める必要があるだろう。今後もこの線に沿って研究する積りである。

山くづれ、崖くづれ等いわゆる崩壊災害を引きおこす集中豪雨時には恐らく限界浸透率以上の場合の地下水流になっていると思われる。上述の解は地下水流の運動は定常的であると仮定して求めたものであり、したがって定常自由水面の前線下における鉛直断面で作用する x 方向の圧力勾配は流水にはたらく摩擦抵抗に一致せず物理的に不満足な解である。この不完全を除き同時に限界浸透量以上の場合の地下水流を求めるためには非定常運動方程式を取扱う必要があると同時に漏洩量も地下水流の発達と関連した式で解かねばならないだろう。この方向に沿った考察も進め、まえがきにも述べたように、この地下水流が斜面崩壊に果たす役割を解明していきたい。

謝 辞

この研究を進めるに当って、多くの励ましをいただいた当研究所奥田節夫教授に心から感謝します。また

解析を進める上で有益な議論をしていただいた元当研究室受託研究員北岡豪一君および数値計算を心よく手伝っていただいた小原千重子嬢に深くお礼申し上げる。

参 考 文 献

- 1) 田中 茂：山地斜面への滲透に関する研究，建設工学研究所報告，No. 4, 1963, pp. 105~128.
- 2) 田中 茂：雨水の浸透に基く斜面崩壊の実験的研究，第1報，建設工学研究所報告，No. 6, 1964, pp. 131~147.
- 3) 田中 茂・橋本光史：パイピング現象に起因する斜面崩壊の問題点，第3回災害科学総合シンポジウム論文集，京都，1966, pp. 78~79.
- 4) Polubarinova-Kochina, P.Y.: Theory of Ground Water Movement (translated by J.M.R. DeWiest), Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1962, pp. 23, 488~491.