

架構の復元力特性に及ぼす柱軸力変化の影響について

若 林 実・野 中 泰 二 郎

EFFECTS OF THE VARIATION IN COLUMN AXIAL FORCES ON THE RESTORING-FORCE CHARACTERISTICS OF A FRAME

By *Minoru WAKABAYASHI* and *Taijiro NONAKA*

Synopsis

An analytical study is made of the effects of axial force variation on the inelastic horizontal restoring-force characteristics of a rectangular frame. The example considered is a portal frame which is composed of two identical columns and a rigid beam, and is subjected to a constant vertical load and to a varying horizontal force. The relation between the horizontal force and the displacement is sought when the latter increases monotonously. Large elastic-plastic deformation causes the interaction of plastic collapse and the instability which is due to change in geometry. The beam shear increases the compressive axial force in one column and decreases in the other, so that the axial force variation gives rise to the addition of folds in the horizontal force-displacement diagram. In the case of a small vertical load, an initially compressive axial force even becomes tensile in the course of horizontal force application. If the axial force remains compressive in both columns, the axial force variation little influences the frame behavior after the frame reduces to a mechanism with a sufficient number of plastic hinges. If one of the column axial forces changes the sign, however, the axial force variation reduces the maximum horizontal force the frame can carry. It is found, among other things, that the importance of axial force variation depends on the ratio of the column depth to the span. This effect can be neglected when the ratio is sufficiently smaller than unity.

1. 序

さきに、一定鉛直力と変動水平力を受ける架構骨組の荷重・変位関係を、幾何学的変化の影響を考慮して、求める多線型解析を紹介したが¹⁾、そこでは、通常の線材理論と同様、一定軸力を受ける部材の曲げモーメントと曲率の関係を基礎とした。たとえ、鉛直力が一定であっても、水平力の変動に伴って部材軸力も変化するわけであるが、それを考慮して複雑な架構の非弾性域における荷重・変位関係を求めるのは甚だ困難である。したがってここでは、Fig. 1 のような簡単な対称門型架構を例にとり、軸力変化が骨組の弾塑性復元力特性にどのような影響を及ぼすかを理論的に検討する。梁は柱に比べて剛であり、一定鉛直力

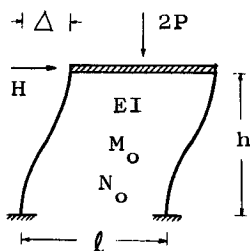


Fig. 1 Problem under consideration.

$2P$ が左右均等に作用しているものとする。この架構に、さらに変動水平力 H が作用し、変形が単調に増大するときの H と水平変位 Δ との関係を求めようとする。柱の軸力を一定値 P に等しいと近似すれば、それは、一定圧縮軸力と変動水平力を受ける一本の柱の挙動から直ちに分るが、厳密には、 H の変動に伴って梁の剪断力が、したがって柱の軸力が変化する。

2. 仮 定

スパンを l 、柱の線型弾性曲げ剛性を EI 、純曲げにおける全塑性モーメントを M_0 、純引張りにおける降伏軸力を N_0 、柱高を h として、下に主な仮定を列挙する。

- 1) 柱は完全弾塑性材料から成り、曲げモーメント M と軸力 N を同時に受けるときの降伏条件は

$$\left| \frac{M}{M_0} \right| + \left| \frac{N}{N_0} \right| = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

で表わされるような理想 I 型 (サンドウィッチ) 断面を有する。

- 2) 部材剪断の影響および軸方向変形による幾何学的変化は無視できる。

- 3) P は N_0 より小さく、また、弾性座屈荷重 $P_{cr} = \pi^2 EI / h^2$ に比べて十分小さい*。

3. 解 析

部材端部における断面力の大きさおよび方向を Fig. 2 のようにとる。すなわち、柱上下端の曲げモーメントを、左右でそれぞれ、 M_l および M_r 、剪断力を H_l および H_r 、圧縮軸力を $P-Q$ および $P+Q$ とする。幾何学的な変化を考慮し、変形した状態に対して釣合条件を書けば、

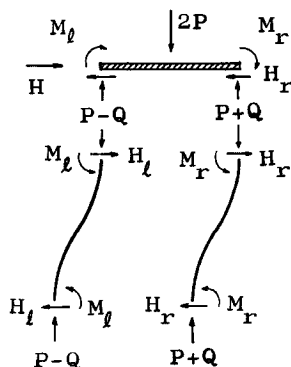


Fig. 2 Resultant forces at member ends.

$$H = H_l + H_r \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$Ql = M_l + M_r \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$2M_l = H_l h + (P-Q)\Delta \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$2M_r = H_r h + (P+Q)\Delta \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。(2), (4), (5) の諸式から、

$$Hh = 2(M_l + M_r) - 2P\Delta \quad \dots\dots\dots (6)$$

を得る。

* $P \geq N_0$ なら鉛直力だけで崩壊し、水平力は全く支えられない。3) の仮定は、わが国の通常の架構でみられるように、柱が比較的太短い場合に対応し、この条件は $N_0/P_{cr} \ll 1$ ならば当然満足される。

まず、弾性域において、仮定 3) により柱部材要素に存在する軸力の影響を無視でき（附録参照），

$$M_l = M_r = \frac{6EI}{h^2} \Delta \quad \dots\dots\dots (7)$$

ゆえ、(6) 式は、

$$H = \frac{24EI}{h^3} \left(1 - \frac{Ph^2}{12EI}\right) \Delta \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。ここで、明らかに、右辺括弧内第 2 項は鉛直力による転倒モーメントの影響で、仮定 3) によってこれも無視すれば、

$$H \cong \frac{24EI}{h^3} \Delta \quad \dots\dots\dots (8)'$$

である。

右柱上下端で降伏条件 (1) を満たす応力状態が達せられる瞬間の Δ の値を Δ_e とすると、(7), (8), (8)' の 3 式は $\Delta \leq \Delta_e$ に対して成立する。右柱のみならず左柱上下端においても (1) 式が成立する応力状態になると架構は崩壊機構と化す。その瞬間の Δ, H の値をそれぞれ Δ_p, H_p とする。

$\Delta_e \leq \Delta \leq \Delta_p$ に対しては、

$$M_l = \frac{6EI}{h^2} \Delta, \quad M_r = M_0 \left(1 - \frac{P+Q}{N_0}\right)$$

ゆえ、(3), (6) の両式より

$$Ql = \frac{6EI}{h^2} \Delta + M_0 \left(1 - \frac{P+Q}{N_0}\right) = \frac{Hh}{2} + P\Delta \quad \dots\dots\dots (9)$$

これから Q を消去すると、

$$H = \frac{12EI}{h^3} \left(\frac{1}{1 + \frac{M_0}{N_0 l}} - \frac{Ph^2}{6EI} \right) \Delta + \frac{\frac{2M_0}{h} \left(1 - \frac{P}{N_0}\right)}{1 + \frac{M_0}{N_0 l}} \quad \dots\dots\dots (10)$$

あるいは、

$$H \cong \frac{\frac{12EI}{h^3}}{1 + \frac{M_0}{N_0 l}} \Delta + \frac{\frac{2M_0}{h} \left(1 - \frac{P}{N_0}\right)}{1 + \frac{M_0}{N_0 l}} \quad \dots\dots\dots (10)'$$

を得る。

$\Delta \geq \Delta_p$ に対して、左柱の軸力を圧縮力、すなわち $P-Q \geq 0$ と仮定すれば、

$$M_l = M_0 \left(1 - \frac{P-Q}{N_0}\right), \quad M_r = M_0 \left(1 - \frac{P+Q}{N_0}\right)$$

ゆえ、(3), (6) の両式より

$$Q = \frac{2M_0}{l} \left(1 - \frac{P}{N_0}\right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$H = \frac{4M_0}{h} \left(1 - \frac{P}{N_0}\right) - \frac{2P}{h} \Delta \quad \dots\dots\dots (12)$$

Δ_p, H_p を求めるためには (10), (12) 両式を連立させて解くので簡単で、

$$\Delta_p = \frac{M_0 h^2}{6EI} \left(1 - \frac{P}{N_0}\right) \left(1 + \frac{2M_0}{N_0 l}\right) \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$H_p = \frac{4M_0}{h} \left(1 - \frac{P}{N_0}\right) \left[1 - \frac{Ph^2}{12EI} \left(1 + \frac{2M_0}{N_0 l}\right)\right] \quad \dots\dots\dots (14)$$

あるいは、

$$H_p \cong \frac{4M_0}{h} \left(1 - \frac{P}{N_0}\right) \quad \dots\dots\dots (14)'$$

(11)~(14)' の諸式が成立するための条件 $P-Q \geq 0$ は, (11) 式から

$$\frac{P}{N_0} \geq \frac{1}{1 + \frac{N_0 I}{2M_0}} \quad \dots\dots\dots (15)$$

不等式 (15) が満足されないときには $P-Q < 0$, すなわち左柱の軸力は引張りで,

$$M_l = M_0 \left(1 + \frac{P-Q}{N_0}\right), \quad M_r = M_0 \left(1 - \frac{P+Q}{N_0}\right)$$

を (3), (6) の両式に代入して,

$$Q = \frac{\frac{2M_0}{I}}{1 + \frac{2M_0}{N_0 I}} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$H = \frac{\frac{4M_0}{h}}{1 + \frac{2M_0}{N_0 I}} - \frac{2P}{h} \Delta \quad \dots\dots\dots (17)$$

また, 上と同様にして,

$$\Delta_p = \frac{M_0 h^2}{6EI} \left(1 + \frac{P}{N_0} - \frac{1}{1 + \frac{N_0 I}{2M_0}}\right) \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$H_p = \frac{4M_0}{h} \left[\frac{1}{1 + \frac{2M_0}{N_0 I}} - \frac{Ph^2}{12EI} \left(1 + \frac{P}{N_0} - \frac{1}{1 + \frac{N_0 I}{2M_0}}\right) \right] \quad \dots\dots\dots (19)$$

あるいは,

$$H_p \cong \frac{\frac{4M_0}{h}}{1 + \frac{2M_0}{N_0 I}} \quad \dots\dots\dots (19)'$$

(12), (17) 両式の右辺において, $4M_0/h$ は水平力のみ作用するときの単純塑性理論による崩壊荷重で, 第2項は転倒モーメントによる復元力の低下を表わす。また, P/N_0 は鉛直力の柱降状モーメントに及ぼす効果を表わし, $2M_0/(N_0 I)$ は梁剪断力に伴う柱軸力変化の影響を示す*。

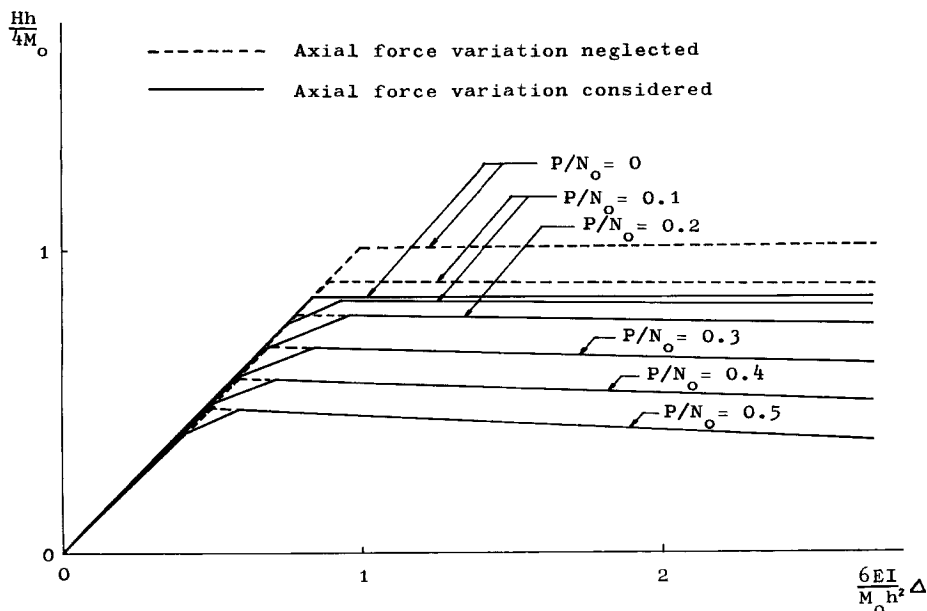
鉛直力が (15) 式を満足しないほど小さい場合を除けば, 柱軸力は左右とも常に圧縮で, (12) 式により, 崩壊後の挙動は柱軸力差による影響を受けないことが分り, (13), (14)' の両式から, 最大水平力 H_p はほとんど柱軸力差の影響を受けないが, それに対応する変位量 Δ_p に及ぼす柱軸力差の影響は注目に値しよう。条件 (15) の成立いかんにかかわらず, 崩壊後, 復元力 H が変位 Δ の増加によって直線的に減少するに反し, (11), (16) 両式によれば, Q は一定で, したがって軸力および曲げモーメントも変化しないのは興味深い**。

4. 例 題

一例として, $2M_0/(N_0 I) = 0.2$, $N_0 h^2/(12EI) = (\pi^2/12)(N_0/P_{cr}) = 0.1$ の架構に, $P/N_0 = 0 \sim 0.5$ なる鉛直荷重 ($P/P_{cr} = 0.012 \sim 0.061$) が作用している場合を考える。弾性域においても転倒モーメントの影響を考慮して (8), (10) の両式, それに, 条件 (15) の成立いかんに応じて (12) 式または (17) 式を用いて $H \cdot \Delta$ 関係を求め, 次元のない形で示せば Fig. 3 のごとくなる。図中, 点線は軸力変化の影響を無視したも

* 柱の断面せいを D とすると, $2M_0/(N_0 I) = \alpha D/I$ と表わされる。ここに, α は断面形による定数で, (1) 式が厳密に成立する理想 I 型断面では $\alpha = 1$, 長方形断面では $\alpha = 1/2$ となる。

**完全塑性体の極限解析によれば, 幾何学的変化を無視すると, 崩壊後, 荷重および応力は一定の値を保ち, 変形だけが進行し得る²⁾。

Fig. 3 Example: $2M_o/(N_o l) = 0.2$, $N_o h^2/(12EI) = 0.1$.

ので、実線はそれを考慮したものである。

5. 結 語

以上の諸式および Fig. 3 を観察し、一定鉛直力と変動水平力を受ける完全弾塑性架構の復元力特性に及ぼす柱軸力変化の影響について要約すると、

- 1) 助変数 $2M_o/(N_o l)$ が大きいほど軸力変化の影響が大きく、この影響を無視し得るための条件は

$$\frac{2M_o}{N_o l} \ll 1 \quad \dots\dots\dots (20)$$

である。また、この影響は、軸力比 P/N_o が小さいときに著しく表われる。

- 2) 軸力変化の影響を考慮すると $H \cdot \Delta$ 曲線がより滑らかになる*。
- 3) 柱軸力差は崩壊後の $H \cdot \Delta$ 曲線の勾配に影響しない。またそれは、鉛直力が大きいと崩壊後の挙動には全く影響しない**。
- 4) 鉛直力が小さくない限り、軸力変化の影響を考慮しても、最大水平力の値はほとんど変わらないが、それに対応する変位量は大きくなる。

参 考 文 献

- 1) 若林 実・野中泰二郎・松井千秋・三谷 勲：H形鋼を用いた十字形集合材の弾塑性安定に関する実験および多線型解析。京都大学防災研究所年報，第12号 A，1969，pp. 379～396。
- 2) D.C. Drucker, W. Prager and H.J. Greenberg: Extended Limit Design Theorems for Continuous Media. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 9, 1952, pp. 381～389。

* 復元力特性に関する実験結果は、種々の理論による $H \cdot \Delta$ 曲線より滑らかである^{1), 3)-6)}。

**このことは、線型降伏条件(1)を仮定したから厳密に成立するが、非線型降伏条件のときも近似的に云えることである。

- 3) M.R. Horne and I.C. Medland : Collapse Loads of Steel Frameworks Allowing for the Effect of Strain-Hardening. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Vol. 33, 1966, pp. 381~402.
- 4) M. Wakabayashi, T. Nonaka and C. Matsui : An Experimental Study on the Inelastic Behavior of Steel Frames Subjected to Vertical and Horizontal Loading. Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Vol. 17, Part 1, 1967, pp. 27~48.
- 5) 若林 実 : 高層建築の復元力特性. 京都大学防災研究所年報, 第12号 A, 1969, pp. 205~226.
- 6) M. Wakabayashi, T. Nonaka and S. Morino : An Experimental Study on the Inelastic Behavior of Steel Frames with a Rectangular Cross-Section Subjected to Vertical and Horizontal Loading. Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Vol. 18, Part 3, pp. 65~82.
- 7) 若林 実・野中泰二郎 : 薄肉閉断面材よりなる骨組の立体座屈撓角法—その1・基礎式. 日本建築学会近畿支部報告集, 構造・材料・施工, 1966, pp. 129~132.

附 録 弾性部材要素に存在する軸力の影響

線型弾性域において、柱端部における曲げモーメントと変位との関係は、部材要素に存在する軸力の影響を無視して(7)式を用いた。その軸力が引張力の場合には柱の剛性を高め、圧縮力の場合には剛性を低下するような効果を有し、ここで考えているように、軸力が変位 Δ とともに変化するときには、厳密には、線型弾性域においても、曲げモーメント・変位関係は非線型となる。この影響を検討するには、座屈撓角法基礎式を使うと便利で、(7)式のかわりに

$$M_l = \frac{\mu_l EI}{h^2} \Delta, \quad M_r = \frac{\mu_r EI}{h^2} \Delta \quad \dots\dots\dots(21)$$

を用いる。ここに、係数 μ_l, μ_r は軸力 N (圧縮力) の超越関数で、勿論 $N=0$ のときいずれも6なる値をとる。左柱では $N=P-Q$, 右柱では $N=P+Q$ ゆえ、既報で示したように⁷⁾、これらの係数を $N=P$ なる値を中心として線型化し、

$$\mu_l = \mu_P(1-\rho Q), \quad \mu_r = \mu_P(1+\rho Q) \quad \dots\dots\dots(22)$$

のような形に展開しておけば、問題の対称性から、 Q の変動による効果が左右で相殺され、たとえば(8)式は

$$H = \frac{4\mu_P EI}{h^2} \left(1 - \frac{Ph^2}{2\mu_P EI}\right) \Delta \quad \dots\dots\dots(23)$$

となり、やはり水平力 H と水平変位 Δ は比例する。ここに、 μ_P は $N=P$ のときの係数の値であり、たとえば、

$$\frac{P}{P_{cr}} = \frac{Ph^2}{\pi^2 EI} = 0.04$$

のとき、 $\mu_P = 5.9602$ で、 $\mu_P \cong 6$ としたときの誤差は0.67%に過ぎない。

$P \ll P_{cr}$ の仮定にもかかわらず、(8)', (10)', (14)', (19)' 諸式のかわりに(8), (10), (14), (19)の諸式を用いる意義は、上の例で示したように、 P/P_{cr} の値が部材要素に存在する軸力の影響を無視したときの誤差より低次の微量量であることに存する。

謝 辞 本研究は松永研究助成金による援助を得て遂行されたものである。ここに記して甚深の謝意を表します。