

河川におけるレイノルズ応力の分布について

石原 安雄・余越正一郎・上野 鉄男

REYNOLDS STRESSES IN A RIVER CURRENT

By Yasuo ISHIHARA, Shōitirō YOKOSI and Tetuo UENO

Synopsis

Observations have been made of u' and w' , the longitudinal and vertical components of turbulent velocity, in the Uji river. The measuring instrument was an ultrasonic flowmeter based on the method of sing-around, and was possible to measure two components of velocity simultaneously. The mean velocity $\bar{u}$ was about 1m/sec, and the r. m. s. values of u' were of the order of 10% of $\bar{u}$, while those of w' were about 6% of $\bar{u}$. The shearing stress seems to be increased approximately linearly from surface to bottom. Near the center of the depth, the values of the stress were about 60 dyn/cm², the corresponding coefficient of correlation between u' and w' averaging -0.65 . The values of the Reynolds stress were nearly equal to those of the variance of w' -fluctuation. The integral time scales of u' were about three times as large as w' . Auto- and cross-spectral analyses computed from these records show that there exists a region satisfying the law of $-5/3$ power in the spectrum of u' and w' as predicted by the Kolmogorov theory, while the cospectrum between u' and w' nearly satisfies the law of $-7/3$ power.

1. ま え が き

乱れを含んだ流体の平均運動についての方程式，すなわちレイノルズの方程式においては，応力テンソルは次の形になる，

$$\sigma_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + \mu\bar{D}_{ij} - \rho\overline{u_i' u_j'} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここに， p は圧力， μ は分子粘性係数， u_i' ， u_j' は乱れの速度成分である。さらに， D_{ij} は流体の変形テンソル，上つきの棒は平均を表わす。(1)式においては，層流に対する方程式にくらべて，乱れの速度積である「みかけの応力」 $-\rho\overline{u_i' u_j'}$ が新たにつけ加わっている。これは乱れによる乱れ運動量の輸送を表わしていて，普通，レイノルズ応力といわれるものである。このレイノルズ応力が平均流のひずみに対してなす仕事として，乱れは平均場からエネルギーを受取るわけである。

われわれの問題としては，レイノルズ応力のような変動速度についての量を何らかの方法で平均値と結びつけて，底面摩擦力や質量輸送，あるいは平均流速分布の合理的な表現をえることである。ブシネスクによる渦動粘性係数の導入，さらにはプラントルによる混合距離理論はこのような試みで，かなりの成功をおさめたものである。

さて，われわれの対象としている河川流れはいうまでもなく剪断流れであり，レイノルズ応力が大きな役割を演じていることはまちがいないところである。一般に一樣な河川の流れは兩岸に近い領域を除いては平均流は縦軸(x 軸)に平行で，鉛直上向き(z 方向)にのみその速さが変わると考えてよいであろう，

$$\bar{u} = \bar{u}(z), \quad \bar{v} = \bar{w} = 0. \quad \dots\dots\dots(2)$$

また、レイノルズ数の大きな完全に発達した乱れにおいては、固定壁のごく近傍を除いては分子粘性の効果は無視しうるので、分子粘性による応力 $\mu \bar{D}_{ij}$ はレイノルズ応力 $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ にくらべて無視することができる。すなわち、乱れによる輸送のほうが分子運動によるそれにくらべてはるかに大きいわけである。このような流れにおける剪断応力は、レイノルズ応力テンソルのうちの $\tau = -\rho \overline{u'w'}$ のみである。これは z 軸に垂直な単位面積をとって単位時間に輸送される x 軸方向の運動量の平均値で、この面に働く応力を与える。すなわち、質量交換は鉛直方向にのみ起る。われわれの当面の目標としては、レイノルズ応力 $\tau = -\rho \overline{u'w'}$ 、あるいは、これと平均流とを結びつける渦動粘性係数 K_z 、

$$-\rho \overline{u'w'} = \rho K_z \frac{d\bar{u}}{dz} \dots\dots\dots (3)$$

の鉛直分布を決定することである。これらの研究は平均流速公式の合理的な決定にもつながるものと考えられる。

レイノルズ応力は、このように重要かつ基本的な量であるにもかかわらず、河川においてはこれに関する知識はあまりにもとぼしい。このような研究としては、Mersey 河口における Bowden の電磁流速計による測定があるのみである¹⁾。彼は受感部の寸法が 10 cm の電磁流速計を用いて Mersey 河の水面近くと、河床近くでレイノルズ応力の測定をして、その乱流構造が接地気層のものによく似ていることを示した。

本報告は、流速の直角 2 成分を同時に測定することのできる Sing-around 方式超音波流速計を用いて、宇治川において u' , w' の同時測定を行ない、レイノルズ応力 u'^2 , w'^2 , $u'w'$ を評価したものである。

2. 観測およびデータ処理

観測に用いた流速計、観測場所およびデータ処理の方法について簡単に記す。

i) Sing-around 方式超音波流速計

レイノルズ応力を測定するためには、流速の直角 2 成分を同時に測定することのできる流速計を使用しなければならぬ。このようなものとして現在可能性のあるものは、Bowden の用いたような電磁流速計と、われわれの使用している超音波流速計がある^{2), 3)}。

Sing-around 方式流速計は、超音波パルスが流れ方向と逆方向に進むときはその速度が異なることを利用する方式で、超音波パルスの伝播時間の逆数である周波数の差を検出して流速を知るものである。本流速計は直線性、追従性、感度などの点で非常にすぐれているうえに、温度変化の影響をほとんど受けないので、現地観測用の測定器としては非常に適している。流速測定範囲は $0 \sim \pm 4$ m/sec, $0 \sim \pm 2$ m/sec, $0 \sim \pm 1$ m/sec の 3 段切換えで、おのおのの場合の出力電圧は $0 \sim \pm 10$ V である。受感部の寸法はわずか 3 cm である。出力信号の上限周波数は現在のところ 100 Hz に設定してある。この流速計は 3 組の Sing-around 系を用いて直角 2 成分の流速の検出が出来るように設計されているので、受感部を適当に固定することにより任意の流速成分の測定が可能である。

この流速計の使用にあたり注意しなければならないことは、時間的な応答は非常に良いが、受感部の寸法にもとづく空間的な平均化が行なわれることである。このような平均化は単純移動平均型の伝達関数

$$A(n) = \frac{\sin^2 \pi s n}{(\pi s n)^2} \dots\dots\dots (4)$$

で特徴づけられると考えてよからう³⁾。すなわち、スペクトルの高周波端切断が生じる。ここに s は受感部寸法に相当する平均化時間である。例えば u 成分の測定を行なう場合であると、Taylor の凍結乱流の仮定を用いて $s = d/\bar{u}$ (d は受感部寸法) としてよいであろう。 $d = 3$ cm であるから、もし $\bar{u} = 1$ m/sec とすると、(4) 式から計算して、エネルギースペクトルは $n = 10$ Hz ですでに 20% 程度の減衰をしていることがわかる。また、 w' の測定にあたっては、 $s = d/\sqrt{w'^2}$ としなければならないので、スペクトルの減衰はさらに低周波に及ぶわけである。

ii) 観測場所

観測場所としては、河道ができるだけ直線で一樣な場所の方が (2) 式の条件を満足しやすい。また、乱

れの効果が顕著にあらわれるためにはレイノルズ数の大きい流れで観測する方が望ましい。このような条件を比較的よく満足し、しかも地理的にわれわれの研究所に近い場所としては、従来からわれわれが乱流の測定に利用している宇治川の淀地点がある⁴⁾。河巾はかなりの距離にわたり一様に 100 m で、横断面は河川改修により比較的一様なうえに、極端な流路のわん曲や大流量の流入もなくわれわれの観測目的には一応適しているものと考えられる。なお底質は砂である。ただ残念なことは、流れにかなり多くのゴミが浮遊していて、超音波の伝播を妨害することがあり、流速の測定に誤差を生じる可能性が多いことである。

iii) 観測方法

観測にあたっては、兩岸からワイヤーを強く張り、これにより河床深く打ち込んだ直径 5 cm の鋼管を鉛直に固定し鉛直測線とした。流速計受感部を取りつけた別の鋼管（直径 4 cm）をこれに沿わせて上下することにより、受感部の位置を任意の水深に設定することができる。受感部は鋼管から横方向に約 20 cm の位置にあるが、鋼管の影響はほとんど無いものと考えられる。

記録は 2 台のモーターボートの上で行なわれた。流速計からの電圧出力は 4 チャンネル FM 磁気テープレコーダーに録音したが、その際自動平衡型 2 ペンレコーダーを低周波成分のモニターとして併用した。テープレコーダーはポータブルのもので、周波数特性は DC~1.2 kHz、入力インピーダンス 100 k Ω 、磁気テープ 1 巻による連続記録時間は約 30 分である。流速計及び記録器の電源としては、小型のガソリンエンジンで動く 300 W 交流発電機から AC100 V を供給した。なお、観測時における流速値以外の各種のデータは音声として磁気テープの別のチャンネルに録音しておき、データ処理時の参考とした。

観測継続時間の問題は重要である。観測時間が短かすぎるとスペクトルの低周波側の切断が生じる。観測時間 T_* によるエネルギースペクトルの低周波減衰特性は次であらわされる、

$$B(n) = 1 - \frac{\sin^2 \pi n T_*}{(\pi n T_*)^2} \quad \dots\dots\dots (5)$$

鉛直乱流場の相関係数が指数的に減少するものとして、(5) 式を用いて観測時間 T_* の効果を計算した結果⁵⁾、 $T_*/T_E \geq 100$ 程度の観測をすれば充分であることがわかっている。ここに T_E は鉛直乱流場のオイラー的な integral time scale である。われわれのいままでの観測によると⁴⁾、 $T_E \approx 2z/\bar{u}$ であるから、結局 $T_* \geq 200z/\bar{u} \dots\dots\dots (6)$

程度の測定をすればよいことになる。今回の観測においては、水深約 2 m、平均流速 1 m/sec 程度であるから、(6) 式から 6 分間程度の測定をしなければならないことがわかる。実際の測定にあたっては、これより長い測定を行なったが、ゴミの影響などで実際に計算に使えるところは 2~3 分間程度であった。なお、河床に近い部分には、従来の経験から大きな浮遊物がある可能性が高く、流速計受感部を損傷するかもしれないので、河床近での測定は行なわなかった。

iv) データ処理

観測から持ち帰った磁気テープ上に録音された記録は再生しながら高速 AD 変換器を通して、電子計算機入力用紙テープを作製した。AD 変換の前に、2. (i) に述べた考え方にもとづき遮断周波数約 10 Hz の低域ろ波器を通して、無意味な高周波成分はあらかじめ除去しておいた。AD 変換器は入力電圧 ± 1.6 V で、8 チャンネルの現象をサンプリング周波数 400 Hz 以下の任意の周波数で同時に変換するものであり、その出力は 1500 字/分の穿孔機に送られる。

実際に行なったサンプリング周波数は 8 Hz、すなわち 1/8 秒毎に u' , w' の同時サンプリングを行った。また、データの長さは 1000 個、すなわち 125 sec の記録に相当するものである。(iii) で述べたように 6 分間程度のデータがほしいわけであるが、流れに存在するゴミの影響でそれは無理であった。2 分間程度のデータでは鉛直乱流場の安定な乱流特性をえることがあやぶまれる場合もあるかもしれないが、分散値は数% 減少するだけである。相関およびスペクトルの計算にあたっては、ずらしの数は一応 100 としたので、自由度は約 20 である。

3. 解析結果について

観測は2日間行なわれた。説明の都合上それぞれを観測A、観測Bとよぶことにする。両者は同一横断面上で行なわれたものである。観測Aは1968年10月29日午後に行なわれたもので、右岸から25mの鉛直測線上、水面下15, 25, 40, 60, 80, 100, 140cmの7点で測定を行なった。このときの水深は2.1mであった。観測Bは観測Aの翌日の午後に行なわれたもので、河川の中央で水面下10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90cmの9点で測定を行なった。このとき的水深は2mであった。どちらの場合も水面近くでは風はほとんど吹いていなかった。なお両観測とも水深で計算したレイルズ数は 2×10^6 である。

(i) 平均流速, レイノルズ応力

平均流速やレイノルズ応力の計算の際の平均化はすべてデータ全長125secで行なわれた。観測A, Bの場合の平均流速 $\bar{u}$, 乱れの数 $\sigma_u = \sqrt{u'^2}$, $\sigma_w = \sqrt{w'^2}$, レイノルズ応力 $\tau = -\rho \bar{u'w'}$ の鉛直分布をFig. 1に示す。

それぞれの分布において、値のバラツキがかなり大きい、これは2. (iii) で言及したように観測平均化時間 T_* が短かすぎたためでもあろう。なぜなら、Fig. 1に示した量の値はすべて大きな寸法の乱れ、すなわち低周波変動成分によって支配されるものであるから、観測平均化時間が短い場合には測点を通過する大きな乱れの数が少なくなり、その統計的な特性を正しくとらえることができないからである。

平均流速 $\bar{u}$ の分布についてみると、河床に近い領域の測定がないので正確なことは言えないが、水面下

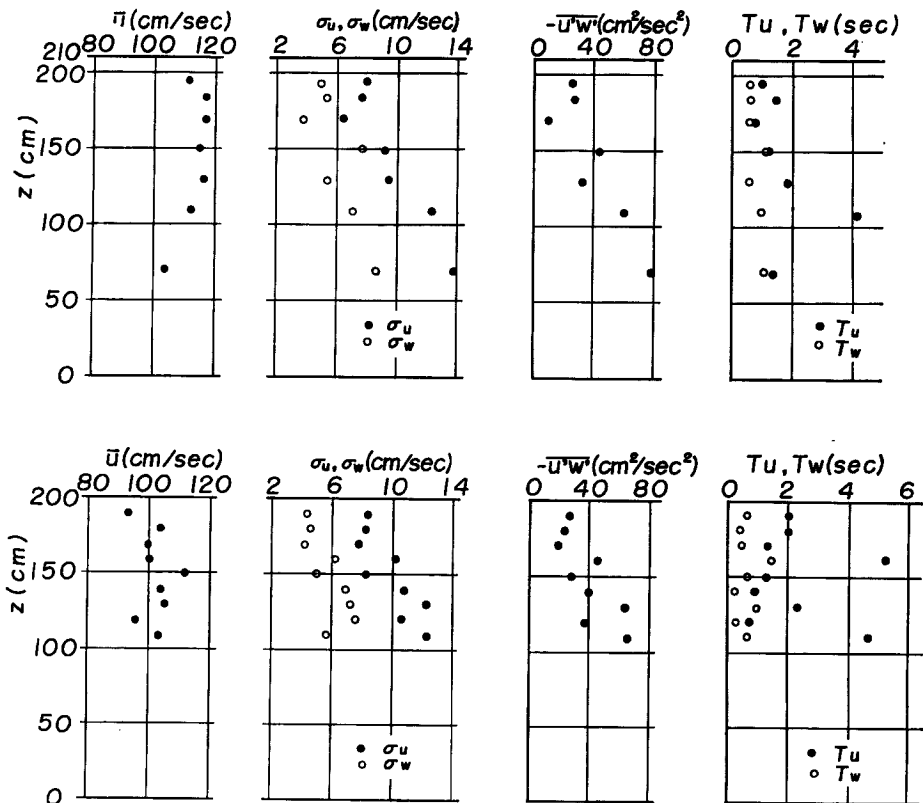


Fig. 1 Distribution of local temporal mean velocity, $\bar{u}$, turbulent velocities, $\sqrt{u'^2}$, $\sqrt{w'^2}$, Reynolds stress, $-\sqrt{\bar{u'w'}}$, and integral time scale, T_u , T_w .
The upper graphs: Observation A (water depth $H=2.1$ m)
The lower graphs: Observation B (water depth $H=2.0$ m)

30~50 cm のへんに最大流速の部分があるようにみえる。しかし、従来の観測の場合でもそうであるが、最大流速点の正確な位置はなかなかとらえにくい。

次に乱れの速度であるが、これは、その水深における最大乱子の乱子速度を与えるものとみることができ。その値は u 変動についても w 変動についても河床に向って次第に増大していることがわかる。その傾向は、われわれのびわ湖疏水における観測⁴⁾や Bowden の潮流における観測¹⁾、また一般的に平板境界層の流れにおけるものと同じである。しかし、相対的な乱れの強さ $\sigma_u/\bar{u}$, $\sigma_w/\bar{u}$ の値はびわ湖疏水の場合と大体同じであるが、その他の結果にくらべて、いく分大きくなっている。観測時に、水面には風波はほとんど存在していなかったため、このように大きな値を示す理由についてはいまのところよくわからない。

次にレイノルズ応力 $-\overline{u'w'}$ の分布についてみると、その分布は水面の 0 からほぼ直線的に河床に向って増加しているようにみえる。すなわち $\tau = \tau_0(1 - z/H)$ (H : 水深, τ_0 : 底面摩擦) の関係が成立しているようにみえる。しかし渦動粘性係数の考え方 (3) に従うと、最大流速点より水面に近い領域では、運動量は水面に向って輸送され、その結果、レイノルズ応力は符号を変えるものと理解されるが、そのようなことはこの観測ではみられない。応力の絶対値についてみると、水面に非常に近い領域においても摩擦速度にして 5 cm/sec といった大きな値をとっている。参考のために、河床面摩擦力を $\tau_0 = \rho g H i$ (H : 水深, i : 河床

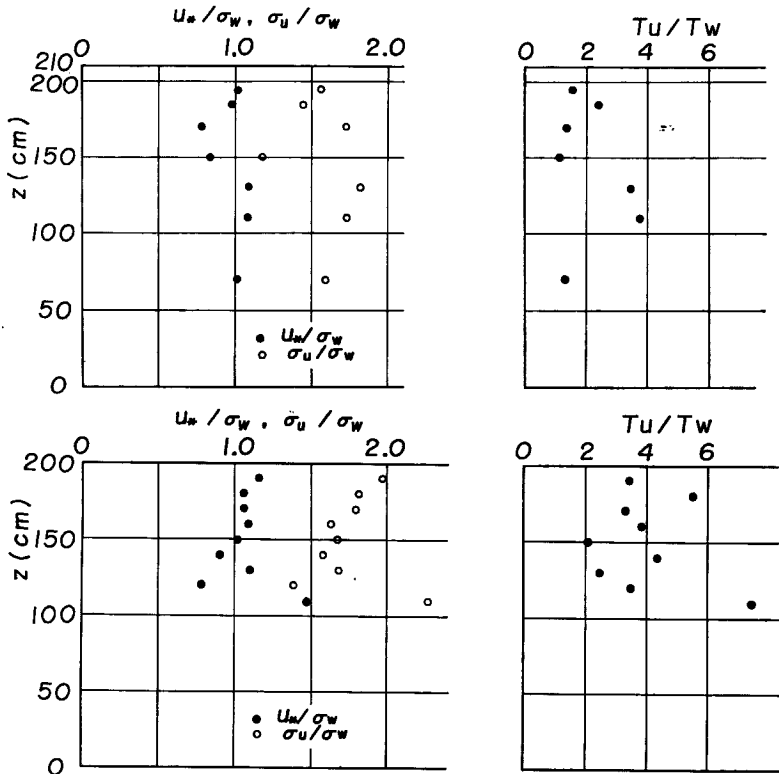


Fig. 2 The left Figures show vertical distributions of the ratio of friction velocity, $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$, and longitudinal turbulent velocity, σ_u , to vertical turbulent velocity, σ_w , the right the vertical distribution of the ratio of longitudinal integral time scale to vertical one.

The upper: Observation A ($H=2.1$ m)

The lower: Observation B ($H=2.0$ m)

勾配) から計算してみると $\tau_0 \approx 50 \text{ dyn/cm}^2$ となる。これは Fig. 1 のレイノルズ応力分布を直線的に延長したものとは非常に異なる。しかし、その理由についてもいまのところよくわからないが、 i のとり方によるものであろう。

次にレイノルズ応力相互間の関係をみる。それを Fig. 2 に示す。これによると、摩擦速度 $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$ と σ_w とは大体同じ大きさであることがわかる。接地気層においては $\sigma_w \approx u_{*0}$ (u_{*0} : 地表面摩擦速度) なる関係は多くの測定からも知られていることであり、また、井上の乱子理論も示しているところである。しかし、この関係が、この観測が行なわれたように、河床面境界層外の領域でも成立していることは大変興味ある事実である。

(ii) 相関およびスペクトル

(i) に示したような量はほとんど低周波変動からの寄与によるものであるが、さらにくわしくいろいろな階級の乱れからの寄与の状態をみるために、相関およびスペクトルの計算を行ってみた。

観測Aに関する相関係数を Fig. 3 に、観測Bに関する相関係数を Fig. 4 に示す。両者とも、河床から

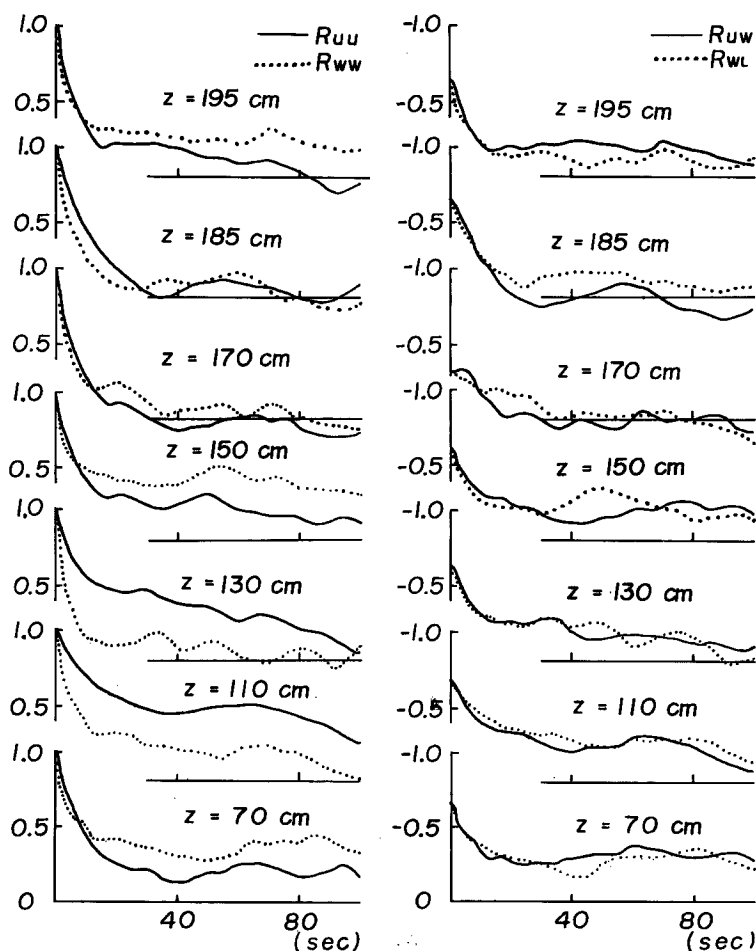


Fig. 3 Distributions of the coefficient of autocorrelation, R_{uu} , R_{wv} , and the coefficient of cross-correlation, R_{uw} , R_{uu} , in the observation A ($H = 2.1 \text{ m}$).

の高度の順に配列してある。図中、 R_{uu} 、 R_{ww} は u' -変動および w' -変動の自己相関係数、 R_{uw} は w' -変動を時間的に先にずらした場合の相互相関係数、 R_{wu} はその逆の場合を示している。両図を一見してわかることは、 w' -変動の相関は u' -変動のそれに比して相当小さいことである。また相互相関係数はほとんど対象であることがわかる。図の説明が前後するが、 u' 、 w' -変動の integral time scale T_u 、 T_w の鉛直分布は Fig. 1 の右端に示してある。また両者の比 T_u/T_w は Fig. 2 に示してある。観測Aの場合とBの場合でその比は少し異なるが、いずれにしても、 u' -変動の integral time scale の方が2～4倍程度大きいことがわかる。この値は Bowden の測定結果¹⁾とよく合っている。なお、ここで示した integral time scale は相関係数の下の面積を計算して求めたものではなく、相関係数はずらしが小さいところでは指数的に減衰するものと仮定して、相関が 0.6 になる点の時間 (semi-scale) が integral time scale の 1/2 になるという事を利用して求めたものである⁴⁾。このようにした理由は、Fig. 3, Fig. 4 を見てもわかるように、水平乱流場のスケールの大きな変動の影響と思われるが⁴⁾、相関係数はなかなか 0 にならないからである。しか

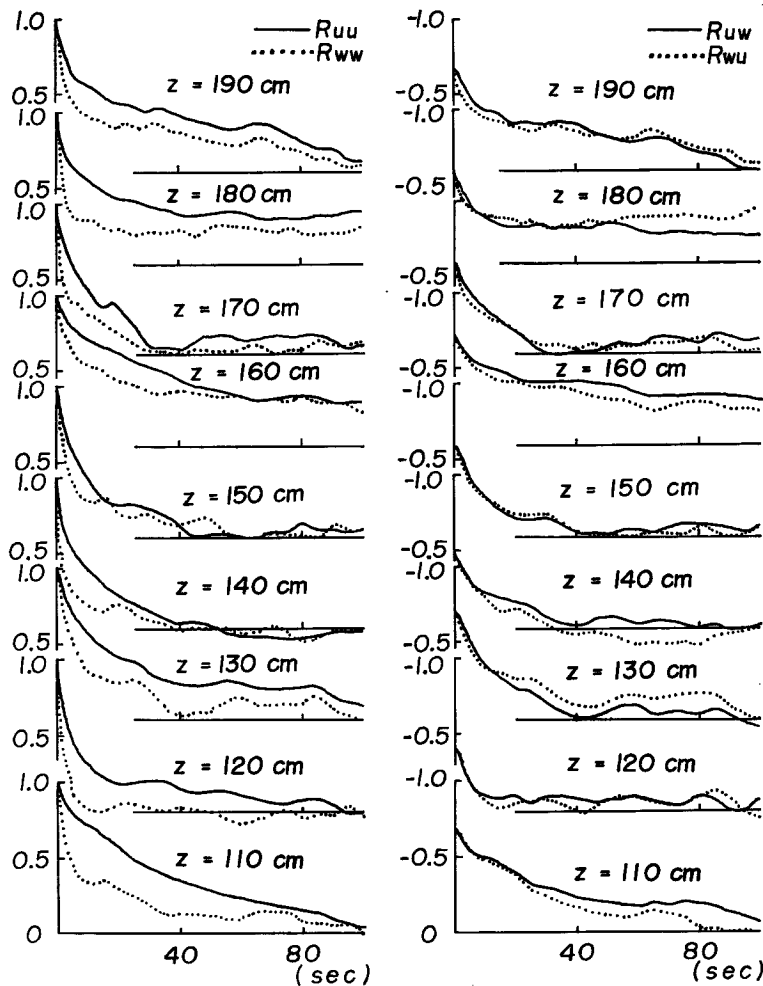


Fig. 4 Distribution of the coefficient of auto-correlation, R_{uu} , R_{ww} , and the coefficient of cross-correlation, R_{uw} , R_{wu} , in the observation B ($H = 2.0$ m).

し、このようにして求めた integral time scale は、従来の経験からしてかなりの精度で鉛直乱流場のそれを表わしているものと思われる。

レイノルズ応力に対するいろいろな階級の乱れの寄与の状態をさらにくわしく知るためには、そのスペクトルを計算してみるのがよい。その結果を Fig. 5 および Fig. 6 に示す。前者は観測A、後者は観測Bにおけるものである。 F_{uu} および F_{ww} は u' -変動および w' -変動のエネルギースペクトル、 F_{uw} は u' および w' の相互スペクトルの実数部である。 F_{uw} はレイノルズ応力 $\overline{u'w'}$ に対する各周波数からの寄与の割合を示している。なお、 F_{uw} は実際は負の値をとるが、ここでは図示の都合上正として表示してある。おのおの高度におけるスペクトルは無次元座標 $nz/\bar{u}$ (測点高度と波長の比) で整理して、重ねて図示してある。いろいろな高度におけるスペクトルが図で見るといにはほぼ同一線上に重なるということは、興味あることである。

Kolmogorov の局所等方性乱流理論によると、最大乱子と最小乱子の中間の乱子領域においては、 u' および w' のスペクトルは次式で表わされることが知られている。

$$\left. \begin{aligned} F_{uu}(\omega) &\approx \frac{1}{3} A (\varepsilon \bar{u})^{2/3} \omega^{-5/3}, \\ F_{ww}(\omega) &\approx \frac{4}{9} A (\varepsilon \bar{u})^{2/3} \omega^{-5/3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

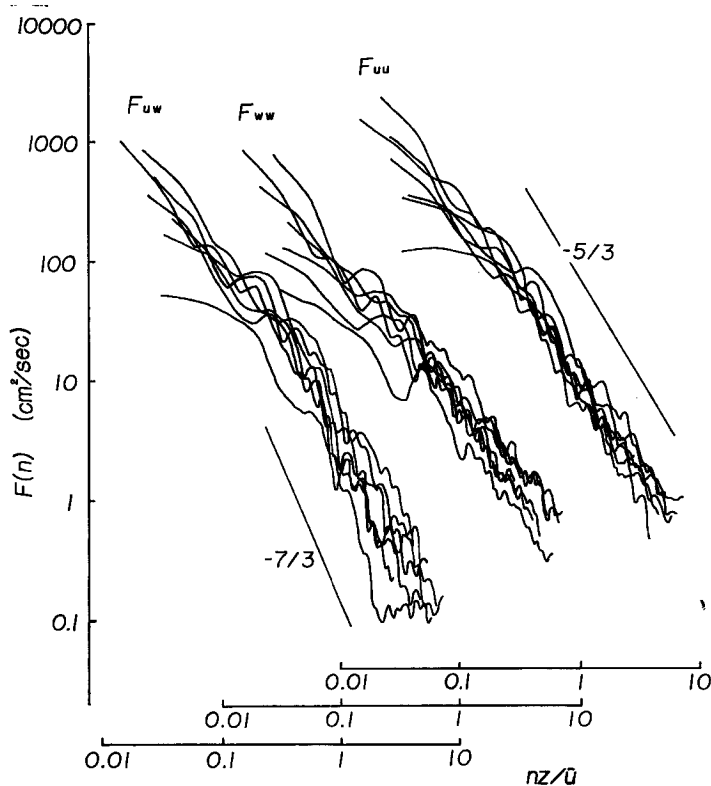


Fig. 5 Energy spectral densities of longitudinal and vertical velocity, F_{uu} , F_{ww} . And negative cospectrum between longitudinal and vertical velocity. Abscissa is in units of $nz/\bar{u}$ (ratio of height to wavelength). Observation A ($H=2.1$ m).

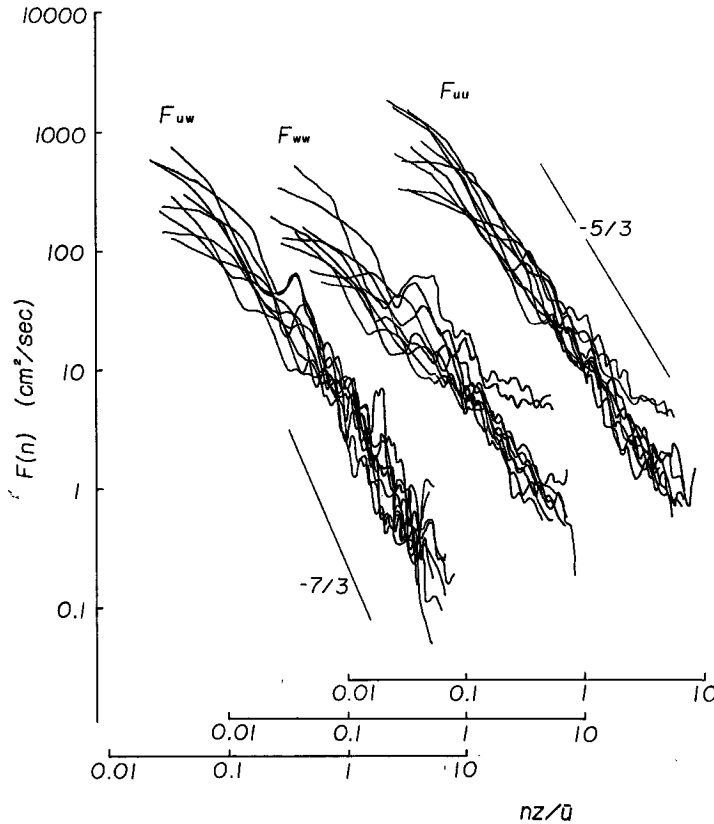


Fig. 6 Energy spectral densities of longitudinal and vertical velocity, F_{uu} , F_{uw} , F_{wv} . And negative cospectrum between longitudinal and vertical velocity. Observation B ($H=2.0$ m)

ここに A は 3 次元エネルギースペクトルにおける絶対定数 ($=1.4 \sim 1.5$)⁵⁾, ε は平均乱流エネルギー逸散率, $\omega = 2\pi n$ は角周波数である。図からわかるように F_{uu} はかなりの周波数帯域にわたり $-5/3$ 乗則がよく成立していることがわかる。しかし, F_{uw} には $-5/3$ 乗則の成立があまりはっきりしていないが, それは, w' -変動は水面と河床に制約されているので, $-5/3$ 乗則の成立する帯域巾が狭いためであろう。 u' -変動のスペクトルが $-5/3$ 乗によくのるということは, いままでの経験からしても充分知られていることである^{4), 5)}。

さて, 問題のレイノルズ応力 $\overline{u'w'}$ のスペクトル F_{uw} であるが, その分布は F_{uu} , F_{wv} に比較してかなり異なっていることがわかる。スペクトルの勾配はかなり急で, 高周波からの寄与が著しく少ないことを示している。レイノルズ応力のスペクトル F_{uw} の分布則についてはまだ定説がない。中間乱子領域では $-8/3$ 乗則が成立するという理論⁶⁾もあるが, 接地気層における多くの測定結果とは合わない。Fig. 5, 6 には圧力変動のスペクトル分布から類推した $-7/3$ 乗の勾配をもつ直線が参考のために示してある。

レイノルズ応力に対する各周波数成分の寄与の具合をもっと直観的にわかるようにして示したのが, Fig. 7 および Fig. 8 である。すなわち, 横軸を $\log n$, 縦軸を $nF(n)$ で示してある。これは $nF(n)d(\log n) = F(n)dn$ なることにもとづいている。したがって, それぞれのスペクトルの下の面積はそれに相当する変動の分散を与える。Fig. 7 および Fig. 8 の全体を見て言えることは, レイノルズ応力に主に寄与する乱

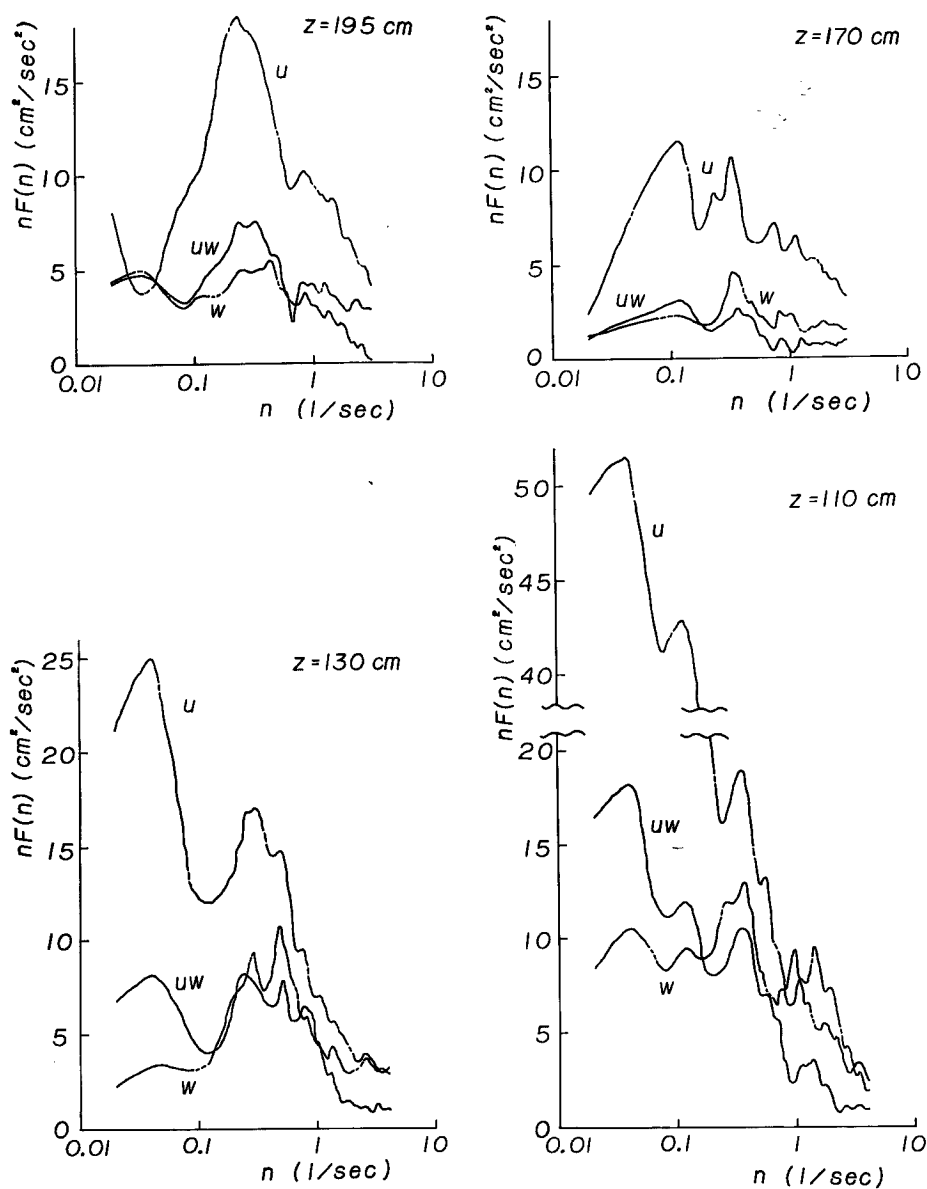


Fig. 7 Representative spectra of u' , w' and $\overline{u'w'}$ at various heights in the observation A ($H=2.1$ m).

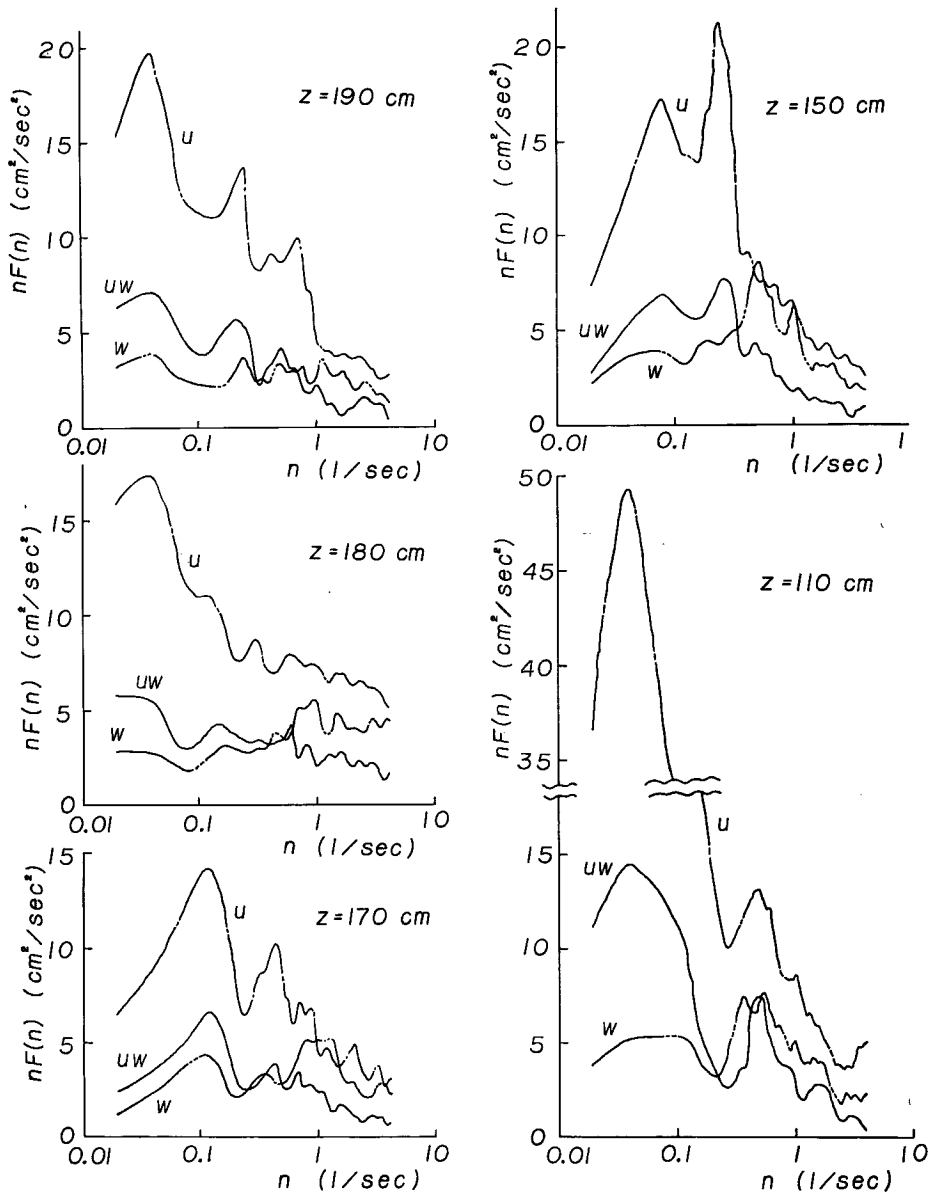


Fig. 8 Representative spectra of u' , w' and $\overline{u'w'}$ at various heights in the observation B ($H=2.0$ m)

れは、 u' -変動におけると同様にスケールの大きな乱れであることがわかる。逆に言えば、小さい乱子にもかなりのエネルギーが配分されているが、レイノルズ応力に対してはほとんど寄与していないということである。したがって、レイノルズ応力 $\overline{u'w'}$ だけの測定を行なう場合には、そんなに慣性の小さい測器を使用する必要はないということが言える。しかし観測時間は充分長くとらねば安定なスペクトルをえることはむづかしい。また、計算したレイノルズ応力スペクトルの特徴としては、 u' -変動や w' -変動のスペクトルにくらべてばらつきが大きいことである。それは u' と w' の間の相関があまり大きくないためであろう。

4. あ と が き

Sing-around 方式超音波流速計を用いて、河川におけるレイノルズ応力の実測を行なったが、その結果わかった主なことを列記する。(1) 超音波流速計は河川乱流の測定に非常に適している。(2) レイノルズ応力は水面の0から河床に向ってほぼ直線的に増加している。(3) 摩擦速度 $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$ と w' -変動速度の大きさはほぼ等しく、 u' -変動速度は w' -変動速度の約2倍程度である。(4) integral time scale は u' -変動の方が w' -変動のものより2~4倍程度大きい。(5) u' -変動および w' -変動のエネルギースペクトルには Kolmogorov の $-5/3$ 乗則の適用できる領域が存在するが、レイノルズ応力スペクトルは $-7/3$ 乘に近い分布をしている。(6) レイノルズ応力に寄与する乱れは、 u' -変動スペクトルにおけると同様な大きな寸法の乱れである。したがって、レイノルズ応力の測定にはそんなに応答周波数の高い測器を用いる必要はない。

おわりに、観測に協力していただいた建設省淀川工事事務所に謝意を表します。なお、ここで行なった各種の統計計算はすべて京大計算センターの KDC-II によって行なわれたものである。

参 考 文 献

- 1) Bowden, K.F. and M.R. Howe: Observation of turbulence in a tidal current, J. Fluid Mech., **17**, (1963), p. 271.
- 2) 石原安雄, 余越正一郎: 超音波流速計による 河川乱流の測定, 第11回水理講演会講演集 (1967), p. 53.
- 3) Ishihara, Y. and S. Yokosi: Ultrasonic flowmeters for measuring river turbulence, Bull. D.P.R.I. **18**, (1969), p. 49.
- 4) Yokosi, S.: The structure of river turbulence, Bull. D.P.R.I. **17**, (1967) p. 1.
- 5) 余越正一郎: 河川における乱流エネルギー逸散率について, 京大防災研究年報 **11B**, (1968), p. 191.
- 6) Lumley, J.L. and Panofsky, H.A., The structure of atmospheric turbulence, Interscience, (1964), p. 188.