

開水路非定常流の相似律に関する問題点

岩 佐 義 朗・高 橋 保

SOME QUESTIONS TO HYDRAULIC SIMILITUDE FOR UNSTEADY OPEN CHANNEL FLOWS

By *Yoshiaki IWASA* and *Tamotsu TAKAHASHI*

Synopsis

The hydraulic similitude to guarantee any scale model test for one-dimensional flows in pipes and open channels can be derived from one-dimensional equations of continuity, energy or linear momentum in the control volume method of hydraulic analysis.

Recently, the first author has derived the exact formulation of one-dimensional system of equations of continuity, energy and linear momentum in the curvilinear orthogonal coordinates from the original system in theoretical hydrodynamics, and the authors have shown a special system of equations for the open channel flow in a rectangular channel. The results obtained indicate that the classical dynamic equation must be supplemented by additional terms concerning three-dimensional variations of transverse velocity and stage in the unsteady behaviour, which suggests the classical treatment for the hydraulic similitude of unsteady open channel flows should be modified. This paper treats with the order effects of additional terms to the classical equation for the unsteady open channel flow and the derivation of new formulation for the hydraulic similitude of unsteady open channel flows.

Preliminary experimentations made in a laboratory test flume will also verify the theoretical results and predict careful treatments for proceeding the hydraulic scale test with distorted dimensions.

1. 序 文

力学上の諸問題を理論的に解析するに当って、対象とする現象に支配的な力学過程を抽象した数学モデルにシミュレートし、いわば理想化された状態に対して解析をすすめるのが普通である。しかし、これでは複雑な現象解明に対して不十分であり、最近ではできるだけ一般的な状態に対するモデルをそのまま電子計算機によって解析する手法がとられるようになってきた。この計算機によるシミュレーションの方法は基礎となる数学モデルが現象を完全に表現している場合には大きな威力を発揮する。ところが新らしく計算技術上の問題があらわれ、たとえば方程式があまりに複雑な場合には、計算は實際上むずかしく、誤差の評価など困難となり、また現象の全貌を定性的に把握するには最良の方法とはいえない。一方実験によるシミュレーションは定性的な現象把握に対して簡単かつ有力であり、もしそれが縮小あるいは拡大模型上の現象であれば、対象としている非常に複雑な自然現象のすべてについての観察ができ、現象のまったく新しい未知の性質をも発見することがあり、さらにより完全な数学モデルの設定に対して有力な手がかりを与える。ここに模型実験の意義が存在する。

さていうまでもなく、現象の定量的、定性的性質を把握するために模型実験を行なうとき、模型内部に起っている現象は實際現象とそのスケールが異なっているだけで、全く同一の性質を持っていないからではない。すなわち、模型実験は相似律を基礎にしなければならないのである。一般に相似律と呼ばれるものには、つぎの3種類がある。

- 1) ある2個のシステムにおいて長さの比 λ_L が一定であるような幾何学的相似律,
- 2) ある2個のシステムにおいて幾何学的相似律を満足し、かつ時間の比 λ_T が一定であるような運動学的相似律,
- 3) ある2個のシステムにおいて運動学的相似律を満足し、かつ質量の比 λ_M が一定であるような力学的相似律,

である。したがって、厳密な意味では力学的相似律が満足されなければならないから、実物以外に相似律をみたす模型を製作することはほぼ不可能である。しかし、力学的相似律が満足されていない2個のシステムにおいても、対象としている現象に対して支配的な力学過程をシミュレートした方程式が共通に成立する場合には、一方のシステム内の現象から他方の現象を定性的のみならず定量的にも、ほぼ正しく予測することができる。このような場合の相似律はこの方程式の各項の比が模型と実物において等しくなることによって与えられ、方程式の形によっては模型の製作は容易となる。たとえば、幾何学的相似律を満足していない歪み模型は当然力学的相似律をみたしていないから、厳密には模型での現象は実物の現象とは異質のものである。しかし、支配的現象を記述する方程式から得られる相似律に対しては歪みの影響がまったく入らない場合も考えられる。このような場合、現象の全貌に対する歪みの影響の定量的評価は困難であるが、歪み模型の採用が可能であるばかりでなく、かえって好都合になることも多い。

このように、模型実験の成否は対象としている現象に対して、どのような基礎方程式を使用するかにかかっており、これが明確でないときには相似律に従う模型実験は不可能となる。

本論文は一次元解析法による開水路非定常流の方程式にもとづく相似律について、従来考えられていない断面内の三次元特性の効果によって生起する問題点を、主に歪み模型による模型実験の可否の考察によって述べるものである。

2. 一次元解析法における開水路非定常流の方程式

直交曲線座標系における流体運動の基本式、すなわち連続方程式、運動量方程式の x_1 方向分値およびエネルギー方程式はそれぞれつぎのようである¹⁾。

$$\int \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 u_3) \right] dV = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} & \int \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} dV + \int \rho u_1 [u_1 \cos(x_1, n) + u_2 \cos(x_2, n) + u_3 \cos(x_3, n)] dS \\ &= \int [(\sigma_{x_1} - p - \rho \Omega) \cos(x_1, n) + \tau_{x_1 x_2} \cos(x_2, n) + \tau_{x_1 x_3} \cos(x_3, n)] dS \\ &+ \int \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3) (\rho \Omega + p) dV + \int \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} (\tau_{x_1 x_2} - \rho u_1 u_2) dV \\ &+ \int \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} (\tau_{x_1 x_3} - \rho u_1 u_3) dV - \int \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} (\sigma_{x_2} - \rho u_2 u_2) dV \\ &- \int \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} (\sigma_{x_3} - \rho u_3 u_3) dV \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho q^2}{2} \right) dV + \int [u_1 \cos(x_1, n) + u_2 \cos(x_2, n) + u_3 \cos(x_3, n)] \left(\frac{\rho q^2}{2} + \rho \Omega + p \right) dS \\ &= \int [\sigma_{x_1} u_1 \cos(x_1, n) + \sigma_{x_2} u_2 \cos(x_2, n) + \sigma_{x_3} u_3 \cos(x_3, n)] dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\sigma_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 u_1) + \sigma_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 u_2) + \sigma_{x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 u_3) \right] dV \\
& + \int u_1 [\tau_{x_1 x_2} \cos(x_2, n) + \tau_{x_3 x_1} \cos(x_3, n)] dS \\
& + \int u_2 [\tau_{x_2 x_3} \cos(x_3, n) + \tau_{x_1 x_2} \cos(x_1, n)] dS \\
& + \int u_3 [\tau_{x_3 x_1} \cos(x_1, n) + \tau_{x_2 x_3} \cos(x_2, n)] dS \\
& + \int \frac{u_1}{h_1 h_2} (\sigma_{x_1} - \sigma_{x_2}) \frac{\partial h_2}{\partial x_1} dV + \int \frac{u_1}{h_3 h_1} (\sigma_{x_1} - \sigma_{x_3}) \frac{\partial h_3}{\partial x_1} dV \\
& + \int \frac{u_2}{h_2 h_3} (\sigma_{x_2} - \sigma_{x_3}) \frac{\partial h_3}{\partial x_2} dV + \int \frac{u_2}{h_1 h_2} (\sigma_{x_2} - \sigma_{x_1}) \frac{\partial h_1}{\partial x_2} dV \\
& + \int \frac{u_3}{h_3 h_1} (\sigma_{x_3} - \sigma_{x_1}) \frac{\partial h_1}{\partial x_3} dV + \int \frac{u_3}{h_2 h_3} (\sigma_{x_3} - \sigma_{x_2}) \frac{\partial h_2}{\partial x_3} dV \\
& - 2 \int (\tau_{x_1 x_2} e_{x_1 x_2} + \tau_{x_2 x_3} e_{x_2 x_3} + \tau_{x_3 x_1} e_{x_3 x_1}) dV \dots \dots \dots (3)
\end{aligned}$$

ここに、 $u_i: x_i (i=1, 2, 3)$ 方向の速度成分

$$q^2: v^2 + w^2$$

$e_{x_i x_j}$: 歪みテンソルの成分 ($i, j=1, 2, 3$)

以上は流体運動の解析を行なう場合に用いられるべき厳密な関係式であるが、開水路水理学においてはむしろ巨視的な運動機構が問題となり、いわゆる一次元解析法が用いられる。この方法では(1), (2), (3)式にそれぞれ境界面における運動学的条件,

$$u_{1b} \cos \delta(x_1, n) + u_{2b} \cos \delta(x_2, n) + u_{3b} \cos \delta(x_3, n) = u_{nb} \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 u_{nb} は境界面における外向き法線方向の速度である。

および、自由表面における条件,

$$u_{2s} = h_{2s} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{u_{1s}}{h_{1s}} \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{u_{3s}}{h_{3s}} \frac{\partial H}{\partial x_3} \right) \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 H は水深をあらわす。

を入れ、さらに自由表面における幾何学的条件,

$$\cos \delta(x_1, n) = -\frac{1}{h_{1s}} \frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \cos \delta(x_2, n) = \frac{1}{h_{2s}}, \quad \cos \delta(x_3, n) = -\frac{1}{h_{3s}} \frac{\partial H}{\partial x_3} \dots \dots \dots (6)$$

を入れて流水断面について積分を遂行した結果がその基礎方程式となる。すなわち、連続式として,

$$\int h_{1s} h_{3s} \frac{\partial H}{\partial t} dx_{3s} + \frac{\partial}{\partial x_1} \int u_1 dS_{x_1} + \int h_{1b} u_{1b} ds_b = 0 \dots \dots \dots (7)$$

運動量式として,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int h_{1s} u_1 dS_{x_1} - h_{1s} u_{1s} \frac{\partial S_{x_1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \int u_1^2 dS_{x_1} + \int h_{1s} h_{3s} u_{1s} \frac{\partial H}{\partial t} dx_{3s} \\
& + \int h_{1b} u_{1b} u_{nb} ds_b = \int \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\sigma_{x_1}}{\rho} - \Omega - \frac{p}{\rho} \right) dS_{x_1} + \int \frac{\sigma_{x_1}}{\rho h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3) dS_{x_1} \\
& - \int \frac{h_{1b} \tau_{x_1 b}}{\rho} ds_b + \int \frac{1}{\rho h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} (\tau_{x_1 x_2} - \rho u_1 u_2) dS_{x_1} + \int \frac{1}{\rho h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} (\tau_{x_3 x_1} - \rho u_3 u_1) dS_{x_1} \\
& - \int \frac{1}{\rho h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} (\sigma_{x_2} - \rho u_2 u_2) dS_{x_1} - \int \frac{1}{\rho h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} (\sigma_{x_3} - \rho u_3 u_3) dS_{x_1} \dots \dots \dots (8)
\end{aligned}$$

エネルギー方程式として,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int h_1 \frac{q^2}{2g} dS_{x_1} - h_{1s} \frac{q_s^2}{2g} \frac{\partial S_{x_1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \int \left(\frac{q^2}{2g} + \frac{\Omega}{g} + \frac{p}{\rho g} \right) u_1 dS_{x_1} \\
& + \int h_{1s} h_{3s} \frac{\partial H}{\partial t} \left(\frac{q_s^2}{2g} + \frac{\Omega_s}{g} \right) dx_{3s} + \int h_{1b} u_{nb} \left(\frac{q_b^2}{2g} + \frac{\Omega_b}{g} + \frac{p_b}{\rho g} \right) ds_b \\
& = \frac{\partial}{\partial x_1} \int \frac{\sigma_{x_1} u_1}{\rho g} dS_{x_1} + \int \frac{h_{1s} h_{3s}}{\rho g} [\sigma_{x_{1s}} u_{1s} \cos s(x_1, n) + \sigma_{x_{2s}} u_{2s} \cos s(x_2, n) \\
& + \sigma_{x_{3s}} u_{3s} \cos s(x_3, n)] dx_{3s} + \int \frac{h_{1b}}{\rho g} [\sigma_{x_{1b}} u_{1b} \cos b(x_1, n) \\
& + \sigma_{x_{2b}} u_{2b} \cos b(x_2, n) + \sigma_{x_{3b}} u_{3b} \cos b(x_3, n)] ds_b \\
& - \int \frac{1}{\rho g h_2 h_3} \left[\sigma_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 u_1) + \sigma_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 u_2) + \sigma_{x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 u_3) \right] dS_{x_1} \\
& - \int \frac{h_{1b}}{\rho g} (u_{1b} \tau_{x_{1b}} + u_{2b} \tau_{x_{2b}} + u_{3b} \tau_{x_{3b}}) ds_b + \int \frac{u_1}{\rho g h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} (\sigma_{x_1} - \sigma_{x_2}) dS_{x_1} \\
& + \int \frac{u_1}{\rho g h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} (\sigma_{x_1} - \sigma_{x_3}) dS_{x_1} + \int \frac{h_1 u_2}{\rho g h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} (\sigma_{x_2} - \sigma_{x_3}) dS_{x_1} \\
& + \int \frac{u_2}{\rho g h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} (\sigma_{x_2} - \sigma_{x_1}) dS_{x_1} + \int \frac{u_2}{\rho g h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} (\sigma_{x_3} - \sigma_{x_1}) dS_{x_1} \\
& + \int \frac{h_1 u_3}{\rho g h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} (\sigma_{x_3} - \sigma_{x_2}) dS_{x_1} - 2 \int \frac{h_1}{\rho g} (\tau_{x_1 x_2} e_{x_1 x_2} + \tau_{x_2 x_3} e_{x_2 x_3} + \tau_{x_3 x_1} e_{x_3 x_1}) dS_{x_1} \\
& \dots \dots \dots (9)
\end{aligned}$$

である。ここに、 s_b は潤辺、 S_{x_1} は流水断面積である。

これらの式はそのままでは解析されえないから、つぎの前提のもとに上述の式の簡略化を行なう。

- 1) 水路の非一様性が小さく、流れの力学的挙動は直角座標系によって十分に表わされうる。
- 2) 流れの速度成分は主流方向が卓越し、他のものは二次的な影響を与える程度である。
- 3) 圧力分布 p は静水圧とそれよりの変動との和によってあらわされる。すなわち、

$$p + \rho u' u' = \rho g \cos \theta (h - x_2) + \Delta \bar{p} \dots \dots \dots (10)$$

ただし、流線の曲率のあまり大きくない場合には $\Delta \bar{p} = 0$ である。

- 4) 流れの乱れの強さは平均的な変化に比して小さい。

以上の前提を用い、横からの流入がないものとするれば、これらはつぎのようである。

連続式：

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (11)$$

運動量式：

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{u_s}{gA} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\beta V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + (1 - \beta) \frac{V}{gA} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{gA} \int_0^B u_s \frac{\partial H}{\partial t} dz_s + \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} \\
& = \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho g R} \dots \dots \dots (12)
\end{aligned}$$

エネルギー方程式：

$$\begin{aligned}
& \frac{\beta}{g} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{u_s^2}{2gAV} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\alpha V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\beta - \alpha}{2g} \frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{gAV} \int_0^B \left(\frac{u_s^2}{2} \right) \frac{\partial H}{\partial t} dz_s \\
& + \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} = \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho g R} \frac{u_b}{V} \dots \dots \dots (13)
\end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{Q} \int \left(\frac{u^2}{V^2} \right) u dA, \\
\beta &= \frac{1}{A} \int \left(\frac{u}{V} \right)^2 dA
\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

であり、一定値をとるものと考えている。また A : 流水断面積, Q : 流量, V : 平均流速, u_s : 表面流速である。

一方従来からよく知られているように、2断面間の水流に対して平均的運動量およびエネルギー保存則を適用すると、基礎方程式はそれぞれ

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\beta V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + (1-\beta) \frac{V}{gA} \frac{\partial A}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} = \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho g R} \quad \dots\dots\dots (15)$$

および、

$$\frac{\beta}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\alpha V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\beta - \alpha}{2g} \frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial H}{\partial x} = \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho g R} \frac{u_b}{V} \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる⁹⁾。(12) 式と (15) 式を比較すると、(12) 式は (15) 式の左辺に

$$-\frac{u_s}{gA} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{gA} \int u_s \frac{\partial H}{\partial t} dz_s$$

が加わっており、(13) 式には (16) 式に

$$-\frac{u_s^2}{2gAV} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{gAV} \int \left(\frac{u_s^2}{2} \right) \frac{\partial H}{\partial t} dz_s$$

が加わっていることがわかる。これらの項のうち、最初の項はいわゆる local derivative term から出たものであり、第2の項は convective term からのものである。もし流れが定常的であれば、これらの項は0であり、従来の取扱いと一致する。しかし、非定常流においては $\partial H / \partial t$ の有限値が存在するので、上記の2項が付加される。いま、表面の局所的流速がその平均流速に等しく、水位が横断方向に水平に変動する場合には、これらの2項が存在しても互いに消し合って従来の方程式と一致するのであるが、一般の河川でいわれているごとく、洪水上昇期において横断方向の水面形が中央で凸に、下降期において中央部が凹になるような場合で、かつ u_s の横断方向分布が存在する場合にはこれらの2項の和が有限値を持つ。

3. 開水路非定常流の相似律

エネルギー方程式は、表面抵抗のなす仕事項に Manning 型の抵抗則を用い、 $\cos \theta \approx 1$ として、

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{g} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{u_s^2}{2gAV} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\alpha V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\beta - \alpha}{2g} \frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{gAV} \int \left(\frac{u_s^2}{2} \right) \frac{\partial H}{\partial t} dz_s \\ + \frac{\partial H}{\partial x} = i - \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}} \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

となる。したがって、開水路の非定常流は、それが一次元解析法で表現されるとき、連続式 (11) とエネルギー式 (17) によって与えられる。これらの方程式を基礎とする相似律は、縮尺を λ であらわすとき、模型と実物に対して基礎方程式の各項の比が等しくなければならないということより、

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_x} = \frac{\lambda_Q}{\lambda_x} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{\lambda_\beta \lambda_V}{\lambda_\sigma \lambda_t} = \frac{\lambda_{u_s^2}}{\lambda_\sigma \lambda_V \lambda_t} = \frac{\lambda_\alpha \lambda_V^2}{\lambda_\sigma \lambda_x} = \frac{\lambda_{\beta - \alpha} \lambda_V}{\lambda_\sigma \lambda_t} = \frac{\lambda_H}{\lambda_x} = \lambda_t = \frac{\lambda_{n^2} \lambda_V^2}{\lambda_{R^{4/3}}} \quad \dots\dots\dots (19)$$

がえられる。ただし、添字はそれの示す項の縮尺であることを示している。実物と模型が同一の重力場にあるときには $\lambda_\sigma = 1$ である。また流水断面が比較的単純な形をしていれば、 α, β の値は速度分布形状の多少の歪みに関係なく1に近く、さらに歪み模型においても、その値がほとんど変化しないものと仮定すれば

$$\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_{\beta - \alpha} = 1 \quad \dots\dots\dots (20)$$

となる。しかし断面の形が複雑な場合、たとえば複断面水路においては、高水敷上の水深が低水路の流速分布形状に重要な影響を及ぼすことがわかっている⁴⁾。そのような場合には、歪み模型において (20) 式が成立しなくなると予想され、注意しなければならない。

さて、(20) 式の成立を仮定する場合には所要の相似律は、歪み度を ϵ と書くことにすれば、

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_a &= \varepsilon^{-1} \lambda_H \\
 \lambda_V &= \lambda_H^{1/2} \\
 \lambda_t &= \varepsilon^{-1} \lambda_H^{1/2} \\
 \lambda_i &= \varepsilon \\
 \lambda_n &= \varepsilon^{1/2} \lambda_R^{2/3} \lambda_H^{-1/2} \\
 \lambda_V &= \lambda u_g
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

で与えられる。ここで第1から第5式までは従来から用いられているエネルギー方程式を使って導かれるが、第6式は新しく考慮に入れる項から出たものである。いうまでもなく、第2式は Froude の相似則を与えている。また第5の粗度係数に対する相似律には問題点が多く、定常流に対しては人工粗度の研究などが行なわれている⁵⁾。しかし、非定常流では時間的に粗度係数が変化することが確かめられており、その原因究明のため、あるいはそのような場合の相似律の確立には、現在の知識でわからない項をすべて粗度という概念にもちこむことは好ましいことではない。いま、粗度に関する相似律が何らかの方法で満足されたものとすれば、(21)式の第6の式を考慮しない場合、すなわち従来のエネルギー方程式にもとづく相似律においては、歪み模型の採用が可能となる。

さて、(19)式の第2項、すなわち(17)式の左辺第2項および第5項を考慮する場合には、特別な流速分布形状をしている場合のほかは、二次元流に対してのみ相似律(21)の第6式が満足される。すなわち実物において、ほぼ二次元的流れを呈している場合でも、歪み模型によって、三次元的特性があらわれる場合には正しい模型実験が行なわれなことになる。このように、非定常流においてはその非定常性のために、相似律を満足する模型の製作が著しく困難になる可能性を生じ、その原因であるエネルギー方程式中の local derivative term および convective term による項が実際にはどの程度の影響を与えるものであるかを知ることは重要である。

以下若干の実験によってその検討を加えよう。

4. 実験の概要

実験装置

実験水路：実験水路は京都大学工学部土木工学教室水理実験室にある勾配 1/585 に設置した幅 40 cm、全長 10 m の木製ペンキ仕上げ水路で、Manning 粗度係数は水深 5.2 cm に対して、 $n=0.0105$ (m-sec) である。水路底と側壁は同じ仕上げとなっているが、横断方向の速度分布の影響を顕著に出すために、両側壁に経 1 mm の針金を 1 cm 間隔に波状にあんだ金網を張りつけて粗面とした実験も行なった。流れの非定常性の生起は流量制御用空気弁を手動で操作することによって得られた。流量は流入部の電磁流量計と下流部の四角堰のついた量水槽によって測定される。水路全体の図は Fig. 1 に示されている。

計測器：水位は抵抗線式波高計と動歪測定器を通じ、電磁オシログラフに記録された。横断方向の水位変動測定のために、断面内に 5 点、すなわち 5 組の抵抗線を用いて水位の同時観測も行なわれた。抵抗線は十分に細く、これが水流に与える影響は無視される。また波高計相互の干渉などの影響はなく、1 mm 程度の水位差も水面におこる短周期の波がかなり激しい場合でも、十分に読みとられた。断面内の測点配置は Fig. 1 に示すように対称的で、右側壁より 5 cm, 12.5 cm, 20 cm, 27.5 cm, 35 cm のところにある。鉛直方向の流速分布は同一鉛直線内で間隔が自由にかえられる 3 本の外径 2 mm のピトー管を製作して行なった。ピトー管の支持枠には針がとりつけられており、その枠はポイントゲージにとりつけられている。針の先端からピトー管受圧面までの距離は 3 mm であった。ピトー管からは最大 20 gr/cm² という差圧計を通り、動歪測定器と電磁オシログラフによって流速が測定された。横断方向の表面流速の分布はその方向にならべた外径 2 mm のピトー管、最大圧 20 gr/cm² の差圧計、動歪測定器、電磁オシログラフの組合せで行なった。ピトー管の支持枠には水深測定用針がつけられている。支持枠はポイントゲージにとりつけられており、針の先端からピトー管の受圧面までの距離は 5.5 mm である。

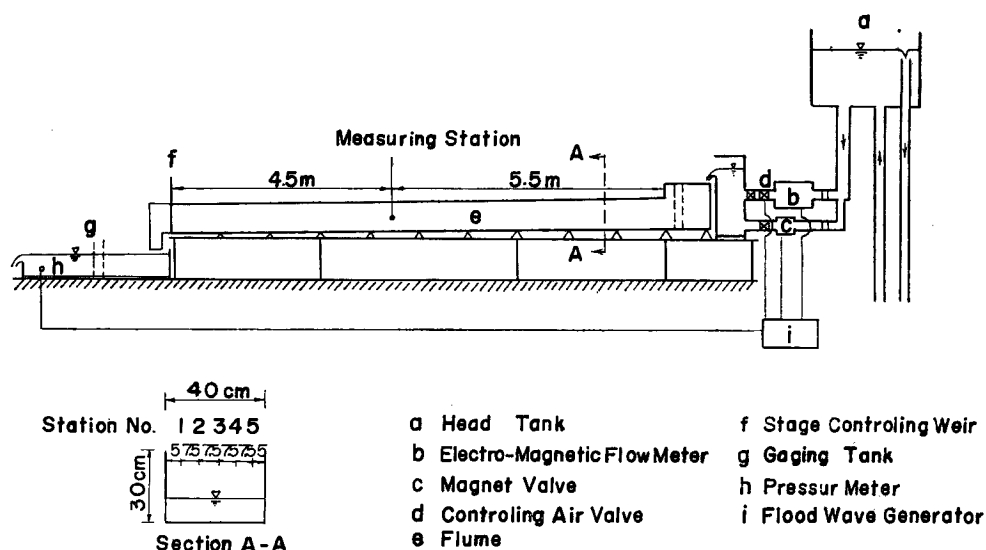


Fig. 1 Experimental flume in laboratory

実験方法および実験の種類

行なった実験の種類は Table 1 に示すようなもので、大部分がほぼ二等辺三角形形状のハイドログラフを持っている。水位変動の割合はかなり速いものである。Run 1-1~1-4 は横断方向の水位変動測定のためのもの、Run 2-1, 2-2 は粗側壁の場合に、側壁より 15 cm の位置で鉛直流速分布を測定したものである。こ

Table 1 Kinds of experiments

Run No.	Base Flow Depth (cm)	Peak Depth (cm)	Duration Time (sec)	Matters for Measurements	Side Wall
1-1	3.62	5.35	102	Lateral Water Stage Variation	Smooth
1-2	2.40	5.90	135		
1-3	2.33	6.03	135		Rough
1-4	3.48	6.46	75		
2-1	2.50	6.50	150	Longitudinal Water Stage Variation, Vertical Distribution of Velocity	Rough
2-2	2.50	6.60	150		
3-1	3.68	6.13	255	Lateral Surface Velocity Distribution	Smooth
3-2	2.38	6.58	200		
3-3	2.38	6.38	100	Water Stage Variation	Rough
3-4	2.50	6.30	170		
3-5	2.50	6.20	130		
3-6	2.50	7.55	165		

の測点上の鉛直方向に平均した流速はほぼ断面の平均流速に近いものと考えられる。測定位置は水路底より 1 mm, 1.1 cm, 2.1 cm であった。なお予備的に行なった実験において、ピトー管支持枠に取り付けた針の先端が常に水面に接するようにピトー管を動かした場合、すなわち水面下 3 mm, 1.3 cm, 2.3 cm の位置での流速測定も行なった。Run 3-1~3-6 は表面流速の横断方向分布測定のためのもので、水位変動に従って、ピトー管支持枠にとりつけた針の先端が常に水面に接するように操作して測定した。すなわち、水面下 5.5 mm での流速の横断分布を測定した。測定の横断方向の位置は、滑側壁の場合、左側面より、1 cm, 6 cm, 20 cm, 粗側壁の場合、元の側壁より 1.9 cm, 6.9 cm 20.9 cm であった。なお測点の水路方向の位置は、横断水面形測定においては下流端より 4.5 m の所、鉛直、横断方向流速分布測定では 5 m のところである。また Run 2-1, 2-2 においては、水面勾配測定のため 4.5 m と 7 m に波高計を置いて同時に水位記録をとった。なお Table 1 中の Peak Depth は断面中央の水深を示している。実験をはじめる前に初期定常流において、ほぼ等流状態が得られるように水路下流端の水位調節用ゲート进行操作し、その後はほぼ一様な二等辺三角形形状の $h \sim t$ 曲線が得られるように空気弁を手動して実験を行なった。

5. 実験結果とその考察

1) 横断方向の水位変動

Fig. 2 (1), (2), Fig. 3 (1), (2) はそれぞれ滑側壁と粗側壁の場合の初期定常流の水位からの変動水位 h と時間 t との関係を示したものである。実際の河川においては、洪水の上昇期に断面中央部がふくれ、下降期には中央部がくぼむといわれている。またその理由として、断面中央部では流速が速く、堤防に近づくとき遅くなるために、断面中央部で洪水波の伝播速度が大きくて中央部の水位が早く上昇し、下降期には堤防近傍より早く減衰するためであるとされている。また、それはこのようにしておくる横断方向の水位差のために

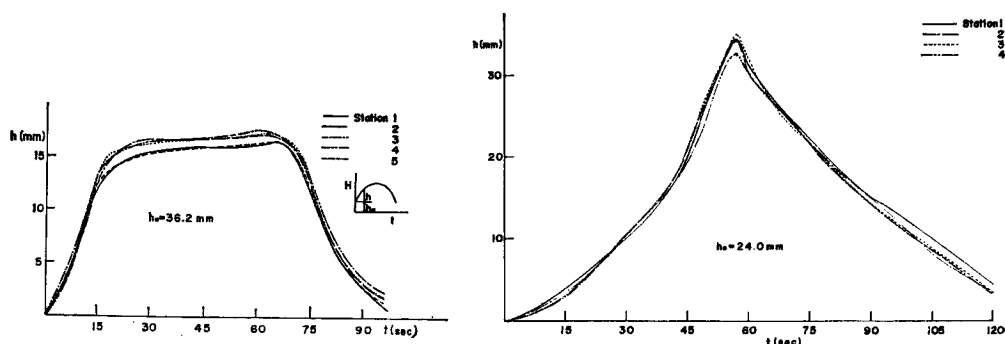


Fig. 2 (1), (2) Stage hydrograph (Smooth wall)

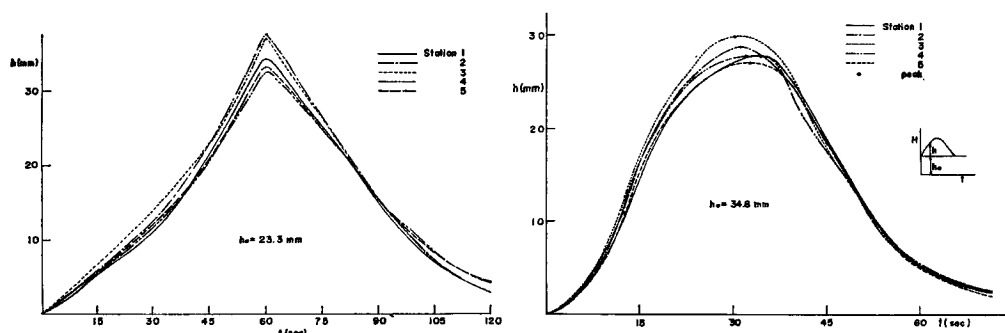


Fig. 3 (1), (2) Stage hydrograph (rough wall)

もたらされる二次流の存在が河を流れる塵埃の挙動から観測できることによって説明されるともいわれている。本実験水路のような長方形断面の場合、Fig. 2 (1), (2)の両側壁が滑面るとき、横断方向の流速分布による二次元流からの歪みはさほど小さくなく、このようにより水位変化の急激な場合でも水位差は顕著にはあらわれていない。一方、壁面を粗にした場合には、水位上昇期に中央で凸、下降期に凹になっていることがかなり顕著にあらわれている。しかも、水位のピークは断面中央部で側壁近傍より早くあらわれており、前述の定性的説明を肯定しているようにみえる。しかし、後に述べるように、この実験では加速度項がかなり大きく、通常河川にあらわれる洪水よりもはるかに急激な変化をするものであるから、実際の河川における横断方向水位差があらわれる原因についてはさらに検討を加える必要があるであろう。

2) 従来のエネルギー方程式中の各項の order

エネルギー方程式 (16) 中の各項の order を検討するために水位、水面勾配の変化および鉛直方向の流速分布の変化を実測した (Run 2-1, 2-2)。

水位、水面勾配の測定には問題はないが、鉛直流速分布の測定は非常に困難である。まず水路底から 1mm, 1.1cm, 2.1cm の位置にピトー管を固定して測定した結果、流速分布形は、この範囲ではほぼ対数関数的であることがわかった。つぎに予備実験として、水面から 3mm, 1.3cm, 2.3cm の位置における流速測定を行ない、その結果からやはり水面近傍においてもほぼ対数分布則にしたがうと考えてよいことがわかった。したがって、測線上の流速分布は水路底より 1mm, 1.1cm, 2.1cm の位置での実測流速分布を対数的に水面まで延長した曲線によって示されるものと考えられよう。このようにして求めた鉛直流速分布の 1 例を示すと、Fig. 4 のようになる。図中の数字は水深変化開始後の時間を秒単位で示したものである。なお、

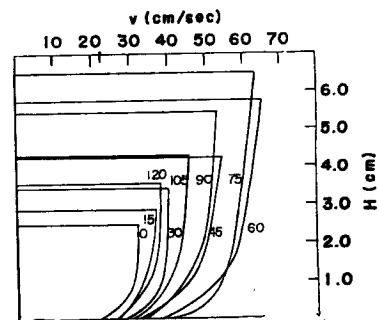


Fig. 4 Vertical velocity profile (Run 2-1)

Table 2 Comparison of order in terms in the classical energy equation

Run No.	t (sec)	H (cm)	$i - \frac{\partial H}{\partial x}$ ($\times 10^{-3}$)	$n^2 V^2 / R^{4/3}$ ($\times 10^{-3}$)	$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t}$ ($\times 10^{-3}$)	$\frac{1}{g} V \frac{\partial V}{\partial x}$ ($\times 10^{-3}$)
2-1	15	2.90	2.11	1.54	0.23	-0.16
	30	3.34	2.39	1.75	0.48	-0.22
	45	4.28	3.19	2.08	0.85	0.01
	60	5.78	3.59	2.41	0.81	0.14
	75	6.50	3.31	2.09	-0.64	0.86
	90	5.45	2.51	1.69	-0.55	1.08
	105	4.30	2.51	1.71	-0.49	0.97
	120	3.55	1.91	1.41	-0.47	0.55
2-2	15	2.90	2.19	1.67	0.39	-0.12
	30	3.35	2.31	1.80	0.47	-0.19
	45	4.20	3.63	2.18	0.77	0.21
	60	5.85	4.43	2.44	0.63	0.55
	75	6.30	2.63	2.06	-0.85	1.10
	90	5.18	1.99	1.51	-0.56	0.73
	105	4.05	2.43	1.56	-0.41	0.87
	120	3.45	1.39	1.31	-0.35	0.23

鉛直流速分布の測線は右岸側壁より 15 cm の所にあるが、この辺の水深方向平均流速はほぼ断面平均流速に近いものと考えられる。流速測定の結果は大胆な仮定のもとにまとめられたから誤差もかなり大きいと考えられる。しかし、エネルギー方程式の各項の order の検討に対しては、この程度の資料によっても、それほど重大な誤りを犯すとは考えられない。

さて、Fig. 4 のような流速分布形が求まれば、平均流速が求まり、またしたがって $(1/g)\partial V/\partial t$ を計算することができる。また

$$\frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{V}{gH} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (22)$$

であるから、実測の水面勾配、水位変化よりこの項も計算される。このようにして求めたエネルギー方程式 (16) の各項の order を表示すれば Table 2 のようになる。ただし、 $\alpha=\beta=1$ としている。この表からわかるように、本実験のように水位変化の急激な場合には、local derivative term, convective term は水面勾配項、摩擦項に比較して小さいが、無視できる order ではないことがわかる。この点で本実験は通常河川にあらわれるような洪水を対象とはしていないのである。

3) 新しいエネルギー方程式の各項の order

エネルギー方程式 (17) 中の local derivative term と convective term による項との和、

$$-\frac{u_s^2}{2gAV} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{gAV} \int \left(\frac{u_s^2}{2} \right) \frac{\partial H}{\partial t} dz_s \equiv K \quad \dots\dots\dots (23)$$

の項がどのような order の値を持つかを調べるために、Run 2-1, 2-2 とほぼ同じ程度の水位変化をするハイドログラフについて表面流速の横断分布を測定した。ただし、厳密には前述のように水面下 5.5 mm での流速である。この横断分布の 1 例を滑側壁、粗側壁のそれぞれについて示すと Fig. 5 (1), (2) のようになっている。当然のことながら、粗面の方が横断方向の速度勾配が大きい。この表面流速の値と $\partial H/\partial t$ の値とから、横断面の任意の点で $u_s^2(\partial H/\partial t)$ が計算されるから、断面平均流速 V がわかれば上記の K の値が計算できる。ただし、 $\partial H/\partial t$ の値は断面中央部の H の変化から求めており、 $\partial H/\partial t$ の横断分布は考慮していない。測定器の都合で表面流速を測定したときには流速の鉛直分布は測定できなかった。しかし多くの資料を検討してみると側壁から 6 cm あるいは 6.9 cm の位置での表面流速は、ほぼ断面平均流速に近くなっていることがわかったので、ただ K の order を知る目的では、これで断面平均流速を代表してもよいと考えることにしよう。そのようにして断面中央において K の値を計算し、同様に $(1/g)\partial V/\partial t$ のかわりに $(1/g)\partial u_{ss}/\partial t$ の値を計算して各実験ケースについて比較したのが Table 3 である。この表からわかるように、 K の値は通常 $(1/g)\partial V/\partial t$ の項よりも小さいが、水位ピーク近傍においては、とくに粗側壁で流速の横断方向分布が二次元流のそれから大きく歪んでいる場合には同じ order であり、 K を $(1/g)\partial V/\partial t$ に比して無視することはできない。また、これらの実験における上昇期の $\partial H/\partial t$ はほぼ 5×10^{-2} cm/sec 程度であり、Run 2-1, 2-2 における $\partial H/\partial t$ もこの程度である。このような場合、Run 2-1, 2-2 に

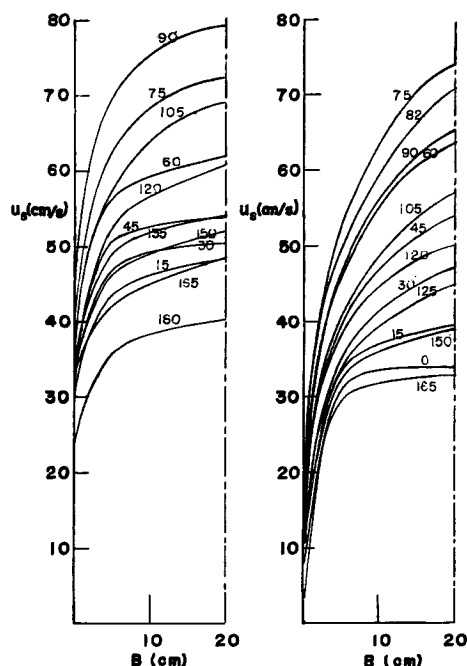


Fig. 5 (1) Surface velocity profile (Run 3-2)

Fig. 5 (2) Surface velocity profile (Run 3-4)

Table 3 Comparison of order in terms in energy equation

Run No.	t (sec)	H (cm)	$\frac{1}{2gu_{ss}H} \left\{ \frac{1}{B} \int_0^B u_s^2 \frac{\partial H}{\partial t} dz_s - u_s^2 \frac{\partial H}{\partial t} \right\} (\times 10^{-8})$	$\frac{1}{g} \frac{\partial u_{ss}}{\partial t} (\times 10^{-8})$
3-1	15	4.23	-0.01	0.05
	30	4.38	-0.01	0.09
	45	4.48	-0.01	0.07
	60	4.61	-0.02	0.06
	75	4.86	-0.02	0.21
	90	5.13	-0.02	0.17
	105	5.38	-0.02	0.11
	120	5.68	-0.02	0.15
	135	6.13	0	0
	150	5.93	0.02	-0.21
	165	5.66	0.02	-0.25
	180	5.23	0.03	-0.24
	195	4.93	0.03	-0.06
3-2	30	3.58	-0.03	0.27
	45	4.08	-0.03	0.31
	60	4.68	-0.05	0.41
	75	5.68	-0.10	0.48
	90	6.58	0	0
	105	5.78	0.09	-0.55
	120	4.98	0.05	-0.32
	135	4.48	0.03	-0.24
	150	3.98	0.03	-0.24
	165	3.78	0.04	-0.30
3-3	15	4.13	-0.06	0.94
	30	5.18	-0.11	0.56
	45	5.85	0.08	-0.89
	60	4.43	0.19	-0.72
	75	3.43	0.13	-0.46
3-4	15	3.05	-0.03	0.22
	30	3.50	-0.06	0.25
	45	4.05	-0.08	0.37
	60	4.80	-0.13	0.43
	75	5.80	-0.15	0
	90	6.05	0.13	-0.57
	105	5.20	0.16	-0.22
	120	4.35	0.16	-0.37
	135	3.70	0.10	-0.26
	150	3.10	0.09	-0.28
3-5	15	3.00	-0.06	0.32
	30	3.80	-0.17	0.63
	45	5.30	-0.25	0.70
	60	5.90	0.15	-0.77
	75	4.90	0.16	-0.44
	90	3.90	0.09	-0.26
	105	3.10	0.04	-0.20
3-6	15	3.05	-0.06	0.33
	30	3.75	-0.13	0.32
	45	4.80	-0.24	0.42
	60	6.40	-0.27	0.52
	75	7.55	0	0
	90	7.20	0.10	-0.73
	105	5.75	0.18	-0.37
	120	4.60	0.12	-0.32
	135	3.70	0.05	-0.33

よって、 $(1/g)\partial V/\partial t$ あるいは $(V/g)\partial V/\partial x$ の項は $i-\partial H/\partial x$, $n^2 V^2/R^{4/3}$ の項に比して無視できないことが判明しており、結局今回の実験の範囲では、断面中央における K の項もまた、水面勾配、摩擦項に

比して無視できないことになる。したがって、もし実物が二次元的な流れであったとしても、その歪み模型をとって、この実験水路のようになったものとすれば、模型においては K の影響が入ってくるので、従来の考え方の相似律にしたがって模型内の現象を実物に換算すると厳密には正しい結果を与えないことになる。なお、ここでは断面中央において K の項を計算したが、側壁近傍において K の符号は中央部とは逆になる。したがって K の効果は中央部と側壁近傍で逆であり、実際上の問題として、 K の効果を粗度係数に組みこんで評価することは困難である。

さらに、非定常流の波形伝播や変形特性について考えてみることにしよう。連続式 (11) とエネルギー方程式 (17) を基礎とし、 $\alpha=\beta=1$ と仮定すれば、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 V &= -(\partial H / \partial t) / (\partial H / \partial x), \quad \alpha_2 V = (\partial q / \partial t) / (\partial H / \partial t) \\ \alpha_3 V &= (\partial^2 H / \partial t^2) / (\partial^2 q / \partial x^2), \quad \alpha_4 V = (\partial^2 q / \partial x^2) / (\partial^2 H / \partial x^2) \\ \phi &= (\partial H / \partial t) / iV, \quad Fr^2 = g^2 / gH^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

と書くことにより、非定常流の基礎方程式はつぎのように書かれる。

$$\left\{ 1 - \frac{i}{2n^2 g H^3} \left(\frac{6\alpha_1 - 3 - \alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1^2} \right) \phi \right\} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{q}{H} \left\{ \frac{5}{3} - \frac{4H}{3(B+2H)} \right\} \frac{\partial H}{\partial x} \\ = \frac{R^{4/3} H^2}{2n^2 q} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{gBq} \int \left(\frac{u_s^2}{2} \right) \frac{\partial H}{\partial t} dz_s - \frac{u_s^2}{2gBq} \frac{\partial H}{\partial t} \right\} \right] \dots\dots\dots (25)$$

この式からわかるように、 $\partial K / \partial x$ の項は波形の伝播と変形に影響を与えるが、その与え方は粗度係数 n のそれとは異なることが式の形をみると理解される。したがって、厳密には K の効果を粗度係数に組み込むことは困難があり、今後はこの項が実際の模型実験において、どれほどの影響を与えているかを検討し、これらの項が非定常流の特性にどのような影響を与えているかを明らかにしていかなければならないであろう。

6. 結 語

著者らは開水路非定常流について、一次元解析法の厳密な考察から出発し、一樣長方形断面水路において従来のものよりさらに一般的なエネルギー方程式を導いた。この方程式にもとづく相似律を導入し、模型において二次元流の仮定があてはまらない場合には相似律が満足されないことを指摘した。さらに、実験室の水路によって実験を行ない、エネルギー方程式の各項の値の order を比較し、従来のエネルギー方程式に含まれていない表面流速分布と水深変化率との関数の項が、断面平均流速変化率の項と同じ order になり得ることを確かめ、加速度項を無視できないような急激なハイドログラフの場合には、本来加速度項中に含まれているこの項もまた無視できないことが判明した。したがってこのような場合には、模型は厳密には相似律を満足していないことになる。そしてさらに、この項の影響を粗度係数の相似律に組み込んで考えることの不適当であることを述べた。

今後は実際の模型において、ここで対象とした項がどれほどの大きさを持っており、歪み模型実験において、非定常流に対してどれほどの誤差の原因となっているかを究明していかなければならないと考えている。

参 考 文 献

- 1) 岩佐義朗：開水路流れの基礎理論，水工学シリーズ，64-01，土木学会水理委員会，昭和39年7月。
- 2) 岩佐義朗：同上
- 3) 岩垣雄一：開水路水流の理論，水工学最近の進歩，土木学会，昭和28年3月。
- 4) 芦田和男，高橋 保，竹元忠嗣：複断面水路における洪水流，京都大学防災研究所年報第10号，昭和42年3月。
- 5) 足立昭平：固定床河川模型水路の人工粗度に関する研度，学位論文，昭和36年。