

貯水地をもつ河川の渇水確率について

長 尾 正 志

ON THE PROBABILITY OF WATER SHORTAGE IN A RIVER SYSTEM WITH A RESERVOIR

By *Masashi* NAGAO

Synopsis

This study aims to clarify the possibility of water shortage by means of the theoretical application of the stochastic inventory model when the water-utilization is carried on through a reservoir.

Firstly, at the time of adopting this model, inflows should be transformed into random variables under consideration of their seasonal variation. The seasonal randomization is done by the prediction theory due to the linear combination of past data. Then, the stationary distribution of water stored is deduced by using of the theory of the Markov-chain of the stored water. The deduction is done in the following two cases; the one contains fixed capacity of reservoir and demanded release of water, the other the seasonal variation of capacity of reservoir and demanded release.

Next, on the basis of this stationary distribution, the stochastic treatment to estimate the probability of water shortage at any time and to make clear the relation between the probability and the duration time is developed, and the necessary mathematical expressions are shown. Finally, a computational procedure applying this theory to the Yanagase Multi-purpose Reservoir is shown and the availability of this approach is clarified.

1. ま え が き

貯水池による利水計画を樹てる場合には、一般に、流量観測の期間はそう長くはないし、また、貯水池では時々刻々の流量というよりむしろある継続した期間において平滑化された総流量が計画対象となるわけである。したがって、流入量系列に内在されている情報をどのような形で抽出して考察の対象とするかによって計画の方向が決められるといってもよい。

ところで、利水計画の策定にあたっては、従来、既往の主要渇水年を考慮して基準となる渇水を定めていたように、基準渇水としては普通過去10年間の既往渇水中の第2位または第3位の渇水を選んでいたのである¹⁾。しかし、たとえば、農業用水は、工業用水や上水道用水などと異なり、年間で灌漑期だけに必要となるので、補給総水量からみた渇水状態と、自然流況からみた渇水状態とは必ずしも一致しない。また、既往の渇水年を計画基準とする考えは、洪水処理計画の基準として、既往最大またはそれに準じた出水を採択して基本高水が決定される場合にはほぼ対応するわけで、計画の信頼性についてはほとんど判断の材料が与えられないといってもよい。さらに、渇水による被害は、洪水被害に比べてそれほど決定的なものではないから確率的な評価を行ない得る面はかなり大きいといえよう。

なお、渇水といえ、従来ともすれば、ある時点において何 m^3 不足するといったように、その量的な面だけが問題にされ勝ちであったが、実際には、たとえば、何日間不足が続くといった時間的な要素も重要で、この両者を合わせ考えねばならないことを強調しておく。

さて、貯水池による補給水量の信頼性を確率的な面から評価しようとする試みは、既往流入量系列をそのまま利用した、いわゆる、Mass Curve の方法と関連して古くから進められてきた²⁾。ところで、過去の流入量系列が将来もそのまま生起するという保証は何もないから、流入量の不確定性を考慮したさらに現実に近い理論モデルの設定が必要とされた。そこで、貯水池を含む系を1年をサイクルとして同じ状態を繰り返す在庫モデルに擬して、補給水量の価値評価の問題を扱うという研究が J. D. C. Little³⁾ や T. C. Koopmans⁴⁾ によって、とくに火力発電との関連において行なわれた。さらに、こうした方向の一つとして、確率的な変動をする流入量を受ける貯水池系を考え、貯水量系列が単純マルコフ連鎖をなすことに着目し、経年的な貯水状態の推移確率を考察した研究が P. A. P. Moran⁵⁾、さらに季節的特徴を組み入れようとする考察が Harvournd 大学の水資源開発研究グループ⁶⁾ で行なわれている。

ところで、上記の理論はいずれも、流入量系列は互に独立という仮定に基づいているが、現実には、流入量系列には持続性が認められ、この仮定は厳密には成立しない。そこで、時間的に隔った流量の間に相関性を考慮しようとする研究が Lloyd らによって試みられている⁷⁾。これは、流入量と貯水量を変量とする二変数マルコフ連鎖の理論の応用を目指したものであるが、この方面の理論的展開が不十分であるため特殊な場合の解しか得られていない。したがって、現実の解析では、流入量が独立、すなわちランダム性の仮定を使用せざるを得ないが、その仮定が許されるように流入量系列を編成し直す必要が感じられる。

さて、本研究は、貯水池による補給水量確保の可能性を、確率的な入力を受ける在庫問題として考察したものであるが、とくにわが国河川のように季節的特徴の極めて強い流況を如何に計画に勘案するかに眼目をおいた。その概要を述べると、まず、年間における流入量系列を季節的にランダム化する手法を示した。ついで、こうして得られた確率分布をもつ流入量を使って、渇水の量的な検討を行なう基礎として、貯水量の定常的分布を推定する方法を、貯水池の操作規則が年間で一定な場合とそうでない場合について検討した。さらに、渇水の時間的な面における検討の基礎となるものとして、時間経過と渇水確率との関係を示した。最後に、実河川への適用例を通じて、問題取扱いの具体的手法を示したものである。

2. 流量系列のランダム化

貯水池へ流入する流量系列をランダム化し、このランダム化された流量を入力とする在庫問題として貯水池問題を取扱うには、わが国のように貯水池規模が小さく、季節ないしはそれ以下の時間間隔での流量の調整が貯水池利用の主目的である場合には、まず季節的な流量の持続性に着目する必要がある、こうした持続性の定量的な把握が重要となる。

このために、われわれは各地の河川流量の日流量に基づくコログラムの低減特性を調べてきたが、その結果、同一地点では季節的にはほぼ似た特性を示すことが認められた⁸⁾。

いま、日総流入量系列を $\{X(t)\}$, $t=1, 2, \dots, n$ とし、平均値、標準偏差および間隔をそれぞれ $\bar{X}$, s および τ とすれば、日総流量系列に基づく自己相関係数は次式で得られる。

$$\phi_1(\tau) = \frac{1}{ns^2} \sum_{t=1}^n \{X(t+\tau) - \bar{X}\} \{X(t) - \bar{X}\} \dots\dots\dots (1)$$

一方、重複しないでとった j 日間総流量の自己相関係数 $\phi_j(\tau)$ は、(1) 式の $\phi_1(\tau)$ が与えられていれば次式で求められる。

$$\begin{aligned} \phi_j(\tau) = & \phi_1(j\tau - j + 1) + 2\phi_1(j\tau - j + 2) + \dots\dots\dots + (j-1)\phi_1(j\tau - 1) + j\phi_1(j\tau) \\ & + (j-1)\phi_1(j\tau + 1) + \dots\dots\dots + 2\phi_1(j\tau + j - 2) + \phi_1(j\tau + j - 1) \\ & \times [j + 2\{(j-1)\phi_1(1) + (j-2)\phi_1(2) + \dots\dots\dots + \phi_1(j-1)\}]^{-1} \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

さて、この $\phi_j(\tau)$ を実測の資料より算出してみると、 j および τ が 1, 2 週間程度以内では、ほぼ指数関

数的に減少しているようで、これをたとえば、第 s 季について次式のように表わし、その低減係数 $\alpha_j^{(s)}$ を流量の持続性の尺度と考えた。

$$\varphi_j^{(s)}(\tau) = \exp\{-\alpha_j^{(s)}|\tau|\} \quad \dots\dots\dots(3)$$

ただし、 $\alpha_j^{(s)}$ は第 s 季、 j 日間間隔で決まる定数としている。

一方、流量系列がランダムであるとは、逆に、既往の資料を用いた将来の予測に意味がないということである。そこで、この予測を線型的な予測で考え、N. Wiener の線型予測理論を使ってコログラムが指数関数的な低減の場合の予測限界を求めた結果が次式である⁸⁾。ただし、 σ_a は、規準化された単位を用いた場合に、予測に伴ない許容される標準偏差で、完全に予測できれば $\sigma_a=0$ 、完全に予測不能なら $\sigma_a=1$ である。

$$p_j^{(s)} = -\log_e(1-\sigma_a^2)/2\alpha_j^{(s)} \quad \dots\dots\dots(4)$$

したがって、 j 日を単位期間とし、(2)、(3) 式で求めた $\alpha_j^{(s)}$ を使って、ある許容される標準偏差 σ_a の下での予測限界 $p_j^{(s)}$ を(4) 式より求めれば、それが単位期間 j より小さくなれば予測は意味を持たないことになる。つまり、そのような限界の j を $j_0^{(s)}$ とすれば、

$$j_0^{(s)} = p_j^{(s)} \quad \dots\dots\dots(5)$$

において、 $j_0^{(s)}$ 日間総流量は互いに独立となりランダム化されたことになる。そこで、年間の流量系列を、季節ごとに、その間の総流量がランダム過程とみなせるような単位期間 $j_0^{(s)}$ ごとに分割し、それを標本とした確率分布を貯水池への入力分布として採用した。

さて、こうした流量の分布型を実際に調べてみると、他の水文量の場合と同様に、ほぼ対数正規分布で近似できるようであった。そこで、その非超過確率を、Thomas plot を用いて、次式で表わしておくことにした。

$$\left. \begin{aligned} F(X_i^{(s)}) &= \frac{i}{n_s+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi_i^{(s)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi \\ \xi_i^{(s)} &= a_s \log(X_i^{(s)} + b_s), \quad a_s, b_s : \text{定数} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ただし、 n_s および i は、第 s 季の資料数および資料を大きい方から並べた順位である。

3. 貯水量の確率的推移変化

以上のようにしてランダム化された流入量を用いると、貯水池の貯水量の変化は、在庫問題として扱うことができる。ところで、このようなモデルで、経年的な場合、つまり、流入量の確率分布および操作規則が各時点で同一の場合の解が Moran によって求められている⁵⁾ ので、ここでは、その解を、年間で流入量分布に季節的な相違があり、かつ貯水池容量および規定放流量を定める操作規則も季節的に変わる場合に拡張した考察を行なった。

(1) 仮 定

計算の基礎においた仮定はつぎのようである。

i) 季節：一年を I, II, ..., s , ..., S の季節に分け、各季節にはそれぞれ n_s ($s=I, \dots, S$) の期間があるとする。

ii) 流入量：第 s 季の期間 ($n, n+1$)、($n=0, 1, 2, \dots, n_s-1$) での貯水池への総流入量を $X_n^{(s)}$ とし、 $X_0^{(s)}, X_1^{(s)}, \dots$ は互いに独立、かつ、つぎのような同じ分布型をもつ。

$$Pr\{X_n^{(s)} = j\} = g_j^{(s)}, \quad (j=0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots(7)$$

iii) 貯水量： $Z_n^{(s)}$ を $X_n^{(s)}$ が貯水池へ流入する前の時点における貯水量とする。

iv) 貯水池容量、放流量：季節的にそれぞれ規定の大きさの貯水池容量 k_s 、放流量 m_s をもつ。

(2) 貯水量の推移確率

説明の便宜上、年間で貯水池容量、放流量が一定、すなわち、 $k_1=k_{11}=\dots\equiv k$ 、 $m_1=m_{11}=\dots\equiv m$ の場合と、季節的に異なる、すなわち、 $k_s\neq k_{s+1}$ 、 $m_s\neq m_{s+1}$ の場合に分けて考察しよう。

[Case I] 年間で貯水池容量、放流量が一定の場合

前記 (1) の仮定の下で、 $n+1$ 時点における貯水量は、次式で与えられる。 $(n=0, 1, \dots, n_s-1)$

$$Z_{n+1}^{(s)} = \min(k, Z_n^{(s)} + X_n^{(s)}) - \min(m, Z_n^{(s)} + Z_n^{(s)}) \quad \dots\dots\dots (8)$$

したがって上式を媒介として、貯水量がある時点の状態より次の時点の状態へと移行するわけであるが、式の形より貯水量系列 $\{Z_n^{(s)}\}$ が単純マルコフ連鎖を構成することがわかる。マルコフ連鎖の性質として、任意時点 n の状態確率 p_n は、その初期確率ベクトル $p_0^{(s)}$ および推移確率行列 P_s によって次式のように表わせる。なお、 P_s^n は行列 P_s の n 回のベクトル積を示す。

$$p_n = p_0^{(s)} P_s^n \quad (n=1, 2, \dots, n_s) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$\nearrow$	0	1	2	⋯	$k-m-1$	$k-m$	
$P_s =$	0	G_m	g_{m+1}	g_{m+2}	⋯	g_{k-1}	h_k
	1	G_{m-1}	g_m	g_{m+1}	⋯	g_{k-2}	h_{k-1}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	m	G_0	g_1	g_2	⋮	g_{k-m-1}	h_{k-m}
	$m+1$	0	g_0	g_2	⋮	g_{k-m-2}	h_{k-m-1}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$k-m$	0	0	0	⋮	g_{m-1}	h_m

ここに、

$$G_j = \sum_{i=0}^j g_i \quad \dots\dots\dots$$

$$h_j = \sum_{i=j}^{\infty} g_i \quad \dots\dots\dots$$

$\dots\dots\dots (10)$

ただし、(10) 式の行列要素中の s は簡単のために略している。

さらに、第 $s+1$ 季に関しては、

$$p_n = p_0^{(s)} P_s^{ns} P_{s+1}^n \quad (n=1, 2, \dots, n_{s+1}) \quad \dots\dots\dots (11)$$

一般に、第 I 季に始まった第 s 季に関しては、

$$p_n = p_0^{(I)} P_I^{n_I} P_{II}^{n_{II}} \dots P_s^n \quad (n=1, 2, \dots, n_s) \quad \dots\dots\dots (12)$$

が任意時点の状態確率を与える。ただし、 $s=I, II, \dots, S$ 。

i) 貯水量分布の過渡的变化

ここでは、初期状態として特殊な場合を考えてみよう。まず、(12) 式において、 $P_I^{n_I} P_{II}^{n_{II}} \dots P_s^n$ を $P^{(n)}$ 、その確率成分を $p_{ij}^{(n)} (i, j=0, 1, \dots, k-m)$ と記せば、初期状態 $p_0^{(I)} \equiv (p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, \dots, p_{k-m}^{(0)})$ に対する任意時点 n における状態確率ベクトル、 $(p_j^{(n)})$ は、次式のように書き直せる。

$$(p_j^{(n)}) = (p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, \dots, p_{k-m}^{(0)}) (p_{ij}^{(n)}) = \left(\sum_{i=0}^{k-m} p_i^{(0)} p_{ij}^{(n)} \right) \quad (j=0, 1, 2, \dots, k-m) \quad \dots\dots\dots (13)$$

上式によって、貯水量の初期状態が任意に与えられた場合に、以後の貯水量の過渡的な変化が計算できるが、とくに重要なのはつぎのような場合である。

a. 初期満水位 (初期に貯水池が満水) の場合、 $p_0^{(0)} = p_1^{(0)} = \dots = p_{k-m-1}^{(0)} = 0$ 、 $p_{k-m}^{(0)} = 1$ とおくと、

$$(p_j^{(n)}) = (p_{k-m,0}^{(n)}, p_{k-m,1}^{(n)}, \dots, p_{k-m,k-m}^{(n)})$$

b. 初期渇水位 (初期に貯水池が空) の場合、 $p_0^{(0)} = 1$ 、 $p_1^{(0)} = p_2^{(0)} = \dots = p_{k-m}^{(0)} = 0$

$$(p_j^{(n)}) = (p_{0,0}^{(n)}, p_{0,1}^{(n)}, \dots, p_{0,k-m}^{(n)})$$

c. 初期設定水位 (貯水位をある水量 f に設定) の場合、 $p_f^{(0)} = 1$ 、 $p_0^{(0)} = 0 \quad (i \neq f)$

$$(p_j^{(n)}) = (p_{f,0}^{(n)}, p_{f,1}^{(n)}, \dots, p_{f,k-m}^{(n)})$$

d. 制限水位 (貯水位をある水量 f 以下に制限) の場合、 $p_j^0 (j=0, \dots, k-m)$ を放置しておけば、前の時点の影響によって 0 時点で貯水量が j になる確率を示すとすれば、

$$p_0^{(0)} = p_0^0, \dots, p_{f-1}^{(0)} = p_{f-1}^0, p_f^{(0)} = \sum_{j=f}^{k-m} p_j^0, p_i^{(0)} = 0 \quad (i \geq f+1)$$

$$(p_j^{(n)}) = \left(\sum_{i=0}^{f-1} p_j^0 p_{i0}^{(n)} + \left(\sum_{i=f}^{k-m} p_i^0 \right) p_{f,0}^{(n)} \sum_{i=0}^{f-1} p_i^0 p_{i1}^{(n)} + \left(\sum_{j=f}^{k-m} p_j^0 \right) p_{f,1}^{(n)}, \dots, \right.$$

$$\left. \sum_{i=0}^{f-1} p_i^0 p_{i,k-m}^{(n)} + \left(\sum_{i=f}^{k-m} p_i^0 \right) p_{f,k-m}^{(n)} \right)$$

ii) 貯水量の定常分布

まえがきでもすでに述べたように、渇水問題では、その絶対量の不足と同時に、時間的な経過を考慮しなければならない。まず、ここではその前者について考えてみよう。

式(12)より、I季の初めを出発点とした1年間を1つのサイクルとした場合、 N 年後の状態確率はつぎのようになる。

$$\mathbf{p}_N = \mathbf{p}_0^{(1)} \{\mathbf{P}_{(1)}\}^N, (\mathbf{P}_{(1)} \equiv \mathbf{P}_I^{\mathbf{n}_I} \mathbf{P}_{II}^{\mathbf{n}_{II}} \dots \mathbf{P}_S^{\mathbf{n}_S}) \dots \dots \dots (14)$$

ところで、一般に正則なマルコフ過程 $\mathbf{p}_N = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^N$ では、 $N \rightarrow \infty$ のとき、 $\mathbf{p}_0$ に無関係に $\mathbf{p}_N$ がある確定した極限ベクトル $\mathbf{w}$ に収束し、 $\mathbf{w}$ は $\mathbf{w} = \mathbf{w} \mathbf{P}$ を満たす行ベクトルとして与えられるという定理がある。 $\mathbf{P}$ が正則であることを証明するには、ある N に対して $\mathbf{P}^N$ の各成分が正になることをいえばよいが、これは全ての j に対して $g_j > 0$ を仮定すれば成立つことが証明されている⁹⁾。ところで、確率分布として(6)式の対数正規分布を仮定したい場合、普通 b_s は単位貯水量に比べて小さく $g_i > 0$ の仮定が成立つとしてよいであろう。

したがって 第I季の初期における定常分布は、次式を満たす $\mathbf{w}^{(1)}$ として求められる。

$$\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{w}^{(1)} \mathbf{P}_{(1)}$$

一般に、第 s 季の初期および季内の任意時点での定常分布は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}^{(s)} &= \mathbf{w}^{(s)} \mathbf{P}_{(s)}, \mathbf{P}_{(s)} = \mathbf{P}_S^{\mathbf{n}_S} \mathbf{P}_{s+1}^{\mathbf{n}_{s+1}} \dots \mathbf{P}_S^{\mathbf{n}_S} \mathbf{P}_I^{\mathbf{n}_I} \dots \mathbf{P}_{s-1}^{\mathbf{n}_{s-1}} \\ \mathbf{w}^{(s,n)} &= \mathbf{w}^{(s)} \mathbf{P}_s^n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

$$(s = \text{I, II}, \dots, \text{S}; n = 1, 2, \dots, n_s)$$

こうして任意時点における貯水量の定常分布が判れば、放流規則が $\min(\mathbf{M}, \mathbf{Z}_n + \mathbf{X}_n)$ で、かつ $\mathbf{X}_n$ は確率変数であることを考えれば、規定放流量を確保できない確率、すなわち渇水確率は次式で求められる。

$$\gamma(s, n) = \sum_{j=0}^{m-1} w_j(s, n) \dots \dots \dots (16)$$

〔Case 2〕 貯水池容量、放流量が季節的に変わる場合

一般の場合を説明する前に、まず、最も単純な二つの季節（たとえば乾期と雨期がある）の場合について考察しよう。

第I季における貯水量の初期分布および推移行列をそれぞれ、 $\mathbf{p}^{(1,0)} = (p_0^{(1,0)}, \dots, p_{k_1-m_1}^{(1,0)})$ および $\mathbf{P}_I = (p_{ij}^{(1)}; i, j = 0, 1, \dots, k_1 - m_1)$ とすれば、任意の時点 n における分布は(15)式によって、

$$\mathbf{p}^{(1,n)} = \mathbf{p}^{(1,0)} \mathbf{P}_I^n \quad (n = 0, 1, \dots, n_1 - 1) \dots \dots \dots (17)$$

となることは Case I と全く同じである。しかし、I季末 $n = n_1$ 、すなわち、II季の初めでは、貯水池の操作規則が変わるために、貯水量の存在しうる状態として $(0, k_1 - m_1)$ ではなく、 $(0, k_{II} - m_{II})$ に変化する。この変化の様子はつぎのように2段に分けて考えると理解しやすい。

i) 貯水池容量の変化

ここでは季末期間 $(n_1 - 1, n_1)$ に着目する。貯水池容量が k_I から k_{II} に変わる ことによって、存在しうる貯水量の状態は $(0, k_1 - m_1)$ から $(0, k_{II} - m_{II})$ になる。このことを状態推移の確率行列としてみれば、 $(k_1 - m_1)$ 行、 $(k_{II} - m_{II})$ 列の成分をもつものと考えればよいことになる。この推移行列を $\mathbf{P}_{I,II'}$ と記し、行列の成分および規定放流量中の添字 I を略記すれば、 k_I と k_{II} の大小によってつぎの二つに分けられる。

a. $k_I \leq k_{II}$ の場合

$\nearrow$	0	1	2	•	$k_I - m$	•	$k_{II} - m - 1$	$k_{II} - m$
$P_{I,II}' = 0$	G_m	g_{m+1}	g_{m+2}	•	g_{k_I}	•	$g_{k_{II}-1}$	$h_{k_{II}}$
1	G_{m-1}	g_m	g_{m+1}	•	g_{k_I-1}	•	$g_{k_{II}-2}$	$h_{k_{II}-1}$
•	•	•	•	•	•	•	•	•
m	G_0	g_1	g_2	•	g_{k_I-m}	•	$g_{k_{II}-m-1}$	$h_{k_{II}-m}$
$m+1$	0	g_0	g_1	•	g_{k_I-m-1}	•	$g_{k_{II}-m-2}$	$h_{k_{II}-m-1}$
•	•	•	•	•	•	•	•	•
$k_I - m$	0	0	•	•	g_m	•	$g_{k_{II}+m-k_I-1}$	$h_{k_{II}+m-k_I}$

.....(20-1)

b. $k_I > k_{II}$ の場合

$\nearrow$	0	1	2	•	$k_{II} - m - 1$	$k_{II} - m$
$P_{I,II}' = 0$	G_m	g_{m+1}	g_{m+2}	•	$g_{k_{II}-1}$	$h_{k_{II}}$
1	G_{m-1}	g_m	g_{m+1}	•	$g_{k_{II}-1}$	$h_{k_{II}-1}$
•	•	•	•	•	•	•
m	G_0	g_1	g_2	•	$g_{k_{II}-m-1}$	$h_{k_{II}-m}$
$m+1$	0	g_0	g_1	•	g_{k_I-m-2}	$h_{k_{II}-m-1}$
•	•	•	•	•	•	•
$k_{II}-1$	0	0	0	•	g_0	h_1
k_{II}	0	0	0	•	0	1
•						
$k_I - m$	0	0	0	•	0	1

.....(20-2)

ii) 規定放流量の変化

I 季末には、存在し得る貯水量の範囲は、 $(0, m_I - k_I)$ であるが、これが i) で $(0, m_I - k_{II})$ に変わり、さらに $(0, m_{II} - k_{II})$ に変わる。したがって、i) の変化を含めた I, II 間の状態変化を推移確率 $P_{I,II}$ 、その成分を $p_{ij}^{(I,II)}$ 、 $P_{I,II}'$ の成分を $p'_{ij}^{(I,II)}$ と記すと、 $m_I - k_I$ 、 $m_{II} - k_{II}$ の大小によって $p_{ij}^{(I,II)}$ はつぎのように表わせる。

a) $k_I - m_I \leq k_{II} - m_{II}$ の場合

$$p_{ij}^{(I,II)} = \begin{cases} p'_{ij}^{(I,II)}, & 0 \leq j \leq k_I - m_I \\ 0, & k_I - m_I + 1 \leq j \leq k_{II} - m_{II} \end{cases} \quad \text{.....(21-1)}$$

b) $k_I - m_I > k_{II} - m_{II}$ の場合

これは制限水位を設けたような場合で、Case I の i) d. で考察したように、 $p_{ij}^{(I,II)}$ はつぎのように表わせる。

$$p_{ij}^{(I,II)} = \begin{cases} p'_{ij}^{(I,II)}, & 0 \leq j \leq k_{II} - m_{II} - 1 \\ \sum_{j=k_{II}-m_{II}}^{k_I-m_I} p'_{ij}^{(I,II)}, & j = k_{II} - m_{II} \end{cases} \quad \text{.....(21-2)}$$

したがって、(20-1) または (20-2)、および (21-1) または (21-2) 式によって求められた季節間の推移確率 $P_{I,II}$ を使えば、形式的には Case I と同じように演算が可能になる。すなわち、II 季の初期および季節内の任意の時点 n における分布はそれぞれ、つぎのようになる。

$$p^{(11,0)} = p^{(1,0)} P_{1,1} P_{1,1} \dots \dots \dots (22)$$

$$p^{(11,n)} = p^{(1,0)} P_{1,1} P_{1,1} P_{1,1} \dots P_{1,1}^n \quad (n=1, \dots, n_1-1) \quad \dots \dots \dots (23)$$

以上の結果を一般の場合（年間を I, II, ..., S の季節に分け、各季にはそれぞれ $n_I, n_{II}, \dots, n_S$ の期間がある）に適用すると、s 季の初期および季内任意時点における貯水量分布はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} p^{(s,0)} &= p^{(1,0)} P_{1,1} P_{1,1} P_{1,1} \dots P_{1,1}^{n_1-1} P_{1,1}^{n_2-1} P_{1,1}^{n_3-1} \dots P_{1,1}^{n_s-1} P_{s-1,s} \\ p^{(s,n)} &= p^{(s,0)} P_{s,n} \quad (s=II, III, \dots, S; n=1, 2, \dots, n_s-1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

ただし季節間の推移行列 $P_{s,s-1}$ には (20-1) ~ (21-2) 式で表わされるような要素を用いる。

また、貯水量の定常分布を求めるには、年間を通しての推移行列を、たとえば、I 季については

$$P_{(I)} \equiv P_{1,1} P_{1,1} P_{1,1} \dots P_{1,1}^{n_1-1} P_{1,1}^{n_2-1} P_{1,1}^{n_3-1} \dots P_{1,1}^{n_s-1} P_{s,1} \dots \dots \dots (25)$$

のように採れば、以後 Case I の場合と全く同様なやり方で渇水確率が求められる。

4. 継続期間と渇水確率

さて、ここでは渇水と期間との関連における渇水確率を考察してみよう。さて、いまの場合、一般に s 季では規定放流量が m_s であり放流規則が $\min(m_s, Z_n^{(s)} + X_n^{(s)})$, $X_n^{(s)}$ は確率的入力と考えているから、任意時点における貯水量 $z_n^{(s)}$ が m_s を割れば、放流量が m_s を割る危険が生じてくる。計算の便宜上、これを逆に、計画の安全率という面から考えてみよう。

簡単のために以下 s を略しておく。まず、任意の初期時点で、貯水量が $i (\geq m)$ であったとし、これが n 時点まで絶対に渇水を起さない確率を求めるために、つぎのような $(n-1)$ 時点までは渇水しないで、n 時点で $j (\geq m)$ となる確率 $f_{ij}^{(n)}$ を定義しておく。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &\equiv \Pr\{Z_r \geq m (r=1, 2, \dots, n-1), Z_n = j | Z_0 = i\} \\ &\quad (n \geq 1; i, j = m, m+1, \dots, k-m) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

いま、貯水量の 1 単位期間毎の推移行列 P の成分を p_{ij} と記すと、上式は、

$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_{n-1}=m}^{k-m} p_{i, l_1} p_{l_1, l_2} \dots p_{l_{n-1}, j} \quad (n \geq 1, i, j \geq m)$$

のように書ける。したがって、 $f_{ij}^{(n)}$ はベクトル演算的には、次式で与えられる F^n の i 行 j 列の成分として与えられることになる。

$$F^n = (f_{ij}^{(n)}) = A/B^{n-1}, \quad (m \leq i, j \leq k-m) \quad \dots \dots \dots (27)$$

ただし、 A および B は、 P の $0 \sim (m-1)$ 列を 0 とおいた行列および $0 \sim (m-1)$ 行を 0 とおいた行列である。

したがって、初期に貯水量 j であった貯水池が n 時点まで規定放流量 m を絶対に確保し続ける確率は次式で与えられる。

$$f_i^{(n)} = \sum_{j=m}^{k-m} f_{ij}^{(n)}, \quad (i = m, m+1, \dots, k-m) \quad \dots \dots \dots (28)$$

ところで、初期時点で貯水量 i が存在する確率は定常的に w_i であるから、状態 i を経て n 時点までに渇水を起さない確率は $w_i f_i^{(n)}$ となる。以上の結果、たとえば第 s 季で n_0 時点から $n_0 + n$ 時点までのどの時点かで渇水を生ずる確率は、全体として次式で与えられる。

$$\Gamma_s(n_0, n) = 1 - \sum_{i=m_s}^{k_s-m_s} w_i(s, n_0) f_{i,s}^{(n)} \quad \left(\begin{array}{l} n_0 = 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, \dots, n_s - n_0 \end{array} \right) \quad \dots \dots \dots (29)$$

ただし、 $w_i(s, n_0)$ および $f_{i,s}^{(s)}$ は s 季の n_0 時点での定常分布および、(27), (28) 式で $P = P_s$, $k = k_s$ および $m = m_s$ とおいたものである。

5. 実河川への適用例

(1) 対象流域

以上の理論の適用を、四国、銅山川水系の柳ヶ瀬ダムについて行なった。この流域は集水面積が約 146 km^2 年雨量約 $1,880 \text{ mm}$ (昭和29~37年の平均) で、総貯水池容量として $3,200 \times 10^4 \text{ m}^3$ が予定されている。計

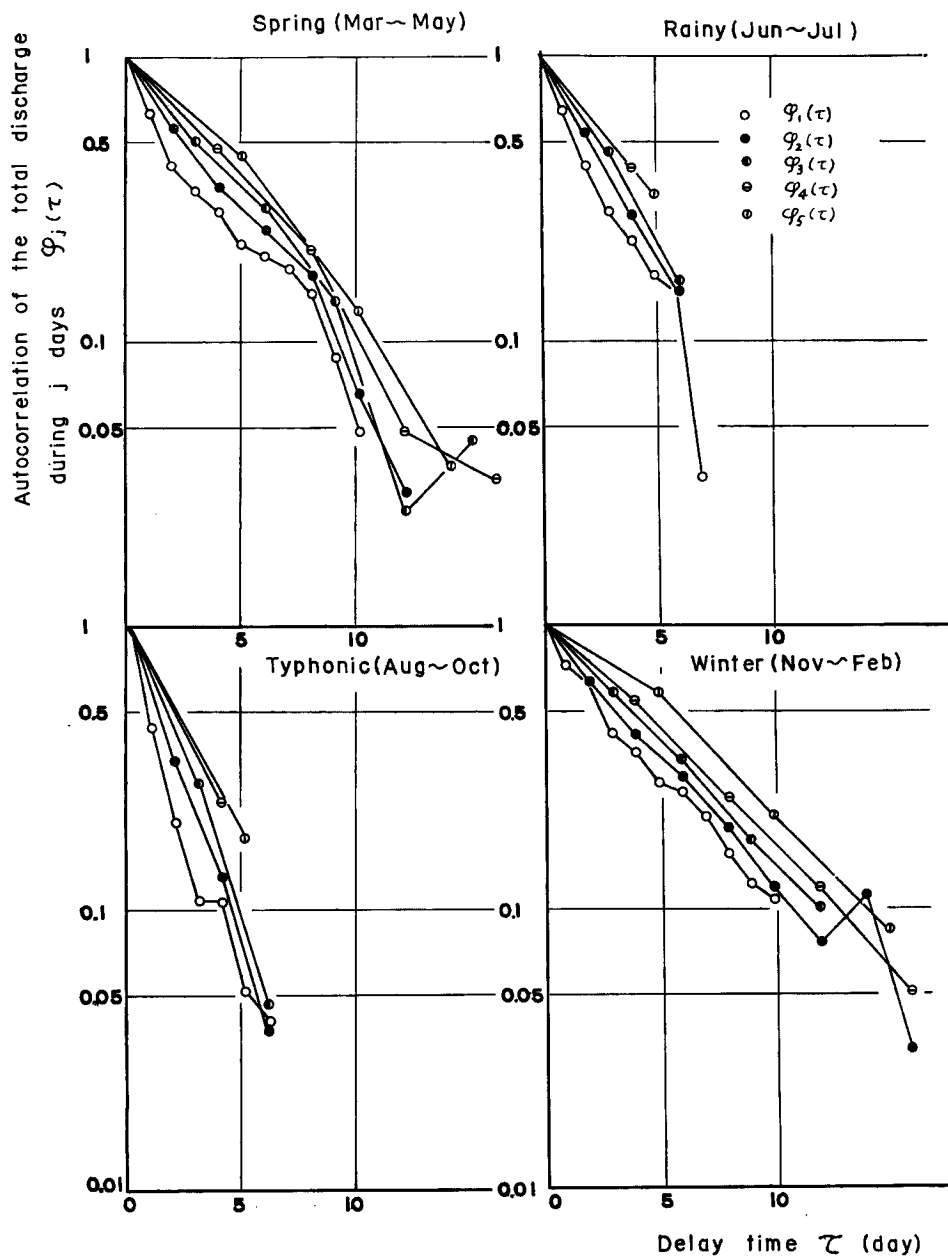


Fig. 1 Seasonal variations of autocorrelation of the total discharge during successive j days, where τ shows delay time in unit of day.

算の基礎資料としては、昭和29年から37年までの9年間の日流量を使った。

(2) 計算手順

i) 流量系列のランダム化

まず、年間の流入量系列をその季節的特徴によって幾つかに分割する必要がある。この分割には個々の場合について考慮する以外に一般的な方法は定めにくい、この場合、月毎の日流量の平均値および標準偏差を考慮して、冬、春、梅雨、台風の4期に分けた。ここで、冬期は11～2月、春期は3～5月、梅雨期は6～7月、台風期は8～10月である。

そこで、これらの季節別に継続した j 日間総流量のコレログラムを (1), (2) によって計算した結果が Fig. 1 である。なお、日単位のコレログラムには9年間の平均値を、昭和29年の冬には1～2月の資料によった計算を行なっている。Fig. 1 によれば、冬期の流量の持続性が最も大きく、春期、梅雨期、台風期の順に持続性が小さくなっていくことが判り、かつ (3) 式のようなコレログラムの指数関数としての減少が近似的に認められる。

そこで、これらの低減係数 $\alpha_j^{(s)}$ を求め、許容される標準偏差 $\sigma_a^2=0.9$ の下での予測限界を (4) 式から求め、さらに標本として許される実用的な限界を求める過程を示したものが Fig. 2 である。これより標本期間として冬では10日、春で8日、梅雨6日、台風3日以上にとればその間の総流量がほぼランダム量に

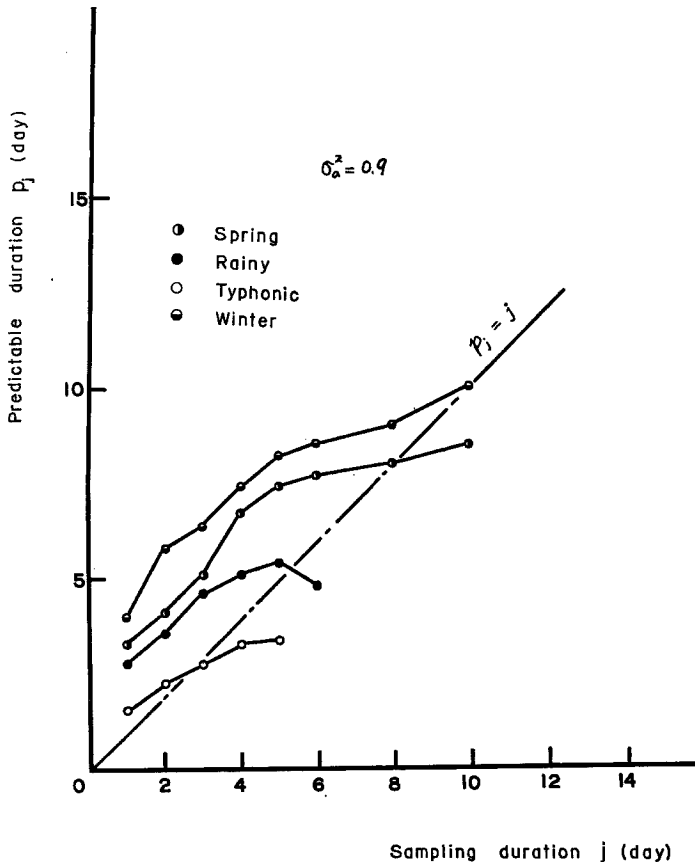


Fig. 2 Calculation of the critical time length of the predictable under the allowable deviation $\sigma_a^2=0.9$.

近似できることになる。また、以後の説明では、冬、春、梅雨、台風の順にⅠ期、Ⅱ期、Ⅲ期、Ⅳ期と呼ぶこととする。

ii) 貯水池使用の仮定

こうして、ランダム化された流入量系列、たとえば、冬期には10日総流量というように、各季節毎に標本抽出を行なった流入量の確率分布型を(6)式のような対数正規分布に近似した結果は Fig. 3 のようになった。

さて、柳ヶ瀬ダムの使用条件としてまず現用の使用計画($m=1 \times 3 \text{ m}^3/\text{sec}$)を検討したが、これでは全く渇水を生じないという計算結果を得た。そこで使用水量をかなり増して、年間での貯水池容量が一定とした場合(Case I)と出水期に制限水位を仮定した場合(Case II)の2例について計算を実施した。なお、水量の単位はすべて $3 \text{ m}^3/\text{sec} \times 1 \text{ day}$ とした。それぞれの条件を Table 1, に示しておく。ただし、柳ヶ瀬ダムでは、出水期に予備放流する形式を採っており、この予備放流水位以上の貯水容量は期待できないものとして、Case II のように有効な貯水池容量を減小させたのである。なお、計算は必ずしも厳密ではないが平均的な様相を調べるという観点から年間を通じて一定値とし5日毎のステップで行なうことにした。

Table 1 Basic data in order to get probability of the water shortage in Yanagase Multi-purpose Reservoir.

Notation s	Season	Number of Step N_s	Capacity of Reservoir k^*	Demanded release m^*
I	Winter Nov. 1—Feb. 28(120days)	24	20	3
II	Spring Mar. 1—Jun. 3(95)	19		
III	Rainy Jun. 4—Aug. 2(60)	12	20 (Case I)	
IV	Typhonic Aug. 3—Oct. 31(90)	18	16 (Case II)	

* The unit is $3 \text{ m}^3/\text{sec}$.

iii) 貯水量の推移確率

さて、以上の仮定を用いて貯水量の定常分布を求め、それより季節的な渇水確率およびその継続期間との関連を計算するわけであるが、説明の便宜上、Case I について計算手順を示そう。

まず、Fig. 3 の総流入量の確率分布を用いて、季節毎の5日間隔毎の貯水量の推移確率行列を求めた。Ⅰ季の例が Table 2 に P_I として示してある。つぎに、これを季節内の間隔の数だけかけ合わせたベクトル積、つまり、1季節毎の推移行列のⅠ季の例が Table 3 の P_I^{24} として示してある。なお、この P_I^{24} の例では、各行が全く同じになるので、任意の1行だけ書いてある。さらに、年間を通しての推移行列は、たとえばⅠ季以後の1年では、Table 4 の $P_{(1)} = P_I^{24} P_{II}^{19} P_{III}^{12} P_{IV}^{18}$ のようになり、これも各行が全く同じ値となるので1行だけ記してある。

したがって、この結果を(15)式に代入して求められる貯水量の定常分布を Case I, Case II について非超過確率として示したのが Fig. 4(a), Fig. 4(b) である。なお、(16)式で与えられる任意時点における渇水確率は、貯水量 $m-1=2$ に対応する非超過確率の値として読みとれる。いまの場合、冬期にはほとんど渇水し、逆に、台風期には、あまり渇水しないことが確率的に示され、制限水位を設けた場合とそうでない場合では渇水状態にあまり差が生じないことも判る。

iv) 継続期間と渇水確率

最後に、渇水と継続期間との関連を求めた結果を示す。まず1季節内での関係をみるために、季節内のあ

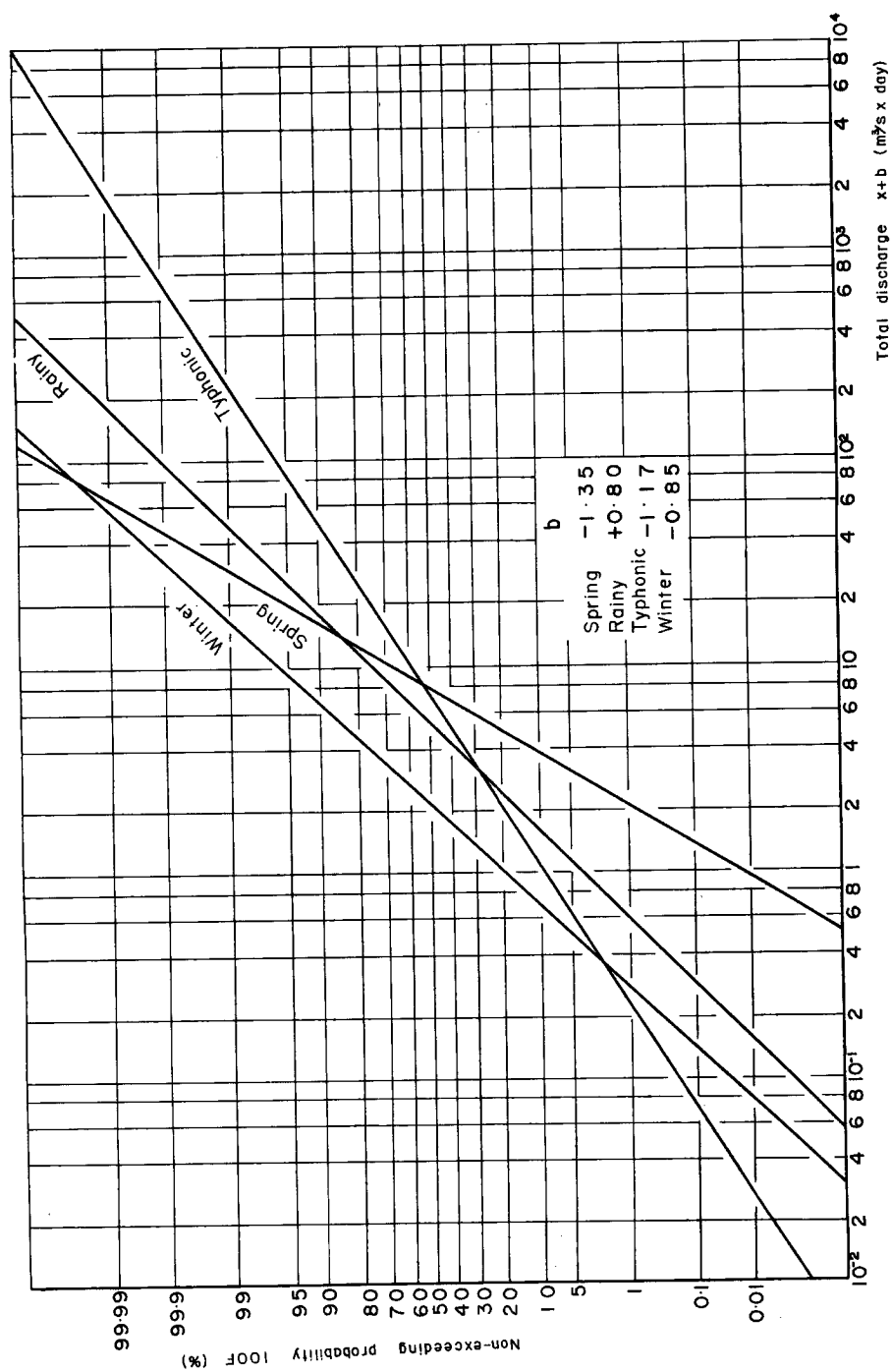


Fig. 3 Non-exceeding probability of seasonal total discharge during one day.

Table 2 Example of the transition-matrix of the P_1

$\nearrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.9550	0.0229	0.0109	0.0040	0.0023	0.0016	0.0010	0.0006	0.0004
1	0.8930	0.0620	0.0229	0.0109	0.0040	0.0023	0.0016	0.0010	0.0006
2	0.7240	0.1690	0.0620	0.0229	0.0109	0.0040	0.0023	0.0016	0.0010
3	0.0980	0.6260	0.1690	0.0620	0.0229	0.0109	0.0040	0.0023	0.0016
4	0.0000	0.0980	0.6260	0.1690	0.0620	0.0229	0.0109	0.0040	0.0023
5	0.0000	0.0000	0.0980	0.6260	0.1690	0.0620	0.0229	0.0109	0.0040
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0980	0.6260	0.1690	0.0620	0.0229	0.0109
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0980	0.6260	0.1690	0.0620	0.0229
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0980	0.6260	0.1690	0.0620
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0980	0.6260	0.1690
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0980	0.6260
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0980
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

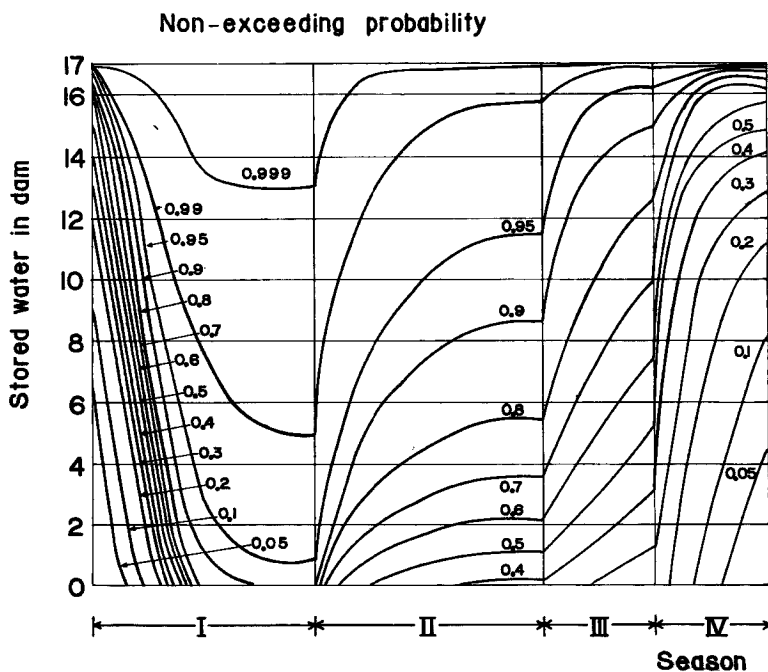


Fig. 4(a) Stationary non-exceeding probability of the stored water in Case I.

stored water during 5 days in the season I (winter).

9	10	11	12	13	14	15	16	17
0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002
0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0003
0.0010	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0004
0.0016	0.0016	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0005
0.0023	0.0016	0.0010	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0006
0.0040	0.0023	0.0016	0.0010	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0008
0.0109	0.0040	0.0023	0.0016	0.0010	0.0006	0.0004	0.0003	0.0010
0.0229	0.0109	0.0040	0.0023	0.0016	0.0010	0.0006	0.0004	0.0013
0.0620	0.0229	0.0109	0.0040	0.0023	0.0016	0.0010	0.0006	0.0017
0.1690	0.0620	0.0229	0.0109	0.0040	0.0023	0.0016	0.0010	0.0023
0.6260	0.1690	0.0620	0.0229	0.0109	0.0040	0.0023	0.0016	0.0033
0.0980	0.6260	0.1690	0.0620	0.0229	0.0109	0.0040	0.0023	0.0049
0.0000	0.0980	0.6260	0.1690	0.0620	0.0229	0.0109	0.0040	0.0072
0.0000	0.0000	0.0980	0.6260	0.1690	0.0620	0.0229	0.0109	0.0112
0.0000	0.0000	0.0000	0.0980	0.6260	0.1690	0.0620	0.0229	0.0221
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0980	0.6260	0.1690	0.0620	0.0450
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0980	0.6260	0.1690	0.1070

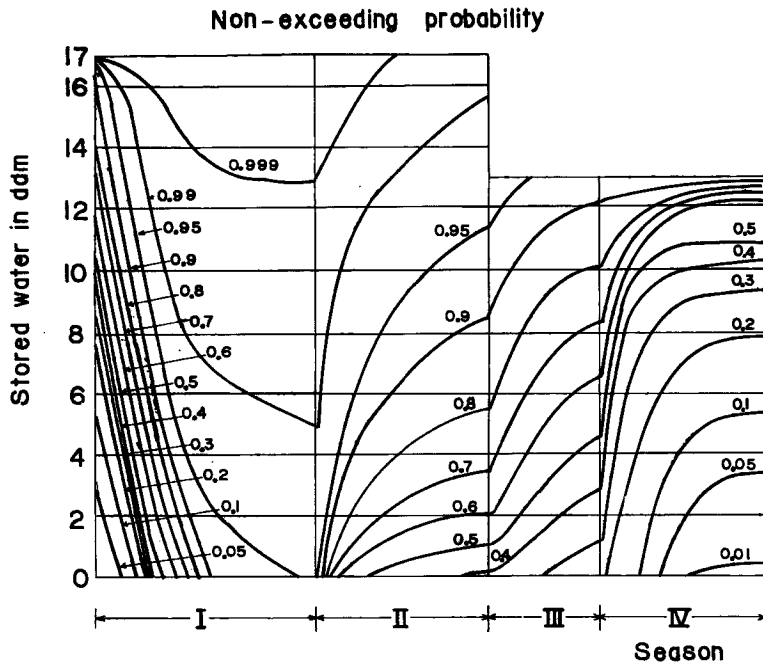


Fig. 4(b) Stationary non-exceeding probability of the stored water in Case II.

Table 3 Example of the transition-matrix of the stored water during season I.

$$P_{I^{24}}$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.9238	0.0318	0.0170	0.0085	0.0054	0.0038	0.0026	0.0018	0.0013
9	10	11	12	13	14	15	16	17
0.9238	0.0318	0.0170	0.0085	0.0054	0.0038	0.0026	0.0018	0.0013

Table 4 Example of the transition-matrix of the stored water during a water year beginning with the season I.

$$P_{(I)} = P_{I^{24}} P_{II^{19}} P_{III^{12}} P_{IV^{18}}$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.0078	0.0032	0.0038	0.0047	0.0059	0.0076	0.0097	0.0127	0.0166
9	10	11	12	13	14	15	16	17
0.0221	0.0288	0.0394	0.0497	0.0736	0.0807	0.1521	0.0959	0.3849

る時点 n_0 以後の経過期間 n の間で何時か渇水を生じる確率 $\Gamma_s(n_0, n)$ を、たとえば I 季について計算した例が Fig. 5 で、これでは、季節の初期では前の豊水期の影響でなかなか渇水にならないが、時の経過と共に急速に渇水を生じるようになることがわかる。

そこで、各季節の中央を初期 n_0 ととり、それ以後の期間 n と渇水確率 Γ_s^n の関連を示したものが Fig. 6 である。これより、季節 I, II, III, IV の順に経過期とともに渇水になり難くなることが確率的に示され、その傾向は Fig. 4 の渇水の量的な傾向と一致している。

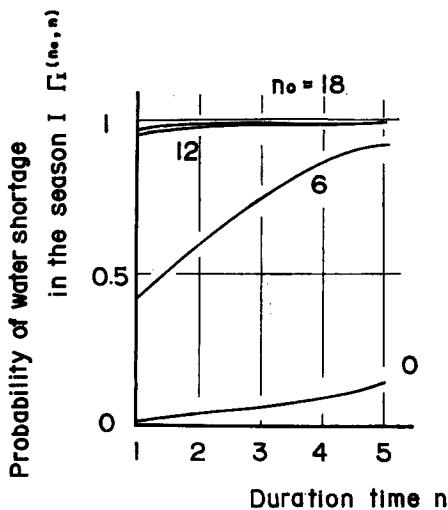


Fig. 5 Relation between probability of water shortage and duration time in the season I.

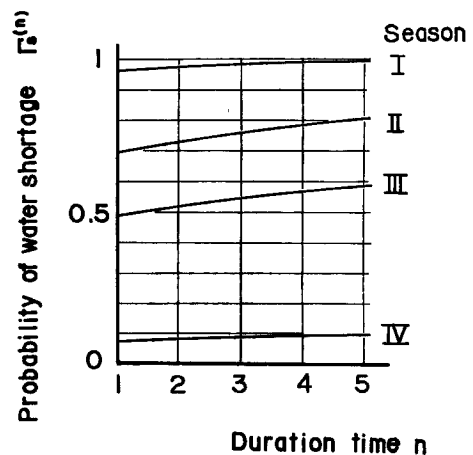


Fig. 6 Seasonal relation between probability of water shortage and duration time.

以上の結果を要約すると、この例では、台風期、梅雨期ではほとんど渇水を生じないが、冬期にはかなり大規模に、量的にも、期間的にも渇水を生ずることが推定されるのである。そのために、年間を通じて一定の放流という規定は好ましくなく、たとえば冬期には極端に放流を制限しなければならないことは当然であるが、その対策については別の機会に譲りたい。

6. む す び

以上、貯水池をもつ河川の利水計画に関連して、確率的な在庫問題という立場から、渇水確率の評価について考察したものであるが、明らかになって点を要約するとつぎのようである。

(1) 貯水池による利水問題は、入力確率変動する在庫モデルに対応させて考えることができるが、このために入力たる流入量の季節的特徴を十分勘案する必要がある。

(2) 上記モデル問題を扱う場合、流入量を季節的にランダム化する必要があり、そのために線型予測の理論を応用する手法を示した。

(3) 渇水の確率の検討の基礎として、貯水量の単純マルコフ連鎖としての性質を利用して、貯水量の定常分布を推定する手法を、年間で操作規則が一定の場合と異なる場合について理論的に誘導できることを示した。

(4) 求められた定常分布に基づいて、年間の任意時点における渇水確率を算出し、さらに渇水確率と期間との関係を明らかにした。

なお、計算は KDC-II によったが、今後はこれらの成果を活用して、最適利水量の決定について検討したいと考えている。

最後に、本研究にあたり終始熱心に御指導、御助言を賜った京都大学防災研究所の石原安雄教授に深く感謝するとともに、計算における電子計算機使用に際しプログラムの作成、資料のパンチさらに図面の作成などの仕事に同研究所助手の小葉竹重機君、大学院学生の石井健春君、学部学生の日月俊昭君に莫大な御助力を頂いたことを厚く感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) 水利科学研究所編：水利河川学，水利学大系第2巻：昭37，pp.40～41.
- 2) A. Hazen, "Storage to be provided in impounding reservoirs for municipal water supply," Transaction of ASCE, Vol.77, 1914, p.1539.
- 3) J.D.C. Little, "The use of storage water in a hydroelectric system," Journal of ORSA, vol.3, 1955, pp.187～197.
- 4) T.C.Koopmans, "Water storage in a simplified hydroelectric system," Proceeding of 1st International Conference on Operations Research, 1957.
- 5) N.U.Prabhu, "Queues and Inventories, Chap. 6, Moran's model for the dam," 1965, pp.191～205, John Wiley & Sons.
- 6) 建設省河川局河川計画課訳：水資源開発総合計画，第3巻：昭41，pp.146～153.
- 7) N.U.Prabhu, "Time-dependent results in storage theory, Journal of Applied probability, Vol.1, 1964, pp.1～46.
- 8) 長尾正志，瀬古育二：自己相関からみた河川流出量の性格について．第22回土木学会年次講演会講演概要，昭42，土木学会 pp.13-1～2，土木学会.
- 9) たとえば，松田正一他3名共著：ORのための基礎数学，4，4.1マルコフ過程，：昭39，pp.138～143，丸善.