

河床材料粒度の確率論的考察

足 立 昭 平

A STUDY ON GRAIN-SIZE DISTRIBUTION OF SEDIMENTS WITH USE OF PROBABILITY CONCEPT

By Dr, Eng. Shohei ADACHI

Synopsis

It may be expected that a clue for explaining the conditions of sediments in river stream is grain-size distributions of bed materials which are the results of sieving due to the stream flow. In this paper the mathematical expressions of grain-size distributions of bed materials are considered with use of probability concept. A grain-size distribution function is proposed under a simple condition that the grains are related to the hydraulic properties with a single relationships. The actual grain-size distributions at Yasuoka reservoir which has been filled with sediments show that the proposed distribution function can be applied to the bed materials composed of settlings.

河川における土砂流送の形態は一様ではないが、河床に残された砂礫の粒度組成は、その地点における土砂流送の形態を推察するうえに有力な手掛りを与えるであろう。本研究はこのような観点から、河床材料の粒度組成に確率論的な考察を試みたものである。

1. 粒度組成に対する確率論的条件式

河床材料の粒度は、一般に河床境界条件として流水および流砂の運動に関寄するものであるから、その粒度組成は水理量に関係づけられるはずである。いま、その関係式を

$$F(n_i, d_i, \theta) = 0, (i=1, 2, \dots, m) \dots\dots\dots (1)$$

とおいておこう。ここに、 n_i は粒径 d_i の河床粒子の個数であり、 θ は流水および流砂に関する水理量をあらわすものとする。

もし、(1) 式のような関係式がそれぞれ独立に幾つか与えられて、しかもその数が丁度河床粒子の粒径級別数 m に等しいだけあれば、河床粒子の粒度組成 $\{n_i\}$ は確定論的に求めることができよう。しかしながら、実際問題として、粒子の粒径級別にはかなりの任意性があるから、級別数に対応して粒度組成と水理量との関係式を幾つも設定することは不可能に近い。したがって、粒度組成 $\{n_i\}$ に対する条件式としては、(1) 式の外に確率論的な条件式を付け加える必要があるであろう。

確率的な条件式を導入するために、河床上の個々の粒子の配列の仕方が、(1) 式を満足するかぎりにおいてすべて確率的に同等であると仮定しよう。この仮定にもとづけば、区別のできる粒子配列のうち、配列の組み合わせが最大であるような粒度組成 $\{n_i\}$ が最も高い確率で出現することになり、その組成が確率的に最も有意なものであると考えることができる。一般に、粒度組成 $\{n_i\}$ の粒子の配列の仕方の数 φ は

$$\varphi = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_m!} \dots\dots\dots (2)$$

ここに,

$$N = \sum_{i=1}^m n_i$$

で与えられるから, 最も確からしい組成 $\{n_i\}$ は $d\varphi=0$, あるいは対数をとって,

$$d(\ln \varphi) = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

を満足するものである。そして, こうした組成 $\{n_i\}$ は (1) 式で規制されるものでなければならないから, 同時に,

$$dF = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial n_i} dn_i = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

が満たされねばならない。したがって, 求める粒度組成の確率的条件は, 未定乗数 α を導入して,

$$d(\ln \varphi) - \alpha \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial n_i} dn_i = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

で与えられることになる。

Stirling の公式を用いて $\ln \varphi$ を展開すれば,

$$d(\ln \varphi) = \sum_{i=1}^m \left\{ \ln N - \ln n_i + 0 \left(\frac{1}{n_i} \right) \right\}$$

であるから, (5) 式の条件は, 結局粒径級別の個数 n_i について,

$$\frac{n_i}{N} = \exp \left\{ -\alpha \frac{\partial F}{\partial n_i} + 0 \left(\frac{1}{n_i} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

であることを要求する。級別粒子個数 n_i が十分に大きければ, 上式右辺の $0(1/n_i)$ は省略でき, ここに粒度組成の条件式が設定されたわけである。なお, 未定乗数 α は (1) 式が成立すること, すなわち, (6) 式を (1) 式に代入して決定される。

2. 粒度分布関数

前項に述べた粒度組成の条件式をさらに具体的に展開するためには, 河床材料の粒度と水理量との関係式 (1) 式の関数形を設定しなければならない。いま, 一例として, 河床上のすべての粒子がその時点の流水による流送物質であるような場合を想定しよう。このような状態で河床に止まった粒子については, 粒子の自重と流水の摩擦応力との間にある一定の関係が存在したと考えることができるから, 個々の粒子に作用した流水の摩擦応力を τ_i , 粒子の水中比重を s , 流水の密度を ρ , 重力の加速度を g であらわし, 粒子の形状係数を含めた適当な比例常数 β を導入して,

$$\tau_i d_i^2 = s \rho g d_i^3$$

とおくことが許されるであろう。さらに, その地点の潤辺長を B , 粒子の形状および重なりに対する補正係数を β とおいて, 平均摩擦応力 τ_0 が

$$\tau_0 = \frac{\sum \tau_i n_i d_i}{\gamma B}$$

で与えられるものとすれば, 粒度組成と水理量との関係式として,

$$\sum_{i=1}^m n_i d_i^2 = \theta \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに,

$$\theta = \gamma B \frac{\tau_0}{\rho \beta s g}$$

の形を期待することができよう。

(1) 式の関数形が (7) 式で与えられれば, 粒度組成の条件式 (6) 式は

$$\frac{n_i}{N} = e^{-\alpha d_i^2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。

さて、未定乗数 α は前項に述べたように、(8) 式を (7) 式に代入して決定されるが、離散型の組成 $\{n_i\}$ について α の一般形を導くことは困難であるから、粒径級別 d_i を連続変数 d におき代えて粒度分布関数 $f(d)$ を

$$\frac{n_i}{N} = f(d) \Delta d \quad \dots\dots\dots (9)$$

で定義することにすれば、(6) および (7) 式はそれぞれ、

$$N \int_0^\infty f(d) d^3 dd = \theta \quad \dots\dots\dots (6')$$

$$f(d) \Delta d = e^{-\alpha d^2} \quad \dots\dots\dots (7')$$

と書きかえてよいであろう。

Δd は粒径の級別間隔をあらわすものであるが、粒度分布関数 $f(d)$ は

$$\int_0^\infty f(d) dd = 1 \quad \dots\dots\dots (10)$$

でなければならないから、 Δd を一定値にとるとき、(7') 式を (10) 式に代入して

$$\Delta d = \int_0^\infty e^{-\alpha d^2} dd = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。したがって、(7') 式の粒度分布関数 $f(d)$ は

$$f(d) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha d^2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。(12) 式を (6') 式に代入して積分を遂行すれば、

$$\int_0^\infty f(d) d^3 dd = \frac{1}{2\alpha} = \frac{\theta}{N}$$

すなわち、

$$\alpha = \frac{N}{2\theta} \quad \dots\dots\dots (13)$$

が得られ、(12) の式粒度分布関数 $f(d)$ は結局

$$f(d) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{N}{\theta} e^{-\left(\frac{N}{2\theta} d^2\right)} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。(14) 式にはなお粒子総個数 N が未知量として含まれているが、従来から慣用されている重量百分率による平均粒径 d_M を求めれば、粒子形状を一定と見なして、

$$d_M = \frac{\int_0^\infty f(d) d^4 dd}{\int_0^\infty f(d) d^3 dd} = 1.5 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{N} \quad \dots\dots\dots (15)$$

であるから、

$$f(d) = \frac{1.5}{d_M} e^{-\left(0.75\sqrt{\pi} \cdot \frac{d}{d_M}\right)^2} \quad \dots\dots\dots (16)$$

とあらわすことができる。

(16) 式は粒子個数の分布関数であるが、(15) 式と同様に粒子形状を一定と見なして、重量百分率による粒度加積曲線 $P_W(d)$ を求めれば、

$$P_W(d) = \frac{\int_0^d f(d) d^3 dd}{\int_0^\infty f(d) d^3 dd} = 1 - (1 + t^2) e^{-t^2} \quad \dots\dots\dots (17)$$

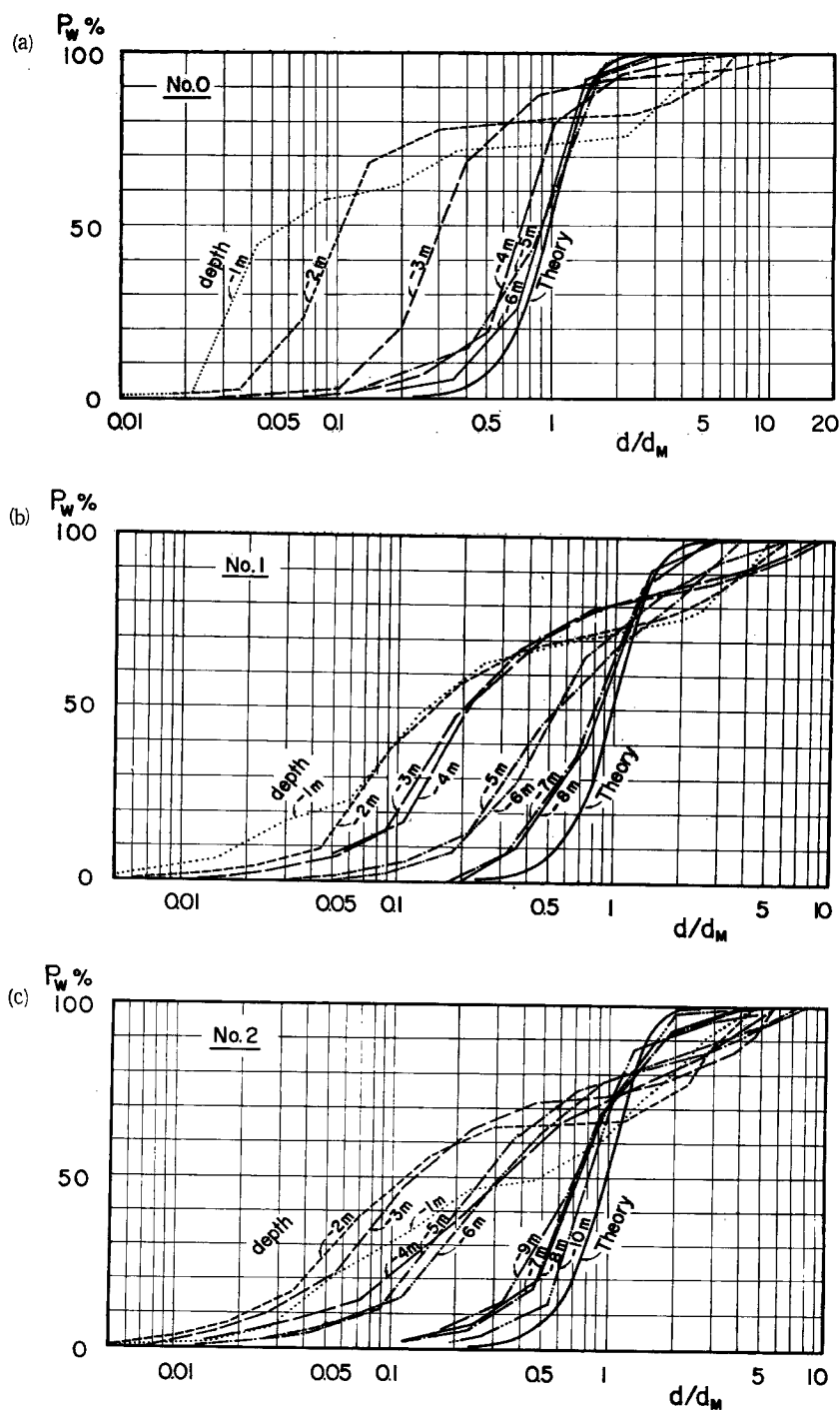


Fig. 1 Grain-size accumulation curves of sediments at Yasuoka Reservoir

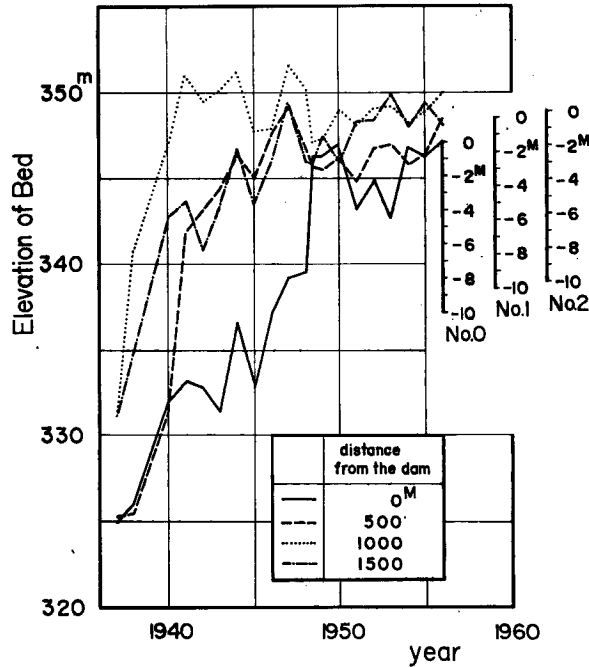


Fig. 2 Time variations of bed elevations at Yasuoka Reservoir

ここに,

$$t = 0.75 \sqrt{\pi} \frac{d}{d_M} = 1.33 \frac{d}{d_M}$$

となる。(Fig. 2 (a), (b), (c) 参照)

以上は粒度組成と水理量との関係式が(7)式で与えられると仮定した場合の粒度分布関数を導いたものであるが、(7)式と類似の関係式を

$$\sum_{i=1}^m n_i d_i^k = \theta \quad \dots\dots\dots (18)$$

仮定すれば、指数 k の解釈は別として (16) および (17) 式は形式的に、

$$f(d) = \frac{k}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{k}\right)} \frac{1}{d_M} \cdot e^{-\left(\frac{\Gamma(5/k)}{\Gamma(4/k)} \frac{d}{d_M}\right)^k} \quad \dots\dots\dots (19)$$

および

$$P_W(d) = \frac{k}{\Gamma\left(\frac{4}{k}\right)} \int_0^t t^3 e^{-tk} dt \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに,

$$t = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{k}\right)} \frac{d}{d_M}$$

で与えられる。

3. 貯水池堆積土砂粒度組成の実例

貯水池における土砂堆積は、一般に浮流砂の沈降と掃流砂の堆積とに分けられ、とくに後者は貯水池上流端からデルターの前進という形式で堆積する。したがって、貯水池の堰堤に近い地点では、深度によって両者の堆積形態の相違が明瞭に見られるであろう。

Fig. 1 (a), (b), (c) は中部電力株式会社において調査された泰阜貯水池の堆積土砂粒度分布例であって、(中部電力株式会社：泰阜えん堤上流堆積物調査資料，昭40) 堰地点 (No. 0)，堰上流 500 m (No. 2) および 1,200 m (No. 2) の地点における深度ごとの粒度組成を重量百分率加積曲線で示したものである。各図に (17) 式で与えられる粒度組成を併記してあるが、予期されたように粒度組成は深度によって顕著な変化を示し、深度が増すにつれて (17) 式のそれに酷似している。

堰堤築造から貯水池が満砂するまでの各地点の河床上昇の模様を示せば、Fig. 2 のようである。そしてさきの粒度組成の深度による変化が、丁度 Fig. 2 に示した急激な河床上昇の後に対応していることがわかる。河床の急上昇は掃流砂によるデルターの到達をあらわしているから、それ以前の河床材料は一方的な沈降堆積土砂であると考えて十分であろう。いいかえれば、その時点では個々の河床粒子が水理量にある単一の関係式で規制されるということである。このことは (17) 式誘導の基本的仮定を満足するということでもあり、深度の大きい場所の粒度組成が (17) 式のそれに合致することを説明づけているように思われる。

河床急上昇後の河床材料は一方的な沈降堆積土砂ではなく、それらは絶えず流砂と交換されるから、河床粒子と水理量との対応関係は流砂形態の複合として考慮されねばならないであろう。そうした複合形の要素を分析するためには、流水の時間的変動も見落せない問題点のように思われ、なお今後の研究に待たねばならない。

4. む す び

以上、河床材料の粒度組成を確率論的に考究し、河床粒子が水理量に単純な関係式で規制される場合の粒度分布式を導いた。そして、実際の貯水池における堆積土砂の粒度組成調査資料によって、その適用性に関してかなりの期待がもてることを確めた。土砂流送の形態が一通りでない場合の河床粒度組成を導くにはなお検討を要するけれども、この結果は河川における土砂流送形態を明らかにするための河床材料粒度調査に一つの根拠を与えるであろう。