

# 衝撃力を受ける構造物の塑性変形

——剛塑性無限梁の曲げ変形——

野 中 泰 二 郎

## LARGE PLASTIC DEFORMATION OF STRUCTURES DUE TO IMPACT

——On the Bending Deformation of a Rigid-Plastic Infinite Beam——

By *Taijiro* NONAKA

### Abstract

An analysis is presented for the dynamic deflection of an infinite rigid-plastic beam under a pulse load distributed over some range of the beam axis. Small deformation theory yields the results where the final configuration of the beam axis is determined explicitly for a purely impulsive load and rectangular pulse loads. It is seen that the deflection gets more concentrated near the loading range as the load duration gets shorter and as the loading range gets narrower. In case the load magnitude is smaller than a certain multiple of the ratio of the fully plastic moment to the length of the loading range, the deflection greatly depends on the load magnitude, but for a larger value of the load magnitude, the deflection does not depend on the load magnitude significantly, and the loading can be approximated as impulsive with a good accuracy.

### 記号

$a$  荷重作用幅の 1/2

$E$  エネルギー

$I$  力積

$\hat{I}$  全力積

$M$  モーメント

$m$  単位長さ当りの質量

$P$  荷重

$Q$  剪断力

$q$  単位長さ当りの有効荷重

$r$  外側剛塑性境界の位置

$s$  内側剛塑性境界の位置

$t$  時間

$W$  仕事

$x$  材軸方向座標

$y$  撓み

$\delta$  中点に対する相対最終撓み量

$\theta_m$  中点最終撓み角の絶対値

$\omega$  角速度

添字

$n$  塑性関節の発生する状態

$o$   $t=0$  における状態

$p$  全塑性の状態

### 1. 序

構造物の一部に大きな荷重が作用するとき、たとえ構造物全体としての変形および応力状態が許容され得る程度のものであっても、載荷点付近には大きな局部変形や応力集中が生じ得る。充分靱性に富む材料より

成る構造物部材がそのような荷重を受けると、その部材は降伏し、局部的に大きなたわみを生じるが、その構造物の他の部分には障りない状態が考えられる。このように局部的に大変形が生じる可能性は特に衝撃的な外力を受ける部材に顕著である。なぜなら、外力が静的に作用すれば、そのなす仕事は構造物全体の変形に伴うエネルギーとして蓄えられあるいは消費されるが、それが衝撃的に作用する場合、載荷点以外の部分に載荷に伴う応力および変形が生じる迄には載荷後有限の時間が経過しなければならぬが、その間に、載荷点付近に大きな変形が生じ得るからである。

構造物にその崩壊荷重以上の外力が作用すれば、外力と釣り合う応力状態は存在し得ないから、その外力が長時間作用すれば、変形が増大し、構造物は崩壊するか、もしくは過度の変形により、構造物としての使命を果し得なくなる。しかし、たとえ崩壊荷重以上の外力であっても、その作用時間が充分短かければ、すなわち、衝撃的に作用すれば、構造物の慣性によって過度の変形は妨げられる。従って、このような状態における変形状態を調べることは、動的な外力を受ける構造物の挙動を知るうえに最も基本的で重要な問題の一つであると考えられる。

以上のような観点から、ここでは、骨組部材の一部に大きな横方向衝撃力が作用するときの、部材の局部的な撓みを理論的に考察する。そのうち、弾性変形による振動は、時間の経過と共に、種々の減衰効果によって、やがて消滅するものであるから、塑性変形に着目する。部材の局部変形に対して、境界条件は関係ないものとして、無限の長さを有する梁を考える。Duwez, Clark and Bohnenblust<sup>13)</sup> および Conroy<sup>2)</sup> は無限梁の一断面が等速度で運動するような衝撃載荷を受けたときの非弾性挙動を調べた。Bohnenblust は、回転慣性および剪断変形を無視した曲げ理論に基づいて解析した結果、弾性梁に関する Boussinesq の理論が、非弾性梁にも適用され得ること、すなわち、曲げモーメントが曲率の関数として表わされる限り、撓みと時間の比は、載荷点からの距離の二乗と時間の比によって定まることを示した。Duwez および Clark は銅と鋼の長い単純梁を用いて実験を行ない、載荷中の撓み曲線は、ほぼ Bohnenblust の理論曲線に近いことを確かめた。Conroy は弾性変形を無視すれば、Bohnenblust の解析は非常に簡略化されることを示し、完全剛塑性梁に対して、解析的な解を得ることに成功した。

これらは無限梁の一断面が等速度で運動しだすときの解析であるから、過渡的な応答にのみ適用され得るものであり、また、梁が一定の速度を得る迄には載荷後有限の時間が経過しなければならない。最近、Fu<sup>14)</sup> は、この加速時間を考慮するため、弾性無限梁の一断面が、時間のべき級数で表わされるような強制変位を受けるときの曲げ変形を調べ、Fourier 変換を行なうことによって、Fresnel の積分による厳密解および近似解を示し、Bohnenblust の解もその中に包含されることを指摘した。しかし、Fu の解析は線型理論に基づくものであり、もとより、弾塑性の性質を有する梁には適用され得ない。さらに、これらの解析は、衝撃力載荷の幅が問題になる場合には用いられない。ところが、部材の破断等を考えるときには、局部的な変形を厳密に調べる必要があり、実際、完全な集中力はあり得ないから、自ら、これら理論の適用性には厳しい制限が加わる。

そこで、本論文では、より一般的に、無限梁のある幅にわたって、有限時間、外力が作用する場合を調べ、その極限として、純衝撃、すなわち、力積として与えられ、作用時間を無視し得るような衝撃力も考えることとし、一定の全力積に対して、載荷時間の局部変形に及ぼす影響を調べ、また、一定の衝撃力に対する載荷幅の影響を検討する。大きな変形を対象とし、弾性変形は塑性変形に比べて無視できるものと考え、完全剛塑性の曲げモーメント・曲率関係を仮定する。このように一般的な載荷状態に対しては、Bohnenblust の解法は適用され得ず、梁要素に関する偏微分方程式を解析的に解くのは困難であるが、材料の完全剛塑性の性質の仮定により、先ず、運動のモードを見出し、その運動の有する自由度に等しい数の未知量を適当に選んで、運動方程式をそれらの未知量に関して解くことにすれば、容易に解析的な解が得られる。この剛塑性解析は Lee and Symonds<sup>4)</sup> の研究以来、梁や平板に関する動力学においてしばしば用いられ、一般の靱性に富む金属材料に対し、第一近似値として有効であることが実験的にも確かめられている<sup>5)-14)</sup> ものであ

\* 片括弧を伴う数字は末尾の文献番号を示す。

る。つぎに、筆者の見解に従って、この解析法を略述する。

## 2. 動的剛塑性解析概説

構造物材料の完全剛塑性的性質を仮定し、塑性理論と動力学の根本原理に基づいて解析するものであり、運動・変形状態はつぎの4つの条件を満足しなければならないとする。すなわち、

- 1° 塑性条件を犯さない。
- 2° 塑性流法則に従って変形する。
- 3° 速度連続条件を満たす。
- 4° 運動方程式を満足する。

いま、構造物要素が曲げのみを受けるものとすれば、1°の条件は、構造物のあらゆる点において、曲げモーメントの絶対値が全塑性モーメントを越えないこと、2°は、曲げモーメントの絶対値が全塑性モーメントに達した構造要素において、モーメントのなす仕事为正であるような曲率変化が生じ得ることを意味し、2°はまた、曲げモーメントの絶対値が全塑性モーメントより小さければ、その構造要素は何ら変形しないことをも暗に示す。加速度は、外力が作用しない点でも不連続であり得るが、速度は、純衝撃を受けない限り、空間的、時間的に連続でなければならないことを意味するのが3°の条件である。

運動している変形体を扱うのであるから、外力の他に慣性力によって生ずる応力をも考慮すべきであり、その応力状態はD'Alembertの原理を用いて求めるのが便利である。応力および変形状態が上の諸条件を満足するような運動のモードを見出し、その運動の有する自由度に等しい数の未知量を選んで、4°の条件をそれらの未知量で表わし、運動方程式を解く。外力のなした仕事あるいは運動のエネルギーが塑性変形によって消費され、構造物全域で速度が零になって運動が終了し、永久変形が残ると考えるものである。

## 3. 仮 定

衝撃力を受ける無限梁の解析に当って用いる主な仮定を下に列挙する。

- 1° 梁は完全剛塑性で充分靱性に富む材料から成る。
- 2° 荷重は梁のある幅に渡って一様に分布し、時間と共に単調に減少し、かつ、向きが変わらない。(純衝撃や長方形パルスもこの中に含まれる。)
- 3° 梁は対称性のある一様な断面と無限の長さを有し、荷重はその対称面内に作用する。
- 4° 撓みは、撓み角の余弦を1と近似できる程度に小さい。(従って、軸力は生じない。)
- 5° 剪断変形の影響および剪断応力の塑性条件に及ぼす影響は無視できる。
- 6° 軸方向応力波の影響は無視できる。
- 7° 横座屈、局部座屈等不安定現象は生じない。

## 4. 解 析

Fig. 1に示すように、全塑性モーメントが $M_p$ 、単位長さ当りの質量が $m$ で、載荷前は真直な無限梁に、合力 $P(t)$ が、幅 $2a$ にわたって一様に分布し、材軸と垂直方向に作用しているものとする。ここに、 $t$ は載荷開始後の時間である。材軸の位置を示す座標軸 $x, y$ を図のようにとり、撓み $y(x, t)$ を求める。

無限梁の塑性崩壊荷重は零であるから、境界条件には関係無く、有限の大きさを有する荷重に対して塑性変形が生じることになる。慣性力をも考慮に入れ、速度連続条件および塑性流法則を満足し、塑性条件を犯さないような運動のモードを調べると、Fig. 2(a)または同(b)に示すものが可能で、また、これ以外には無いことがわかる。図は、問題の対称性を考えて、右半分のみを描いたもので、速度 $\frac{\partial y}{\partial t}$ 、有効荷重 $q$ 、剪断力 $Q$ 、曲げモーメント $M$ の分布を示している。

まず、(a)型のモードで運動する場合を考える。これは、後に明らかになるように、 $P$ および $a$ が小さい場合に生ずるモードであって、A点では、 $|M|=M_p$ で塑性関節が生じ、B点より外側、すなわち、 $x \geq r$

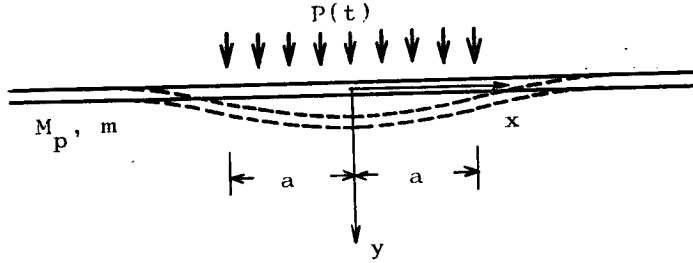


Fig. 1 Infinite Beam under Pulse Loading.

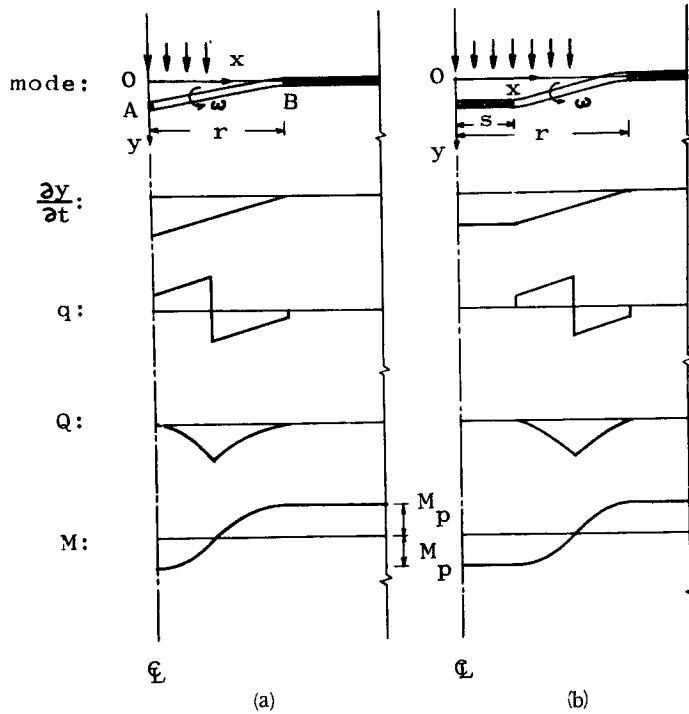


Fig. 2 Modes of Motion.

の部分でも  $|M|=M_p$  で塑性域が発生する。A点およびB点で、それぞれのモーメントの向きに応じた曲率変化が生じ、AB間は、 $|M|<M_p$  故、剛体としてB点のまわりに回転する。運動の自由度は2であるから、図の如く、角速度  $\omega(t)$  および剛体部分の長さ  $r(t)$  を未知量に選ぶ。

並進運動に対する運動量の原理により、

$$I(t) \equiv \int_0^c P dt = m\omega r^2 \dots\dots\dots(1)$$

原点0まわりの角運動量の原理により、

$$2M_p t + \frac{aI}{4} = \frac{m\omega r^3}{6} \dots\dots\dots(2)$$

(1) および (2) 式を  $\omega$  および  $r$  に対して解くと、

$$\omega = \frac{4I^3}{m(24M_p t + 3aI)^2} \dots\dots\dots(3)$$

$$r = \frac{3a}{2} + \frac{12M_p t}{I} \dots\dots\dots(4)$$

(4) 式から,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{12M_p(I - Pt)}{I^2} \dots\dots\dots(5)$$

前節 2°の仮定により,  $I - Pt \geq 0$  故  $\frac{dr}{dt} \geq 0$ . 即ち, 剛体部分の長さは時間の経過によって不変であるかあるいは増大し, 特にな変であるのは長方形パルスの載荷中のみである. 剛塑性境界  $x=r$  において曲率変化

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=r} = \frac{\omega dt}{dr} = \frac{I^3}{12mM_p r^2(I - Pt)} \dots\dots\dots(6)$$

が生ずる. なお,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = \begin{cases} -\omega & (0 < x < r) \\ 0 & (r < x) \end{cases} \dots\dots\dots(7)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \begin{cases} \omega(r-x) & (0 \leq x \leq r) \\ 0 & (r \leq x) \end{cases} \dots\dots\dots(8)$$

これらの関係を用いて, 撓み  $y$  は  $x, t$  および力積  $I(t)$  の関数として求められる.

(3) 式によれば,  $\omega=0$  となるのは  $t=\infty$ , すなわち, 運動は有限の時間に終了しない. これは, 充分大きな  $x$  に対して  $Q=0$  故, 有限の力積によって得られた運動量が保存されるからである. また (3), (4), (8) 式から  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial y}{\partial t} = 0$  であるが, 最終塑性変形量  $\lim_{t \rightarrow \infty} y$  は求まらない. しかし, 外力のなす仕事\*\*は有限で, それが曲げ塑性変形によって費やされるエネルギーに等しいから, 最終撓み角は有限でなければならぬ. 実際, (3) 式から  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \omega dt$  は存在することがわかり, 中点における最終撓み角は

$\lim_{t \rightarrow \infty} \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0} = -\int_0^\infty \omega dt$  から, また, これと曲率分布 (6) から載荷点付近の最終変形状態がわかる. 全塑性仕事  $W$  は, 次式から求められる.

$$W = 4M_p \int_0^\infty \omega dt \dots\dots\dots(9)$$

つぎに, (b) 型の運動モードを考える. これは, 梁の中央と外側で塑性域が発生するもので自由度 3 の運動である. Fig. 2 (b) に示すように, 角速度  $\omega(t)$ , 剛塑性境界の位置  $s(t)$  および  $r(t)$  を未知量に選ぶ.  $Q$  の分布を考慮すれば, 運動量の原理および速度連続条件から

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{I}{2ma} \quad (0 \leq x \leq s) \dots\dots\dots(10)$$

$$\omega = \frac{I}{2ma(r-s)} \dots\dots\dots(11)$$

$$r+s=2a \dots\dots\dots(12)$$

を得る. 原点まわりの角運動量の原理から,

$$2M_p t + \frac{aI}{4} = \frac{Is^2}{4a} + \frac{I(r-s)(r+2s)}{12a} \dots\dots\dots(13)$$

(11), (12), (13) 式を連立に解けば,

$$\omega = \frac{1}{8am} \left( \frac{I^3}{6aM_p t} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(14)$$

\*\* 純衝撃載荷の場合  $t=0$ . における運動のエネルギーが外力のなす仕事に対応する.

$$r = a + \left( \frac{24aM_p t}{I} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(15)$$

$$s = a - \left( \frac{24aM_p t}{I} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(16)$$

(15), (16) の両式および 2° の仮定から  $\frac{dr}{dt} \geq 0, \frac{ds}{dt} \leq 0$ 。すなわち、両塑性域は時間の経過によって増大しない。剛塑性境界における曲率変化は、 $\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=r} = \frac{\omega dt}{dr}$  および  $\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=s} = \frac{\omega dt}{ds}$  から

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=r} = - \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=s} = \frac{I^3}{48a^2 m M_p (I - Pt)} \dots\dots\dots(17)$$

なお、
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = \begin{cases} 0 & (0 < x < s) \\ -\omega & (s < x < r) \\ 0 & (r < x) \end{cases} \dots\dots\dots(18)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \begin{cases} \frac{I}{2ma} & (0 \leq x \leq s) \\ \omega(r-x) & (s \leq x \leq r) \\ 0 & (r \leq x) \end{cases} \dots\dots\dots(19)$$

これらから撓みが求まる。

以上の関係式は  $s=0$  となる時刻  $t_h$  まで成立し、 $t \geq t_h$  に対しては (a) 型のモードで運動する。(16) 式から、 $t_h$  は

$$\frac{24M_p t_h}{a} = I(t_h) \equiv \int_0^{t_h} P dt \dots\dots\dots(20)$$

の解である。 $t \geq t_h$  に対しては、再び (1)~(8) 式が成立し、 $t_h < t < \infty$  における撓みは  $t < t_h$  および  $t \geq t_h$  に生じたものの和として求められ、全塑性仕事はやはり (9) 式から求められる。

さて、(b) 型のモードで運動が始まるための条件は、 $s > 0$  から (16) 式を用いて、

$$aI > 24M_p t \quad (t < t_h) \dots\dots\dots(21)$$

この不等式が満足されるためには、 $t \rightarrow 0$  なる極限をとって、

$$\frac{P_0 a}{24M_p} > 1 \dots\dots\dots(22)$$

でなければならない。ここに、添字 0 は  $t=0$  の状態を表わす。また、 $\frac{ds}{dt} \leq 0$  であるから、(22) は (b) 型モードで運動が始まるための充分条件でもある。\*\*\* 従って (a) 型の運動モードが生ずるための条件は、

$$\frac{P_0 a}{24M_p} \leq 1 \dots\dots\dots(23)$$

である。

撓み  $y(x, t)$  および最終変形状態を、特定の  $P(t)$  に対して、次節で求めることにする。

### 5. 例 題

全力積  $I(\infty) \equiv \int_0^\infty P dt$  を  $\bar{I}$  と書く。

#### (i) 純衝撃を受けた場合

純衝撃荷重に対しては、Dirac 及び Heaviside の関数を用いて

---

\*\*\* (22) の条件は、前節 2° の仮定  $Pt \leq I \leq P_0 t$ 、および不等式 (21) から得られる。 $\frac{ds}{dt} \leq 0$  は 2° の仮定から得られたものであるから当然である。

$$P = f\delta(t-0_+); \quad I = fu(t) \dots\dots\dots(24)$$

不等式 (22) を満足するから、(b) 型のモードをもって運動が始まり、 $0 < t < t_h$  において (14), (15), (16), (17) および (24) 式から

$$\omega = \frac{1}{8am} \left( \frac{f^3}{6aM_p t} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(25)$$

$$r = a + \left( \frac{24aM_p t}{f} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(26)$$

$$s = a - \left( \frac{24aM_p t}{f} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(27)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=r} = - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=s} = \frac{f^2}{48a^2 m M_p} \dots\dots\dots(28)$$

(26), (27) 両式から  $s_0 = r_0 = a$ , 即ち  $t=0$  では梁全体が塑性域になる。撓みは、つぎのようにして求めると便利である。

$$y = \begin{cases} \int_0^t \frac{I}{2ma} dt = \frac{ft}{2ma} & (0 \leq x \leq s) \\ \int_0^t \frac{I}{2ma} dt + \int_s^x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (x-s) ds = \frac{ft}{2ma} - \frac{f^2(x-s)^2}{96a^2 m M_p} & (s \leq x \leq a) \\ \int_x^r \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (r-x) dr = \frac{f^2(r-x)^2}{96a^2 m M_p} & (a \leq x \leq r) \\ 0 & (r \leq x) \end{cases} \dots\dots\dots(29)$$

$t_h$  は (20) 式から

$$t_h = \frac{af}{24M_p} \dots\dots\dots(30)$$

$t \geq t_h$  において、(a) 型モードの運動を行ない、(3), (4), (6) および (24) 式から

$$\omega = \frac{4f^3}{m(24M_p t + 3af)^2} \dots\dots\dots(31)$$

$$r = \frac{3a}{2} + \frac{12M_p t}{f} \dots\dots\dots(32)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=r} = \frac{f^2}{12mM_p r^2} \dots\dots\dots(33)$$

撓みは、これらから、(29) 式と同様にして

$$y = \begin{cases} \frac{f^2}{12mM_p} \left( \frac{1}{4} - \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2} + \frac{x}{r} + \ln \frac{r}{2a} \right) & (0 \leq x \leq a) \\ \frac{f^2}{96a^2 m M_p} (2a-x)^2 + \frac{f^2}{12mM_p} \left( -\frac{x}{2a} + \frac{x}{r} + \ln \frac{r}{2a} \right) & (a \leq x \leq 2a) \\ \frac{f^2}{12mM_p} \left( -1 + \frac{x}{r} + \ln \frac{r}{x} \right) & (2a \leq x \leq r) \\ 0 & (r \leq x) \end{cases} \dots\dots\dots(34)$$

Fig. 3 は (29), (34) 式によって求めた撓み曲線を、無次元化して描いたものであり、等しい時間々隔による撓みの進行状況を示している。 $0 \leq \frac{x}{a} \leq 1$  に初速度として与えられた運動が、時間の経過と共に外側へ拡がり、載荷点近傍の撓みの増分が減少し、また、 $24M_p t / (fa) = 1.0$  を境にして運動は (b) 型から (a) 型へ移るから、それ以後  $x=0$  に生ずる塑性関節によって撓み角が不連続となる。

先に述べたように最終撓みは求まらないが、中点における最終撓み角の絶対値  $\theta_m$  は、

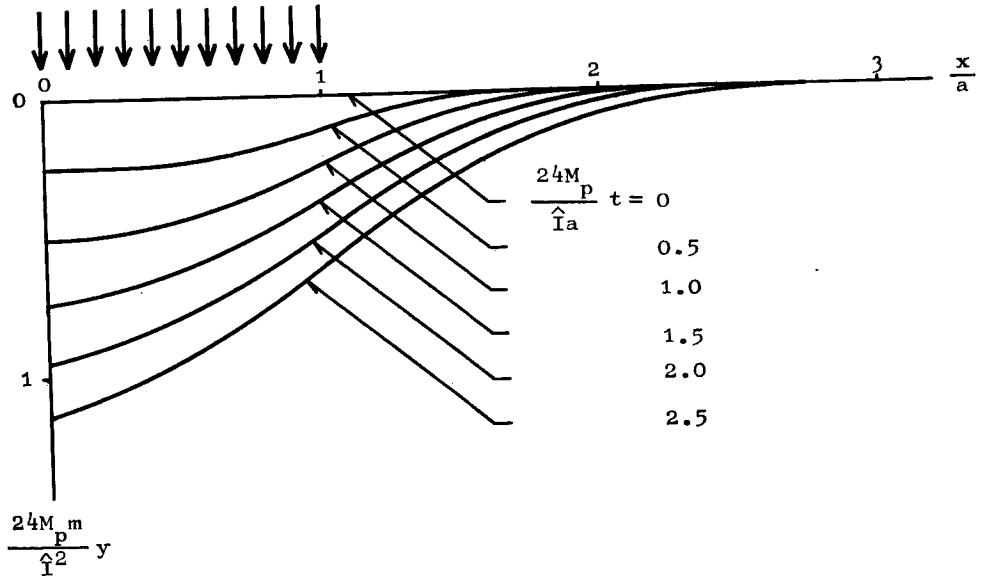


Fig. 3 Deflection Curves due to Pure Impulse.

$$\theta_m \equiv -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0+} = \int_{t_h}^{\infty} \omega dt = \frac{f^2}{24amM_p} \dots\dots\dots(35)$$

として、撓み角の不連続量は  $2\theta_m$  として、求まる。また、最終変形状態は、中点に対する相対撓み量  $\delta(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} [y(0, t) - y(x, t)]$  で表わされ (Fig. 4), これは次式から求められる。

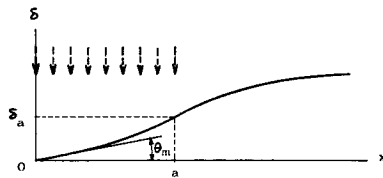


Fig. 4 Permanent Deformation Parameters.

$$\delta = \begin{cases} \theta_m x - \int_0^x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=s} (x-s) ds & (0 \leq x \leq a) \\ \theta_m x - \int_0^a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=s} (x-s) ds - \int_a^x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=r} (x-r) dr & (a \leq x) \end{cases} \dots\dots\dots(36)$$

(28), (33), (35), (36) の諸式を用いて、



$$\delta = \begin{cases} \frac{\hat{f}^2}{24mM_p} \left[ \frac{x}{a} + \left( \frac{x}{2a} \right)^2 \right] & (0 \leq x \leq a) \\ \frac{\hat{f}^2}{24mM_p} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{2x}{a} - \left( \frac{x}{2a} \right)^2 \right] & (a \leq x \leq 2a) \\ \frac{\hat{f}^2}{24mM_p} \left[ \frac{5}{2} + 2 \ln \frac{x}{2a} \right] & (2a \leq x) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(37)$$

なお、純衝撃载荷によって与えられる運動のエネルギー $E$ は、

$$E = \frac{\hat{f}^2}{4r_0 m} = \frac{\hat{f}^2}{4am} \quad \dots\dots\dots(38)$$

塑性変形によってなされる仕事 $W$ は、(9)、(25)、(30)、(31)式から

$$W = 4M_p \left( \int_0^{t_h} \omega dt + \int_{t_h}^{\infty} \omega dt \right) = \frac{\hat{f}^2}{4am} \quad \dots\dots\dots(39)$$

(38)、(39)両式から  $E=W$  なる関係が確かめられる。

(ii) 長方形パルスを受けた場合

全力積  $I$ 、荷重の大きさ  $P_0$  の、従って作用時間  $I/P_0$  の、長方形パルス

$$P = P_0[u(t) - u(t - I/P_0)] \quad \dots\dots\dots(40)$$

に対して最終変形状態を調べる。

$P_0 a \leq 24M_p$  の場合、条件(23)によって、(a)型の運動モードが生じ、 $0 \leq t \leq I/P_0$  において、 $r = \text{一定} = r_0$  故、 $x=0$  のほか、 $x=r_0$  で、撓み角に不連続量

$$\left[ \frac{d\delta}{dx} \right] = - \int_0^{I/P_0} \omega dt = - \frac{2\hat{f}^2 P_0}{m(24M_p + 3P_0 a)^2} \quad \dots\dots\dots(41)$$

が生ずる。ここに  $r_0$  は、(4)式から

$$r_0 = \frac{3a}{2} + \frac{12M_p}{P_0} \quad \dots\dots\dots(42)$$

前例と同様にして、

$$\theta_m = \int_0^{\infty} \omega dt = \frac{\hat{f}^2 P_0 (12M_p + P_0 a)}{2mM_p (24M_p + 3P_0 a)^2} \quad \dots\dots\dots(43)$$

$$\delta = \begin{cases} \frac{\hat{f}^2 P_0 (12M_p + P_0 a) x}{2mM_p (24M_p + 3P_0 a)^2} & (0 \leq x \leq r_0) \\ \frac{\hat{f}^2}{12mM_p} \left[ \frac{3(12M_p + P_0 a)}{24M_p + 3P_0 a} + \ln \frac{2P_0 x}{24M_p + 3P_0 a} \right] & (r_0 \leq x) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(44)$$

$P_0 a > 24M_p$  の場合、条件(22)を満足するから、運動のモードは(b)型から(a)型へ移り、撓み角に

$$x = r_0 = a + \left( \frac{24aM_p}{P_0} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ に於て } \left[ \frac{d\delta}{dx} \right] = - \frac{\hat{f}^2}{16am(6M_p P_0 a)^{\frac{1}{2}}} \quad \dots\dots\dots(45)$$

$$x = s_0 = a - \left( \frac{24aM_p}{P_0} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ に於て } \left[ \frac{d\delta}{dx} \right] = \frac{\hat{f}^2}{16am(6M_p P_0 a)^{\frac{1}{2}}} \quad \dots\dots\dots(46)$$

の不連続量が生ずる。また、

$$\theta_m = \frac{\hat{f}^2}{24amM_p} \quad \dots\dots\dots(47)$$

$$\delta = \begin{cases} \frac{\hat{f}^2}{24mM_p} \left[ \frac{x}{a} + \left( \frac{x}{2a} \right)^2 \right] & (0 \leq x \leq s_0) \\ \frac{\hat{f}^2}{96mM_p} \left[ -1 - \frac{12M_p}{P_0 a} + \frac{3}{2} \left( \frac{24M_p}{P_0 a} \right)^{\frac{1}{2}} + \left\{ 6 - \frac{3}{2} \left( \frac{24M_p}{P_0 a} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \frac{x}{a} \right] & (s_0 \leq x \leq r_0) \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} \frac{\hat{I}^2}{96mM_p} \left[ -2 - \frac{24M_p}{P_0a} + \frac{8x}{a} - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right] & (r_0 \leq x \leq 2a) \\ \frac{\hat{I}^2}{96mM_p} \left[ 10 - \frac{24M_p}{P_0a} + 8 \ln \frac{x}{2a} \right] & (2a \leq x) \end{cases}$$

これらにおいて  $P_0 \rightarrow \infty$  なる極限を取れば純衝撃に対する解と一致する。

以上の結果を図示したのが Figs. 5~7 である。Fig. 5 は、荷重パルスの形による最終変形状態の違いを

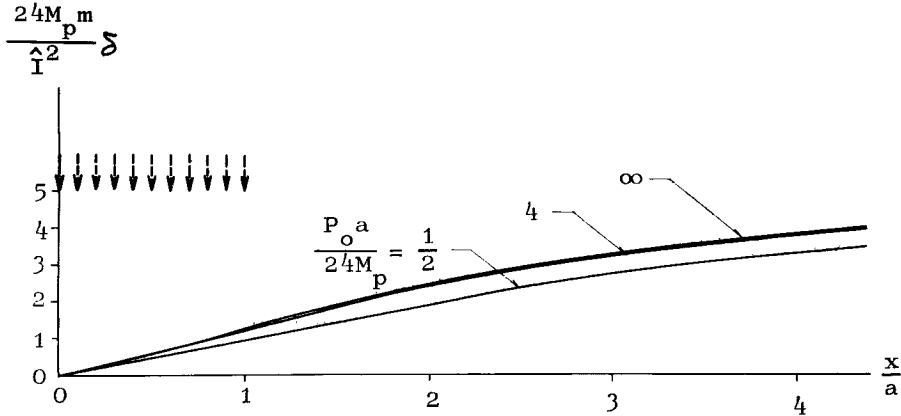


Fig. 5 Permanent Deformation.

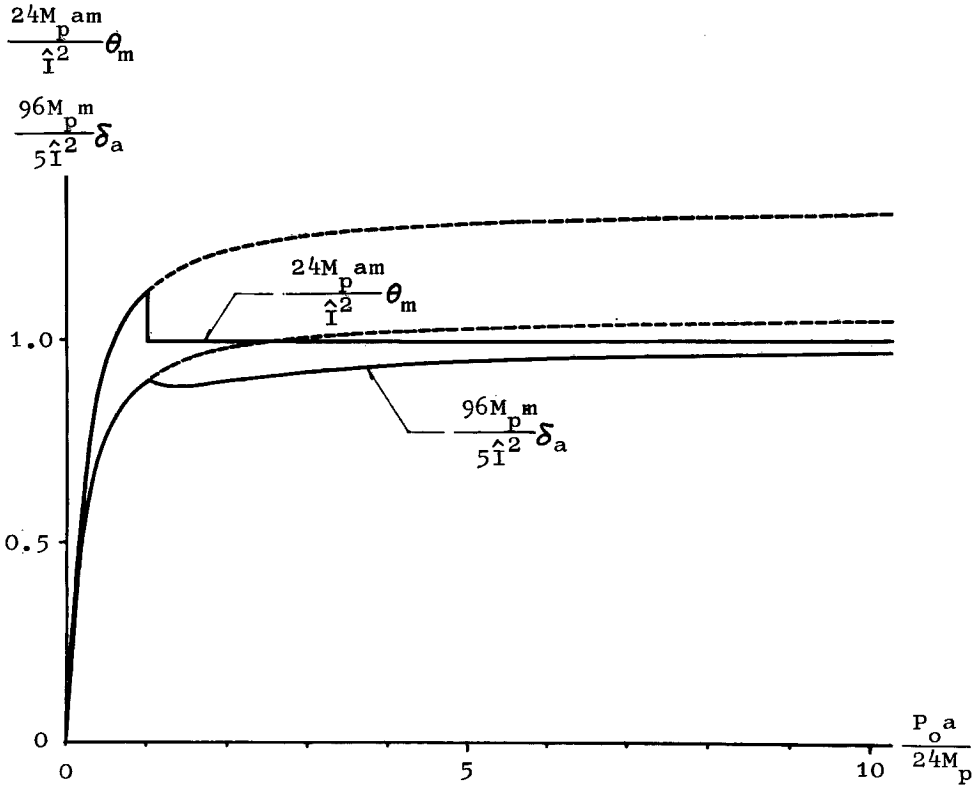


Fig. 6 Effects of Load Magnitude on Local Deformation.

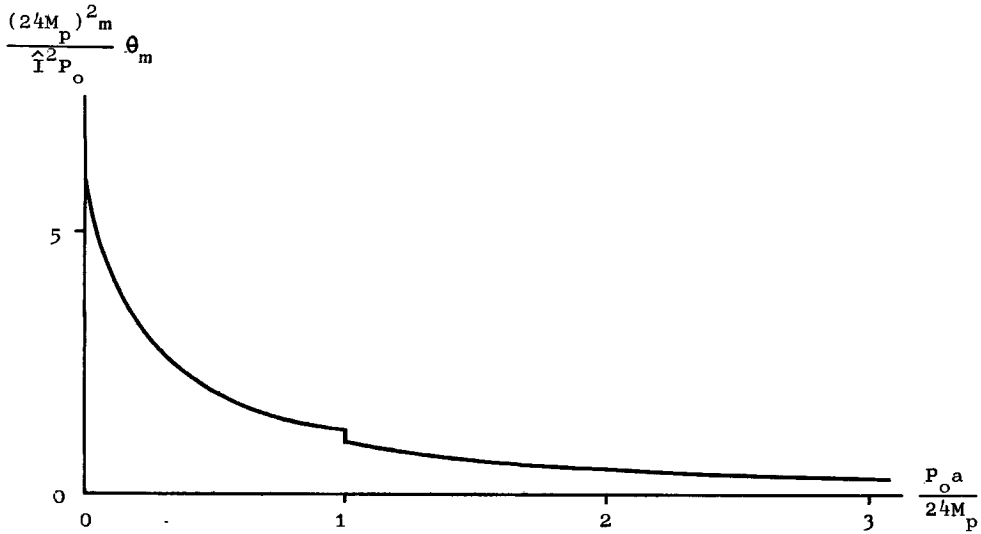


Fig. 7 Effects of Load-Distribution Range on Mid-Point Slope.

示したものであって、全力積が等しければ、荷重が大きいくほど、従って載荷時間が短い程、変形が局部的に生ずること、 $P_0 a / (24M_p)$  の値が  $1/2$  と  $4$  ではかなり変形状態が異なるが  $4$  と  $\infty$  では顕著な違いがないことなどがわかる。Fig. 6 は同様に、最終の局部変形を表わす量  $\theta_m$  及び  $\delta a \equiv \delta(a)$  に及ぼす荷重パルス形の影響を示したもので、 $P_0 a / (24M_p)$  の値が  $1$  以下のときには、局部変形状態がその値によって著しく変わるが、 $1$  以上の場合にはほとんど変わらないことを示している。これらの現象は、 $P_0 a / (24M_p) = 1$  を境にして運動モードが異なることを考えれば理解できる。Fig. 6 の点線は  $P_0 a / (24M_p) > 1$  の場合にも、(a) 型の運動モードを仮定して求めた値である。 $\theta_m$  に不連続点が生ずるのは、 $P_0 a / (24M_p) > 1$  の場合には、 $x=0$  以外に  $x=s_0$  および  $x=r_0$  で撓み角が不連続であるのに比べ、 $P_0 a / (24M_p) \leq 1$  の場合には、撓み角が不連続であるのは  $x=0$  および  $x=r_0$  においてのみだからであって、これらの撓み角不連続量の和は  $P_0 a / (24M_p) = 1$  においても連続となる。Fig. 7 は載荷幅の  $\theta_m$  に及ぼす影響を示すもので、荷重パルス  $P(t)$  が同じであれば載荷幅が小さい程  $\theta_m$  が大きいことを、従って変形が局部的になることを示している。 $P_0 a / (24M_p) = 0$  即ち、集中荷重のとき、 $\theta_m$  は最大で、 $(24M_p)^2 m \theta_m / (I^2 P_0) = 6$  である。また、 $P_0 a / (24M_p) > 1$  の場合には、 $P_0 a / (24M_p) < 1$  の場合に比べて、載荷幅の影響が小さいことがわかる。

## 6. 結 語

材の完全剛塑性的性質と、荷重  $P(t)$  の単調減少性の仮定によって、無限梁の撓み  $y(x, t)$  を解析的に求め得た。対応する静的な問題の解は存在しないが、運動を考えることによって、変形が時間と共に拡がって行くようすが明らかにされたわけである。微小変形理論に基づいて解析したから、運動は有限の時間内に終了せず、最終撓み量は有限ではないが、最終撓み角の分布および最終変形状態は明らかにされた。載荷幅および載荷時間が短い程変形が局部的で、従って、結果を有限長さの梁に適用しても、境界条件の影響は少ない。局部変形状態は、 $P_0 a / (24M_p)$  の値が  $1$  より大きいときには、荷重パルス形の影響が小さく、工学上十分な精度をもって、同じ力積を有する純衝撃載荷として扱えるが、その値が  $1$  より小さい場合には荷重の作用時間をも考慮する必要がある。また、 $P_0 a / (24M_p) < 1$  の場合には、載荷幅によって局部変形状態はかなり異なるが、 $P_0 a / (24M_p) > 1$  の場合には、載荷幅の影響は比較的小さい。

なお、梁断面が  $I$  型、箱型のように剪断抵抗の小さいもので、かつ荷重  $P$  が非常に大きいときには剪断変形も考慮すべきであり、また、撓みが非常に大きくなると、材軸の伸びに伴って引張力が生じて変形を拘束

するから、有限変形理論を用いれば、運動は有限の時間内に終了し、最終撓み量が求められる。この剪断並びに軸方向力の影響は先に示したようにして検討出来る<sup>15)</sup>。

### 謝 辞

本研究に当って、若林実教授から御激励を賜り、財団法人作行会から奨学金による援助を戴いた。ここに甚深の謝意を表します。

### 参 考 文 献

- 1) P.E. Duwez, D.S. Clark and H.F. Bohnenblust, "The Behavior of Long Beams Under Impact Loading," Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 72, 1950, pp. 27—34.
- 2) M.F. Conroy, "Plastic-Rigid Analysis of Long Beams Under Transverse Impact Loading," Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME., Vol. 74, 1952, pp. 465—470.
- 3) C.C. Fu, "Closed-Form Solutions of an Infinite Beam Under Impact Loading," International Journal of Solids and Structures, Vol. 3, 1967, pp. 607—615.
- 4) E.H. Lee and P.S. Symonds, "Large Plastic Deformations of Beams Under Transverse Impact," Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 74, 1952, pp. 308—314.
- 5) E.W. Parkes, "The Permanent Deformation of a Cantilever Struck Transversely at Its Tip," Proceedings of the Royal Society, London, England, Series A, Vol. 228, 1955, pp. 462—476.
- 6) E.W. Parkes, "The Permanent Deformation of an Encasté Beam Struck Transversely at Any Point in Its Span," Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Vol. 10, 1958, pp. 277—304.
- 7) T.J. Mentel, "The Plastic Deformation Due to Impact of a Cantilever Beam With an Attached Tip Mass," Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 80, 1958, pp. 515—524.
- 8) S.R. Bodner and P.S. Symonds, "Plastic Deformations in Impact and Impulsive Loading of Beams," Plasticity, Pergamon Press, Oxford, 1960, pp. 488—500.
- 9) S.R. Bodner and P.S. Symonds, "Experimental and Theoretical Investigation of the Plastic Deformation of Cantilever Beams Subjected to Impulsive Loading," Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 84, 1962, pp. 719—728.
- 10) J.S. Humphreys, "Plastic Deformation of Impulsively Loaded Straight Clamped Beams," Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 87, 1965, pp. 7—10.
- 11) D.P. Updike, "Dynamic-Plastic Deformations of a Ring With Attached Masses," Report, Division of Engineering, Brown University, NSF-GP 1115/2, 1963.
- 12) A.L. Florence, "Circular Plate under a Uniformly Distributed Impulse," International Journal of Solids and Structures, Vol. 2, 1966, pp. 37—47.
- 13) 若林 実・野中泰二郎・南宏一, "衝撃力をうける構造物の塑性変形——衝撃荷重をうける門型ラーメンの実験的研究(その1)", 京都大学防災研究所年報, 第10号A, 1967, pp. 391—406.
- 14) T. Nonaka, "Some Interaction Effects in a Problem of Plastic Beam Dynamics, Part 3: Experimental Study," Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 89, 1967, pp. 638—643.
- 15) T. Nonaka, "Some Interaction Effects in a Problem of Plastic Beam Dynamics, Part 1: Interaction Analysis of a Rigid, Perfectly Plastic Beam," Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 89, 1967, pp. 623—630.