

弾性地盤中にある楕円形基礎の振動性状

後藤尚男・土岐憲三・秋吉 卓

VIBRATIONAL CHARACTERISTICS OF FOUNDATIONS WITH ELLIPTIC CROSS SECTION IN ELASTIC GROUND

By Hisao GOTO, Kenzo TOKI and Takashi AKIYOSHI

Synopsis

Recently with respect to the aseismic design of bridge sub-structures the frequency response of a circular cylinder in an infinite elastic stratum has been theoretically analyzed by other author for the case where the surface layer is excited by a sinusoidal disturbing force from the bedrock. From this analysis, however, we cannot learn the influence of the difference of the cross section on the frequency response. In this paper we carried out the analysis of the frequency response for elliptic cylinder and made comparison with the former analysis.

1. 緒 言

橋脚の耐震設計については理論的ならびに実験的な研究が現在まで数多くなされてきたが、いまだ完全な耐震設計法が確立されていないのが現状である。これは埋設された構造物をとりまく地盤の諸性質の不明確さに起因することは明らかである。そこで従来までは地盤を線型または非線型のばね定数あるいは地盤係数という便宜的な概念を導入して動的応答の解析を容易ならしめる場合も多かった。しかし、これらは埋設された構造物の断面係数に関係なく、その幅のみに関係し、かつ一様に作用するという不合理さを持っている。そこでかかる不備な点を補うため表層地盤を等方均質な半無限弾性体と見なして3次元解析を行なつてかなり厳密な検討も行なわれてきた¹⁾。しかるにこの場合対象とされた基礎構造物の断面は円形であつて、基礎構造物の細長比による影響を知ることはできるが、断面形状の差異による影響を知ることはできない。かかる点に着目して本研究では座標系に楕円筒座標を用いて、断面形状が円形から板の状態まで変化するとき応答にいかなる差異を生ずるかを検討した。ここでわれわれは次のような仮定を行なった。基礎構造物は剛体としてロッキング振動のみをするものとし、基礎底面の中心線にその回転の中心がある場合を取り扱った。なお地盤についての仮定は円形断面の解析におけると同様、支持地盤は半無限弾性体であつて粘性減衰のない場合を対象とし、ロッキングのばね定数は振動数に関係なく構造物との接触面の形状にのみ関係するものとした。さらに上下方向の変位は水平方向の変位に比べて小さいものとして無視して、基盤より水平方向に調和波 $u_0 e^{i\omega t}$ が入射したときの基礎構造物の周波数応答を解析した。

2. 弾性地盤中にある楕円形断面基礎の応答解析

(a) 運動方程式

いま Fig. 1 に示すように、厚さ H の表層地盤中であつて、その底面が堅固な基盤の上に載っている長軸 $2a$ 、短軸 $2b$ の断面形状を持つ楕円筒を考える。ところで直角座標 (x, y, z) を楕円筒座標 (ξ, η, z) に変換するため

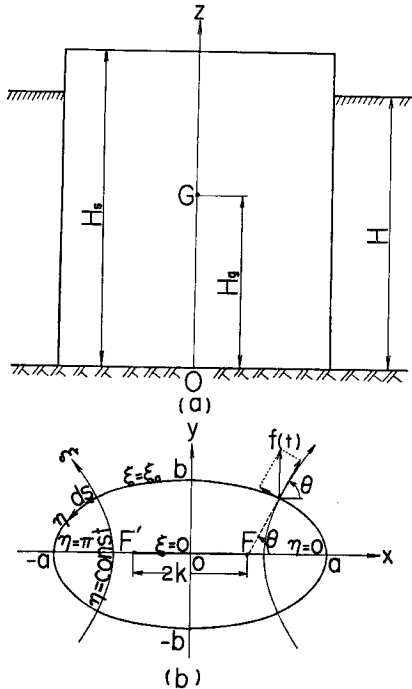


Fig. 1 Model and Elliptic Cross Section

$$\left. \begin{aligned} x &= k \cosh \xi \cos \eta \\ y &= k \sinh \xi \sin \eta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

とおく。ただし、 $k = \sqrt{a^2 - b^2}$ であって $2k$ は楕円の2焦点間の距離である。ここで楕円柱表面の座標 ξ_0 は式(1)より

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \tanh^{-1} \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{a-b} \\ \cosh \xi_0 &= \frac{a}{k}, \quad \sinh \xi_0 = \frac{b}{k} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

で表わされる。 $\xi_0 = 0$ のときの ξ_0 は楕円の2焦点間の線分 $2k$ を表わす。

さて短軸方向 (y 軸方向) に振動する弾性地盤の運動方程式は楕円筒座標を用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\partial(lu_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(lu_\eta)}{l^2 \partial \eta} \right\} \\ &- \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{\partial(lu_\eta)}{l^2 \partial \xi} - \frac{\partial(lu_\xi)}{l^2 \partial \eta} \right\} + \mu \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial z^2} \\ &= \rho \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial t^2} - \rho u_0 \omega^2 e^{i\omega t} \sin \theta \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{\partial(lu_\xi)}{l^2 \partial \xi} + \frac{\partial(lu_\eta)}{l^2 \partial \eta} \right\} + \mu \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\partial(lu_\eta)}{l^2 \partial \xi} - \frac{\partial(lu_\xi)}{l^2 \partial \eta} \right\} + \mu \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial z^2} \\ &= \rho \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial t^2} - \rho u_0 \omega^2 e^{i\omega t} \cos \theta \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここに、 $l = k \sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}$ 、 λ, μ : Lamé の定数、 ρ : 地盤の密度、 u_0 : 基盤の最大振幅、 a, b : 楕円形断面の長径と短径、 u_ξ, u_η : ξ および η 方向の変位。なお θ と ξ, η との関係は次のように与えられる。

$$\cos \theta = \frac{\partial x}{l \partial \xi} = \frac{\partial y}{l \partial \eta} = \frac{k \sinh \xi \cos \eta}{l} = \frac{b \cos \eta}{l} \quad (\xi = \xi_0 \text{ において}) \dots\dots\dots (5)$$

$$\sin \theta = \frac{\partial y}{l \partial \xi} = -\frac{\partial x}{l \partial \eta} = \frac{k \cosh \xi \sin \eta}{l} = \frac{a \sin \eta}{l} \quad (\xi = \xi_0 \text{ において}) \dots\dots\dots (6)$$

(b) 境界条件

楕円形剛基礎体が基盤より外力を受けて表層とともに振動するとき、その境界条件は次のように与えられる。

地震動が短軸方向のとき

- (i) $\eta = 0: u_\xi = 0$, (ii) $\eta = \pi/2: u_\eta = 0$, (iii) $\xi = \xi_0$: 剛体と地盤の変位が等しいという連続条件, (iv) $\xi = \infty: \sigma_\xi = \sigma_\eta = \tau_{\xi\eta} = 0$, (v) $z = 0: u_z = 0$, (vi) $z = H: \tau_{\xi z} = \tau_{\eta z} = 0$.

地震動が長軸方向のとき

- (i) $\eta = 0: u_\eta = 0$, (ii) $\eta = \pi/2: u_\xi = 0$, (iii) $\xi = \xi_0$: 剛体と地盤の変位が等しいという連続条件, (iv) $\xi = \infty: \sigma_\xi = \sigma_\eta = \tau_{\xi\eta} = 0$, (v) $z = 0: u_z = 0$, (vi) $z = H: \tau_{\xi z} = \tau_{\eta z} = 0$.

ただし短・長軸両方向の振動における境界条件 (v) は最初の仮定より常に満足されている。

(c) 運動方程式の解

式 (3), (4) の右辺, 左辺にそれぞれ l を乗じて式 (3) を ξ , 式 (4) を η に関して微分し, 両者

を加え合わせると

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta + \mu \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \dots\dots\dots (7)$$

同様に、式(3)、(4)の右辺、左辺にそれぞれ l を乗じて式(3)を η 、式(4)を ξ に関して微分し、両者を加え合わせると

$$\mu \nabla^2 (2\tilde{\omega}_z) + \mu \frac{\partial^2 (2\tilde{\omega}_z)}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 (2\tilde{\omega}_z)}{\partial t^2} \dots\dots\dots (8)$$

これらにおいて Δ , $2\tilde{\omega}_z$, ∇^2 はそれぞれ dilatation, rotation および Laplace の演算子を表わし、次のように書き表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial(lu_\xi)}{l^2 \partial \xi} + \frac{\partial(lu_\eta)}{l^2 \partial \eta} \\ 2\tilde{\omega}_z &= \frac{\partial(lu_\eta)}{l^2 \partial \xi} - \frac{\partial(lu_\xi)}{l^2 \partial \eta} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{l^2 \partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{l^2 \partial \eta^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

したがって式(7)、(8)の両式を解けば dilatation および rotation が得られるが、直接変位を求める方法を次のように考える。すなわち式(7)、(8)が ξ, η, z, t に関して変数分離の形の解が得られることは明らかであり、 z 方向には有限領域の問題であるから、これをフーリエ級数に展開することができる。いま短軸方向に振動する場合の境界条件(vi)を満たすような解は次式で表わせる。

$$lu_\xi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t}, \quad (m=1, 3, 5, \dots) \dots\dots\dots (10)$$

$$lu_\eta = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t}, \quad (m=1, 3, 5, \dots) \dots\dots\dots (11)$$

これより式(9)を用いて式(10)、(11)を式(7)、(8)に持込むと

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \nabla^2 \phi \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t}, \quad (m=1, 3, 5, \dots) \\ 2\tilde{\omega}_z &= \nabla^2 \psi \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t}, \quad (m=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

したがって、式(7)、(8)は次のようになる。

$$\nabla^2 \phi + \alpha_m^2 \phi = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$\nabla^2 \psi + \beta_m^2 \psi = 0 \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $\alpha_m = \pi/2H \cdot v_t/v_l \cdot \xi_m$, $\beta_m = \pi/2H \cdot \xi_m$, $\xi_m = \sqrt{(\omega/\omega_0)^2 - m^2}$, ($m=1, 3, 5, \dots$), v_l, v_t : 表層地盤における縦波、横波の伝播速度、 H : 表層地盤の厚さ。

いま式(13)を分離定数 λ を用いて $\phi = R(\xi) \cdot \Theta(\eta)$ と置いて変数分離を行なうと

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \left(-\lambda + \frac{\alpha_m^2 k^2}{2} \cosh 2\xi \right) R = 0 \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} + \left(\lambda - \frac{\alpha_m^2 k^2}{2} \cos 2\eta \right) \Theta = 0 \dots\dots\dots (16)$$

をうる。式(15)の解は Modified Mathieu function (変形マシュー関数)、式(16)の解は Mathieu function (マシュー関数) と呼ばれるものである⁸⁾。Modified Mathieu function は円筒関数における同様に複素関数による表示を行なえるものとして次のものがある。

$$M e_{2n+1}^{(1),(2)}(\xi, q) = (\rho_{2n+1}/A_1^{(2n+1)}) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} \left[J_r(v_1) H_{r+1}^{(1),(2)} + J_{r+1}(v_1) H_r^{(1),(2)}(v_2) \right], \quad (\lambda = a_{2n+1})$$

$$\begin{aligned}
 N e_{2n+1}^{(1),(2)}(\xi, q) &= (s_{2n+1}/B_1^{(2n+1)}) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} \left[J_r(v_1) H_{r+1}^{(1),(2)}(v_2) - \right. \\
 &\quad \left. - J_{r+1}(v_1) H_r^{(1),(2)}(v_2) \right], \quad (\lambda = b_{2n+1}) \\
 M e_{2n}^{(1),(2)}(\xi, q) &= (p_{2n}/A_0^{(2n)}) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} J_r(v_1) H_r^{(1),(2)}(v_2), \quad (\lambda = a_{2n}) \\
 N e_{2n+2}^{(1),(2)}(\xi, q) &= -(s_{2n+2}/B_2^{(2n+2)}) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)} \left[J_r(v_1) H_{r+2}^{(1),(2)}(v_2) - \right. \\
 &\quad \left. - J_{r+2}(v_1) H_r^{(1),(2)}(v_2) \right], \quad (\lambda = b_{2n+2})
 \end{aligned}$$

ただし、 $v_1 = \sqrt{q} e^{-\xi}$ 、 $v_2 = \sqrt{q} e^{\xi}$ であり、係数 $A_{2r}^{(2n)}$ 、 $A_{2r+1}^{(2n+1)}$ 、 $B_{2r+2}^{(2n+2)}$ 、 $B_{2r+1}^{(2n+1)}$ は q および m の関数である。また分離定数 λ は Characteristic number と呼ばれるものであって a_i または b_i で表わされ、上記各関数の後方に示されているのが対応する Characteristic number である。

また一方 Mathieu function に関しては実関数として次のようなものがある。

$$\begin{aligned}
 c e_{2n}(\eta, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \cos 2r\eta, \quad (\lambda = a_{2n}) \\
 c e_{2n+1}(\eta, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos(2r+1)\eta, \quad (\lambda = a_{2n+1}) \\
 s e_{2n+1}(\eta, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} \sin(2r+1)\eta, \quad (\lambda = b_{2n+1}) \\
 s e_{2n+2}(\eta, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \sin(2r+2)\eta, \quad (\lambda = b_{2n+2})
 \end{aligned}$$

ところで Mathieu function と Modified Mathieu function との組み合わせは同一の Characteristic number に対して式 (15)、(16) の解では

$$\begin{aligned}
 \phi &= R(\xi)\theta(\eta) = M e_m^{(1),(2)}(\xi, q) c e_m(\eta, q) \\
 &= N e_m^{(1),(2)}(\xi, q) s e_m(\eta, q)
 \end{aligned}$$

という組み合わせのみが存在する。しかるに本研究では表層地盤の境界は水平方向に無限遠としているので、波動としては前進波のみを解とすればよい。かくして短軸方向の振動では式 (13)、(14) の解は境界条件 (i)、(ii) および (iv) を満たすものとして次の解が得られる。

$$\begin{aligned}
 \phi &= C \cdot N e_{2n+1}^{(2)}(\xi, q_1) s e_{2n+1}(\eta, q_1) \dots\dots\dots (17) \\
 \psi &= D \cdot M e_{2n+1}^{(2)}(\xi, q_2) c e_{2n+1}(\eta, q_2) \dots\dots\dots (18)
 \end{aligned}$$

ただし C, D は未定定数であり、係数 $A_{2r+1}^{(2n+1)}$ は q_2 および m の関数であり、係数 $B_{2r+1}^{(2n+1)}$ は q_1 および m の関数である。ここに q_1, q_2 は

$$\left. \begin{aligned}
 q_1 &= \frac{\alpha m^2 k^2}{4} = \frac{k^2}{4} \left(\frac{\pi}{2H} \right)^2 \left(\frac{v_t}{v_l} \right)^2 \xi_m^2 \\
 q_2 &= \frac{\beta m^2 k^2}{4} = \frac{k^2}{4} \left(\frac{\pi}{2H} \right)^2 \xi_m^2
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ところで ξ_m^2 の正負により argument q_1, q_2 が正負になるが、このときは式 (17)、(18) の $M e_{2i+1}^{(2)}(\xi, q)$ 、 $N e_{2n+1}^{(2)}(\xi, q)$ は次のような Modified Mathieu function による。いま $q < 0$ のとき $q' = -q$ とすると

$$F e k_{2n}(\xi, -q') = (p'_{2n}/\pi A_0^{(2n)}) \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} I_r(v_1) K_r(v_2), \quad (\lambda = a_{2n})$$

$$\begin{aligned}
 Fek_{2n+1}(\xi, -q') &= (s'_{2n+1}/\pi B_1^{(2n+1)}) \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} \left[I_r(v_1)K_{r+1}(v_2) - \right. \\
 &\quad \left. - I_{r+1}(v_1)K_r(v_2) \right], (\lambda = a_{2n+1}) \\
 Gek_{2n+1}(\xi, -q') &= (p'_{2n+1}/\pi A_1^{(2n+1)}) \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} \left[I_r(v_1)K_{r+1}(v_2) + \right. \\
 &\quad \left. + I_{r+1}(v_1)K_r(v_2) \right], (\lambda = b_{2n+1}) \\
 Gek_{2n+2}(\xi, -q') &= (s'_{2n+2}/\pi B_2^{(2n+2)}) \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \left[I_r(v_1)K_{r+2}(v_2) - \right. \\
 &\quad \left. - I_{r+2}(v_1)K_r(v_2) \right], (\lambda = b_{2n+2})
 \end{aligned}$$

これらのうち境界条件 (iv) を満たすものとしては、 $Me_{2n+1}^{(2)}(\xi, -q')$ 、 $Ne_{2n+1}^{(2)}(\xi, -q')$ のかわりにそれぞれ $Fek_{2n+1}(\xi, -q')$ 、 $Gek_{2n+1}(\xi, -q')$ という単調減少関数を用いればよい。ところで式 (10)、(11) より求まる変位は dilatation Δ および rotation $2\tilde{\omega}_z$ に関する解であって、これに $\Delta = 2\tilde{\omega}_z = 0$ を満たすせん断振動に相当する解を式 (3)、(4) より求め、これを z 方向にフーリエ級数に展開した形にして加えることによって、所期の解が得られる。すなわち

$$\begin{aligned}
 u_{\xi} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^s \frac{1}{l} \left\{ C_1 \cdot \dot{N}e_{2n+1}^{(2)}(\xi, q_1) s e_{2n+1}(\eta, q_1) - D_1 \cdot Me_{2n+1}^{(2)}(\xi, q_2) \dot{c}e_{2n+1}(\eta, q_2) - \right. \\
 \left. - \frac{4u_0 k \cosh \xi}{m\pi \xi m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \sin \eta \right\} \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \\
 + \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{1}{l} \left\{ C_2 \cdot Gek_{2n+1}(\xi, -q_1') s e_{2n+1}(\eta, -q_1') - D_2 \cdot Fek_{2n+1}(\xi, -q_2') \dot{c}e_{2n+1}(\eta, -q_2') - \right. \\
 \left. - \frac{4u_0 k c \cosh \xi}{m\pi \xi m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \sin \eta \right\} \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \dots\dots\dots (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{\eta} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^s \frac{1}{l} \left\{ C_1 \cdot Ne_{2n+1}^{(2)}(\xi, q_1) \dot{s}e_{2n+1}(\xi, q_1) + D_1 \cdot \dot{M}e_{2n+1}^{(2)}(\xi, q_2) c e_{2n+1}(\eta, q_2) - \right. \\
 \left. - \frac{4u_0 k \sinh \xi}{m\pi \xi m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \cos \eta \right\} \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \\
 + \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{1}{l} \left\{ C_2 \cdot Gek_{2n+1}(\xi, -q_1') s e_{2n+1}(\eta, -q_1') + D_2 \cdot Fek_{2n+1}(\xi, -q_2') c e_{2n+1}(\eta, -q_2') - \right. \\
 \left. - \frac{4u_0 k \sinh \xi}{m\pi \xi m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \cos \eta \right\} \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \dots\dots\dots (21)
 \end{aligned}$$

ここに、 $\xi_m = \sqrt{(\omega/\omega_0)^2 - m^2}$ 、 s は $\xi_m^2 > 0$ を満足する最大の自然数 (奇数)、 C_1, D_1, C_2, D_2 : 未定定数、 $\dot{M}e_{2n+1}^{(2)}(\xi, q_2)$ 、 $\dot{N}e_{2n+1}^{(2)}(\xi, q_1)$ 等は微分形を表わしており以下同様な取扱いをする。かくして得られた解 u_{ξ}, u_{η} が境界条件のうちで (iii) 以外をすべて満たし、無限遠においては水平方向のせん断振動のみを残した解となることはいうまでもない。

さて未定定数 C_1, D_1, C_2, D_2 は境界条件 (iii) を適用することによって決定される。すなわちいま剛基礎体とその下端底面の中心線 (x 軸) を回転の中心として角振幅 φ_0 の回転を起したとき、底面より任意の高さ z における剛基礎体の水平変位 u_{ξ}, u_{η} は z 方向にフーリエ級数に展開した形として次のように書ける。

$$u_{\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} = \varphi_0 z \sin \theta e^{i\omega t} = \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{a \sin \eta}{l} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \dots\dots\dots (22)$$

$$u_{\eta} \Big|_{\xi=\xi_0} = \varphi_0 z \cos \theta e^{i\omega t} = \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{b c \sin \eta}{l} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \dots\dots\dots (23)$$

したがって $\xi = \xi_0$ において式 (20), (21) と式 (22), (23) とを等置することによって, 未定定数は次のような連立方程式より決定される。

$$C_1 \dot{N}e_{2n+1}^{(2)}(\xi_0, q_1) se_{2n+1}(\eta, q_1) - D_1 \cdot M e_{2n+1}^{(2)}(\xi_0, q_2) c \dot{e}_{2n+1}(\eta, q_2) = \left\{ \frac{4u\sigma}{m\pi\xi m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} \right\} a \sin \eta \dots\dots\dots(24)$$

$$C_1 N e_{2n+1}^{(2)}(\xi_0, q_1) s \dot{e}_{2n+1}(\eta, q_1) + D_1 \cdot \dot{M} e_{2n+1}^{(2)}(\xi_0, q_2) c e_{2n+1}(\eta, q_2) = \left\{ \frac{4u\sigma}{m\pi\xi m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} \right\} b \cos \eta \dots\dots\dots(25)$$

式 (24) の両辺に $se_{2n+1}(\eta, q_1)$ を乗じて η に関して $[0, 2\pi]$ で積分を行ない, 式 (25) の両辺に $ce_{2n+1}(\eta, q_2)$ を乗じて η に関して $[0, 2\pi]$ で積分を行なうと

$$C_1 \dot{N} e_{2n+1}^{(2)}(\xi_0, q_1) \sum_{r=0}^{\infty} \pi \left(B_{2r+1}^{(2n+1)} \right)^2 + D_1 \cdot M e_{2n+1}^{(2)}(\xi_0, q_2) \sum_{r=0}^{\infty} \pi (2r+1) A_{2r+1}^{(2n+1)} B_{2r+1}^{(2n+1)} = \left\{ \frac{4u\sigma}{m\pi\xi m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} \right\} a \pi B_1^{(1)} \quad (n=0) \dots\dots\dots(26)$$

$$= 0 \quad (n \neq 0)$$

$$C_1 N e_{2n+1}^{(2)}(\xi_0, q_1) \sum_{r=0}^{\infty} \pi (2r+1) A_{2r+1}^{(2n+1)} B_{2r+1}^{(2n+1)} + D_1 \cdot \dot{M} e_{2n+1}^{(2)}(\xi_0, q_2) \sum_{r=0}^{\infty} \pi \left(A_{2r+1}^{(2n+1)} \right)^2 = \left\{ \frac{4u\sigma}{m\pi\xi m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} \right\} b \pi A_1^{(1)} \quad (n=0) \dots\dots\dots(27)$$

$$= 0 \quad (n \neq 0)$$

これより未定定数 C_1, D_1 の解として0以外のものを求めると,

$$C_1 = \left[a B_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(A_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \dot{M} e_1^{(2)}(\xi_0, q_2) - b A_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} M e_1^{(2)}(\xi_0, q_2) \right] \cdot \left\{ \frac{4u\sigma}{m\pi\xi m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} \right\} / \left[\sum_{r=0}^{\infty} \left(A_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \sum_{r=0}^{\infty} \left(B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \dot{M} e_1^{(2)}(\xi_0, q_2) \dot{N} e_1^{(2)}(\xi_0, q_1) - \left(\sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 M e_1(\xi_0, q_2) N e_1^{(2)}(\xi_0, q_1) \right] \dots\dots\dots(28)$$

$$D_1 = b A_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 N e_1^{(2)}(\xi_0, q_1) - a B_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} N e_1^{(2)}(\xi_0, q_1) \cdot \left\{ \frac{4u\sigma}{m\pi\xi m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} \right\} / \left[\sum_{r=0}^{\infty} \left(A_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \sum_{r=0}^{\infty} \left(B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \dot{M} e_1^{(2)}(\xi_0, q_2) \dot{N} e_1^{(2)}(\xi_0, q_1) - \left(\sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 M e_1^{(2)}(\xi_0, q_2) N e_1^{(2)}(\xi_0, q_1) \right] \dots\dots\dots(29)$$

と得られる。ただし以上の議論は $\xi m^2 \geq 0$ の場合であるが, $\xi m^2 < 0$ のときには C_2, D_2 は $M e_1^{(2)}(\xi_0, q_2), N e_1^{(2)}(\xi_0, q_1)$ をそれぞれ $F e k_1(\xi_0, -q_1), G e k_1(\xi_0, -q_1)$ と書くだけのことで C_1, D_1 の場合と同様に取り扱えるので, 以後の取扱いは $\xi m^2 < 0$ の場合でも $M e_1^{(2)}(\xi_0, q_2), N e_1^{(2)}(\xi_0, q_1)$ でもって代表的に表示するものとする。

以上のように変位が求められると, 応力と変位の関係

$$\sigma_{\xi} = \lambda \left\{ \frac{\partial(lu_{\xi})}{l^2 \partial \xi} + \frac{\partial(lu_{\eta})}{l^2 \partial \eta} \right\} + 2\mu \left\{ \frac{\partial u_{\xi}}{l \partial \xi} + \frac{u_{\eta}}{l^2} \frac{\partial l}{\partial \eta} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

$$\tau_{\xi\eta} = \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_{\eta}}{l} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_{\xi}}{l} \right) \right\} \dots\dots\dots(31)$$

を用いて剛基礎体の高さ方向単位長さ当りにかかる土による全振動圧 F は途中の複雑な計算を省略して結果のみを示すと、

$$\begin{aligned} F &= \oint_{\xi_0} (\sigma_{\xi} \sin \theta + \tau_{\xi\eta} \cos \theta) ds = \int_0^{2\pi} (a \sin \eta \cdot \sigma_{\xi} + b \cos \eta \cdot \tau_{\xi\eta}) d\eta \\ &= - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} 4\pi \left[C_1 (\lambda + 2\mu) q_1 \cdot \frac{a}{k^2} B_1^{(1)} N e_1^{(2)}(\xi_0, q_1) + D_1 \cdot \mu q_2 \frac{b}{k^2} A_1^{(1)} M e_1^{(2)}(\xi_0, q_2) \right] \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \\ &= - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \rho \pi \omega^2 \xi_m^2 [C_1 \cdot a B_1^{(1)} N e_1^{(2)}(\xi_0, q_2) + D_1 \cdot b A_1^{(1)} M e_1^{(2)}(\xi_0, q_2)] \sin \frac{m\pi z}{2H} e^{i\omega t} \dots\dots\dots(32) \end{aligned}$$

したがって剛基礎体が下端端面の x 軸を中心にしてロッキング振動をしているとすれば、この中心軸まわりの剛基礎体の受ける回転モーメント M は

$$\begin{aligned} M &= \int_0^H F \cdot z dz \\ &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \rho \pi \omega^2 \xi_m^2 \left(\frac{2H}{m\pi} \right)^2 (-1)^{\frac{m-1}{2}} \{ C_1 \cdot a B_1^{(1)} N e_1^{(2)}(\xi_0, q_1) + D_1 \cdot b A_1^{(1)} M e_1^{(2)}(\xi_0, q_2) \} e^{i\omega t} \\ &= - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \rho \pi a b \left(\frac{2H}{m\pi} \right)^2 (-1)^{\frac{m-1}{2}} \Omega_m \left\{ \frac{8\varphi_0 H (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi^2 m^2} + \frac{4\mu\sigma}{m\pi \xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\} \xi_m^2 \omega_0^2 e^{i\omega t} \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \left[\frac{a}{b} (B_1^{(1)})^2 \sum_{r=0}^{\infty} \left(A_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \frac{\dot{M} e_1^{(2)}(\xi_0, q_2)}{\dot{M} e_1^{(2)}(\xi_0, q_2)} + \frac{b}{a} (A_1^{(1)})^2 \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \frac{\dot{N} e_1^{(2)}(\xi_0, q_1)}{\dot{N} e_1^{(2)}(\xi_0, q_1)} \right. \\ &\quad \left. - 2A_1^{(1)} B_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right] / \left[\sum_{r=0}^{\infty} \left(A_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \sum_{r=0}^{\infty} \left(B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\dot{M} e_1^{(2)}(\xi_0, q_2) \dot{N} e_1^{(2)}(\xi_0, q_1)}{\dot{M} e_1^{(2)}(\xi_0, q_2) \dot{N} e_1^{(2)}(\xi_0, q_1)} - \left(\sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \right] \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

ここで式 (32), (33), (34) をみると円筒座標による解と全く相似な形をしていることがわかる。すなわち円筒座標による場合は式 (32) において $a=b$ とすると

$$A_{2r+1}^{(1)} = B_{2r+1}^{(1)} = \begin{cases} 1 & (r=0) \\ 0 & (r \neq 0) \end{cases}$$

となり、式 (34) の Mathieu function を Hankel function に書きかえれば円筒座標における解と完全に一致する。すなわち式 (33), (34) は

$$M = - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \rho \pi a^2 \left(\frac{2H}{m\pi} \right)^2 (-1)^{\frac{m-1}{2}} \Omega_m \left\{ \frac{8\varphi_0 H (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi^2 m^2} + \frac{4\mu\sigma}{m\pi \xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\} \xi_m^2 \omega_0^2 e^{i\omega t} \dots\dots\dots(35)$$

および

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{a \dot{H}_1^{(2)}(\alpha_m' a) + a \dot{H}_1^{(2)}(\beta_m' a)}{H_1^{(2)}(\alpha_m' a) + H_1^{(2)}(\beta_m' a)} - 2 \\ &\quad \frac{a^2 \dot{H}_1^{(2)}(\alpha_m' a) \cdot \dot{H}_1^{(2)}(\beta_m' a)}{H_1^{(2)}(\alpha_m' a) \cdot H_1^{(2)}(\beta_m' a)} - 1 \end{aligned} \dots\dots\dots(36)$$

となる。ただし、 a は円柱の半径であって、

$$\alpha_m' a = \pi/2 \cdot a/H \cdot v_t/v_l \cdot \xi_m, \quad \beta_m' a = \pi/2 \cdot a/H \cdot \xi_m, \quad \xi_m = \sqrt{(\omega/\omega_0)^2 - m^2} \quad (m=1, 3, 5, \dots)$$

また一方 $b/a=0$ のとき、すなわち幅 $2a$ の板の場合は

$$M = - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \rho \pi a^2 \left(\frac{2H}{m\pi} \right)^2 (-1)^{\frac{m-1}{2}} \Omega_m \left\{ \frac{8\varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} + \frac{4u_0}{m\pi \xi m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\} \xi m^2 \omega_0^2 e^{i\omega t} \dots (37)$$

および

$$\Omega_m = \frac{(B_1^{(1)})^2 \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \frac{\dot{M}e_1^{(2)}(\xi_0, q_2)}{Me_1^{(2)}(\xi_0, q_2)}}{\sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \frac{\dot{M}e_1^{(2)}(\xi_0, q_2)}{Me_1^{(2)}(\xi_0, q_2)} \cdot \frac{Ne_1^{(2)}(\xi_0, q_1)}{Ne_1^{(2)}(\xi_0, q_1)} - \left(\sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right)^2} \dots (38)$$

となる。このようにして剛基礎体に作用する回転モーメントが得られるので、剛基礎体についてのロッキング振動の方程式を解けば、この剛基礎体の周波数応答を定める関係が得られることになる。したがって、いまこの剛基礎体とその下端底面の x 軸上に回転の中心を有し、角振幅 φ_0 なるロッキング振動をしているものとすれば、この剛基礎体に関する運動方程式は次のように書ける。

$$I\ddot{\varphi} + k_r\varphi = m_0 u_0 \omega^2 H_0 e^{i\omega t} + M \dots (39)$$

ここに、 m_0 : 剛基礎体の総質量、 H_0 : 重心の基盤からの高さ、 I : 底面中心線 (x 軸) まわりの慣性モーメント、 k_r : 底面のロッキングのばね定数。

いま式(39)の解を $\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}$ とすると、これを式(39)に持込むことにより

$$\varphi_0 = \frac{m_0 H_0 - \frac{16ab\rho H^2}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \Omega_n}{k_r - I\omega^2 + \frac{32ab\rho H^3}{\pi^3} \omega_0^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\xi m^2}{m^4} \Omega_m} \cdot u_0 \omega^2 \dots (40)$$

が得られる。いま比較を容易にするため円筒座標における解法¹⁾で田治見教授が用いた記号をそのまま用いると、 $\omega=0$ のときの Ω_m を Ω_{ms} とすれば式(40)の分母の第3項目は静的水平ばね定数に相当することから、これとロッキングのばね定数との比を α とすると、

$$\frac{32ab\rho H^3}{\pi^3} \omega_0^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\xi m^2}{m^4} \Omega_m = \frac{32ab\rho H^3}{\pi^3} \omega_0^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\Omega_{ms}}{m^2} \equiv \alpha k_r \dots (41)$$

したがって、 f_1, f_2, g_1, g_2 を実数、 $i = \sqrt{-1}$ として

$$\frac{\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\xi m^2}{m^4} \Omega_m}{\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\Omega_{ms}}{m^2}} = f_1 + i f_2, \quad \frac{- \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3} \Omega_m}{\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\Omega_{ms}}{m^2}} = g_1 + i g_2 \dots (42)$$

と置きかえると、式(40)の見かけ上からは、式(42)の前者は側圧による地盤のばねの剛さの動的効果、すなわち動的水平ばね定数の静的水平ばね定数に対する比に相当し、後者は振動土圧の動的効果を示しているといえよう。いま剛基礎体の底面より任意の高さ H_0 における剛基礎体の水平方向における応答倍率を κ とすると、

$$\kappa = \left| \frac{\varphi_0 H_0 + u_0}{u_0} \right| = \left| 1 + \frac{m_0 H_0 H_0 - \frac{16ab\rho H^2 H_0}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3} \Omega_m}{k_r - I\omega^2 + \frac{32ab\rho H^3}{\pi^3} \omega_0^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\xi m^2}{m^4} \Omega_m} \cdot \omega^2 \right|$$

$$= \left| 1 + \frac{\frac{H_0 H_0}{i_0^2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_s} \right)^2 + \frac{\pi}{2} \frac{H_0}{H} \alpha (g_1 + i g_2)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_s} \right)^2 + \alpha (f_1 + i f_2)} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right| \dots (43)$$

ただし、 $i_0 = \sqrt{I/m_0}$ 、 $\omega_s = \sqrt{k_r/I}$ 、 $m_0 = \rho \pi a b H_s$ 、 $I = m_0 (b^2/4 + H_s^2/3)$ 、 ρ : 表層地盤の密度、 H_s : 剛基礎体の全長。

また $b/a=0$ すなわち板の場合は応答倍率は

$$\kappa = \left| 1 + \frac{\pi H_0}{2H} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \Omega_m}{m^3} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right| = \left| 1 + \frac{\pi H_0}{2H} \frac{g_1 + i g_2}{f_1 + i f_2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right| \dots\dots\dots(44)$$

ただし、この場合の Ω_m は式 (38) を用いなければならない。

かくして短軸方向に振動する場合の周波数応答の解析は以上のようにして得られたが、同様にして長軸方向に振動する場合は、断面が楕円の剛基礎体の周波数応答の式は式 (41) と全く同じ形になる。ただし Ω_m の値は次の式を用いて計算しなければならない。

$$\begin{aligned} \Omega_m = & \left[\frac{a}{b} (B_{2r+1}^{(1)})^2 \sum_{r=0}^{\infty} \left(A_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \frac{\dot{M}e_1^{(2)}(\xi_0, q_1)}{Me_1(\xi_0, q_1)} + \frac{b}{a} (A_{2r+1}^{(1)})^2 \sum_{r=0}^{\infty} \left(B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \frac{\dot{N}e_1^{(2)}(\xi_0, q_2)}{Ne_1^{(2)}(\xi_0, q_2)} \right. \\ & \left. - 2A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right] / \left[\sum_{r=0}^{\infty} \left(A_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \sum_{r=0}^{\infty} \left(B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \right. \\ & \left. \cdot \frac{\dot{M}e_1^{(2)}(\xi_0, q_1) Ne_1^{(2)}(\xi_0, q_2)}{Me_1^{(2)}(\xi_0, q_2) Ne_1^{(2)}(\xi_0, q_2)} - \left(\sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \right] \dots\dots\dots(45) \end{aligned}$$

ここに、係数 $A_{2r+1}^{(1)}$, $B_{2r+1}^{(1)}$ はそれぞれ q_1, q_2 および m の関数である。 q_1, q_2 は式 (19) で示されるものと同一である。

ところで $b/a=0$ すなわち幅 $2a$ の厚さのない板の場合は同様にして

$$\begin{aligned} \Omega_m = & (B_{2r+1}^{(1)})^2 \sum_{r=0}^{\infty} \left(A_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \frac{\dot{M}e_1^{(2)}(\xi_0, q_1)}{Me_1^{(2)}(\xi_0, q_1)} / \left[\sum_{r=0}^{\infty} \left(A_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \sum_{r=0}^{\infty} \left(B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \right. \\ & \left. \cdot \frac{\dot{M}e_1^{(2)}(\xi_0, q_1) \cdot \dot{N}e_1^{(2)}(\xi_0, q_2)}{Me_1^{(2)}(\xi_0, q_1) \cdot Ne_1^{(2)}(\xi_0, q_2)} - \left(\sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \right] \dots\dots\dots(46) \end{aligned}$$

この場合 q_1, q_2 は次のようになる。

$$q_1 = \frac{\alpha m^2 k^2}{4} = \left(\frac{\pi a}{4H} \right)^2 \left(\frac{v_t}{v_l} \right)^2 \xi_m^2, \quad q_2 = \frac{\beta q_m^2 k^2}{4} = \left(\frac{\pi a}{4H} \right)^2 \xi_m^2 \dots\dots\dots(47)$$

ところで Timoshenko⁴⁾ によれば、半無限弾性体の表面上にある剛体のロッキングの静的ばね定数については次のようになる。すなわち弾性体の密度を ρ^* 、弾性体中を伝わる横波の速さを v^* 、接触面の断面 2 次モーメントを I_0 、接触面積を A とすると

$$k_r = \frac{2\rho^* v^{*2} I_0}{\beta(1-\nu)\sqrt{A}} \dots\dots\dots(48)$$

という関係がある。ただし、 ν ：ポアソン比、 β ：接触面の形状に関する補正係数（円で0.96，正方形で0.95など）。

ところで短軸方向の振動を対象とするときは $A = \pi ab, I_0 = \pi ab^3/4$ である。したがって表層と基盤における密度、横波の伝播速度を一定とするときは、これらの諸定数を総括した係数 C_1, C_2 を用いて

$$\alpha = C_1 \frac{H}{b} \sqrt{\frac{a}{b}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\Omega_{ms}}{m^2} \dots\dots\dots(49)$$

$$\frac{\omega_s}{\omega_g} = C_2 \sqrt[4]{\frac{b}{a}} / \sqrt{\frac{b}{4H} + \frac{H}{3b}} \dots\dots\dots(50)$$

と表わせる。

一方長軸方向の振動の場合は

$$\alpha = C_1 \frac{H}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\Omega_{ms}}{m^2} \dots\dots\dots(51)$$

$$\frac{\omega_s}{\omega_g} = C_2 \sqrt[4]{\frac{a}{b}} / \sqrt{\frac{a}{4H} + \frac{H}{3b}} \dots\dots\dots(52)$$

となる。これらの関係より当然のことながら同一地盤上に支持された剛構造物でも b/a の大小, すなわち接触面積の相違に依存することがわかる。ここに α は静的水平ばね定数のロッキングのばね定数に対する比, ω_s は剛基礎-基盤系のロッキングの固有円振動数, ω_g は表層地盤の一次固有円振動数である。

(d) Characteristic number a_1, b_1 および係数 $A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)}$

分離定数 $a_{2n}, a_{2n+1}, b_{2n+1}, b_{2n+2}$ などは Characteristic number と呼ばれるもので³⁾, これらは q_1 または q_2 および m の関数である。本研究では a_1 および b_1 のみが必要なので, その概略を示す。

q がきわめて小さいときは,

$$a_1 = 1 + q - \frac{1}{8}q^2 - \frac{1}{64}q^3 - \frac{1}{1536}q^4 + \frac{11}{36864}q^5 + \frac{49}{589824}q^6 + \frac{55}{9437184}q^7 - \frac{265}{113246208}q^8 + 0(q^9) \dots\dots\dots(53)$$

$$b_1 = 1 - q - \frac{1}{8}q^2 + \frac{1}{64}q^3 - \frac{1}{1536}q^4 - \frac{11}{36864}q^5 + \frac{49}{589824}q^6 - \frac{55}{9437184}q^7 - \frac{265}{113246208}q^8 + 0(q^9) \dots\dots\dots(54)$$

このとき

$$\left. \begin{aligned} A_1^{(1)} &= 1 \\ A_3^{(1)} &= -\frac{1}{8}q \left\{ 1 + \frac{1}{8}q + \frac{1}{192}q^2 - \frac{11}{4608}q^3 + \dots \right\} \\ A_5^{(1)} &= \frac{1}{192}q^2 \left\{ 1 + \frac{1}{6}q + \frac{1}{128}q^2 + \dots \right\} \\ A_7^{(1)} &= -\frac{1}{9216}q^3 \left\{ 1 + \frac{3}{16}q + \dots \right\} \\ A_9^{(1)} &= \frac{1}{737280}q^4 \left\{ 1 + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(55)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1^{(1)} &= 1 \\ B_3^{(1)} &= -\frac{1}{8}q \left\{ 1 - \frac{1}{8}q + \frac{1}{192}q^2 - \frac{11}{4608}q^3 + \dots \right\} \\ B_5^{(1)} &= \frac{1}{192}q^2 \left\{ 1 - \frac{1}{6}q + \frac{1}{128}q^2 + \dots \right\} \\ B_7^{(1)} &= -\frac{1}{9216}q^3 \left\{ 1 - \frac{3}{16}q + \dots \right\} \\ B_9^{(1)} &= \frac{1}{737280}q^4 \left\{ 1 - \dots \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(56)$$

一方 q が大きな値であるときには, 次式のような連分数を満足する値として, a_1 および b_1 を求めることができる。

$$a_1 = 1 + q + \frac{q^2}{a_1 - 9} - \frac{q^2}{a_1 - 25} - \frac{q^2}{a_1 - 49} - \dots\dots\dots(57)$$

$$b_1 = 1 - q + \frac{q^2}{b_1 - 9} - \frac{q^2}{b_1 - 25} - \frac{q^2}{b_1 - 49} - \dots\dots\dots(58)$$

これらの Characteristic number a_1, b_1 の q に対する関係は Fig. 2 のようになり, 同一の q に対して a_1, b_1 は互に共役な関係にある。

ところで $A_3^{(1)}/A_1^{(1)} = v_1, A_5^{(1)}/A_3^{(1)} = v_3, A_7^{(1)}/A_5^{(1)} = v_5, \dots\dots$ とすれば,

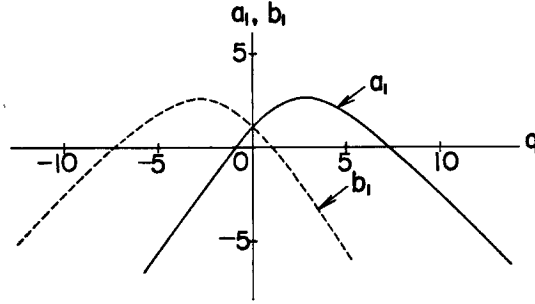


Fig. 2 Values of Characteristic Numbers a_1, b_1 for q

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{a_1 - 1 - q}{q}, \quad v_3 = \frac{a_1 - 9}{q} - \frac{1}{v_1}, \quad \dots \\ v_{2r+1} &= \frac{a_1 - (2r+1)^2}{q} - \frac{1}{v_{2r-1}} \quad (r \geq 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(59)$$

より v_1, v_3, \dots が求められ、したがって $A_1^{(1)} : A_3^{(1)} : A_5^{(1)} : \dots$ が求められる。同様に $B_3^{(1)}/B_1^{(1)} = v_1, B_5^{(1)}/B_3^{(1)} = v_3, \dots$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{b_1 - 1 + q}{q}, \quad v_3 = \frac{b_1 - 9}{q} - \frac{1}{v_1}, \quad \dots \\ v_{2r+1} &= \frac{b_1 - (2r+1)^2}{q} - \frac{1}{v_{2r-1}} \quad (r \geq 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(60)$$

より v_1, v_3, \dots が計算でき、したがって $B_1^{(1)} : B_3^{(1)} : B_5^{(1)} : \dots$ が得られる。

ここで Mathieu function を正規化しておく、短軸方向の振動のとき

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ se_1(\eta, q_1) \right\}^2 d\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ ce_1(\eta, q_2) \right\}^2 d\eta = 1 \dots\dots\dots(61)$$

したがって

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(A_{2r+1}^{(1)} \right)^2 = \sum_{r=0}^{\infty} \left(B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 = 1 \dots\dots\dots(62)$$

ただし、 $A_{2r+1}^{(1)}, B_{2r+1}^{(1)}$ はそれぞれ q_2, q_1 および m の関数である。長軸方向の振動のときも同様にして式(62)が成り立つが、このときは $A_{2r+1}^{(1)}, B_{2r+1}^{(1)}$ はそれぞれ q_1, q_2 および m の関数である。この式(62)を用いると正規化された $A_1^{(1)}, A_3^{(1)}, A_5^{(1)}, \dots$ および $B_1^{(1)}, B_3^{(1)}, B_5^{(1)}, \dots$ 等の値が完全に決定されることになる。さらに式(59)の関係を用いると前記の Ω_m の形はかなり簡略化される。なお、 $q < 0$ の場合すなわち、 $ce_1(\eta, -q), se_1(\eta, -q)$ の場合についても上記と同様のことが当てはまることはいうまでもない。

かくして、ある q_1 および q_2 の値に対して Characteristic number a_1, b_1 および係数 $A_1^{(1)}, A_3^{(1)}, A_5^{(1)}, \dots; B_1^{(1)}, B_3^{(1)}, B_5^{(1)}, \dots$ が定まれば、半無限弾性地盤中にある楕円形剛基礎体の周波数応答の計算ができることになる。

3. 数値計算結果とその考察

本研究では地中に埋設された剛構造物の形による影響を知るのが主な目的であるので、数値計算に当っては、表層地盤における横波と縦波の伝播速度の比を $v_t/v_l = 1/3$ に固定して楕円の短軸と長軸との比 b/a および楕円の長軸と表層の厚さとの比 a/H をパラメーターとして計算を進めた。また式(48), (49) および式(50), (51)における係数 C_1, C_2 はそれぞれ 0.02, 1 とした。剛基礎体の全長 H_0 は表層の厚さ H に等しく、かつ上載荷重のない様な等断面の場合の剛基礎体頂部の変位に関する応答倍率の数値計算を遂行

した。したがって Fig.1 (a) より $H_2=H_0=2H_1=H$ となる。式 (41) の見かけ上からは、剛基礎体表が層よりモーメントを受けるとき f_1+if_2 , g_1+ig_2 がそれぞれ表層の剛基礎体に対する水平ばね定数の動的影響および剛基礎体の受ける振動時の土圧の影響を表わす項と解される。ここで根入長を一定にした場合と断面を一定にした場合との二つの場合に分けて考えると、

(a) a/H が一定のとき

b/a が変化するとき Fig. 3 および Fig. 4 が f_1+if_2 を, Fig. 5 および Fig. 6 が g_1+ig_2 を示したものである。Fig. 3 では短軸方向に振動するとき、実数部 f_1 は $\omega > \omega_0$ ではゆるやかに減少して行き、このような条件下では負の値になる場合もある。一方虚数部 f_2 は $\omega > \omega_0$ では急激に増加する。この傾向は断面が偏平になるほど、つまり振動方向に対する断面の奥行が狭くなるほど著しいということ、それだけ剛基礎体が表層の影響を受けやすいということであって、偏平な構造体ほど応答が大きいたる事実と一致する。また振動数の増大に伴って f_1+if_2 はほとんど虚数部 f_2 に支配されるので、振動減衰として効いてくることを示しているといえよう。すなわち $\tan^{-1}(f_2/f_1)$ の値が次第に大きくなるので、それだけ外力との位相差が生じることになり、表層は剛基礎体に対して減衰効果を大きく及ぼすことになる。その絶対値 $|f_1+if_2|$ も f_2 の影響で大きくなるので、式 (43) からわかるように振動数の増大とともに応答倍率を小さくするように作用することになる。Fig. 4 は長軸方向に振動する場合であるが、 $\omega > \omega_0$ では断面が偏平なほど虚数部 f_2 はその増加はゆるやかであり、減衰の影響は少なくなる。しかるにこの場合、実数部 f_1 の値は振動数に関係なく一定の値に近づいていくが、このことは動的な水平ばね定数の実部が振動数に関係しなくなり、断面形状にもそれほど顕著な影響は受けないが、その虚数部から判断すると振動方向に対して断面の幅が大きくなるほど減衰の効果が大きく現われてくることを示している。

次に Fig. 5 は短軸方向に振動するときの振動土圧による影響であるが、その実数部 g_1 は $\omega = \omega_0$ 、すなわち振動数が表層の固有振動数に近いと急激に増大し、 $\omega = \omega_0$ を過ぎると位相が逆転してその絶対値は急激に減少する。このことは当然のことながら、振動土圧が表層の影響をよく表わしているといえよう。 $\omega > \omega_0$ で実数部 g_1 が負に転じることは、剛基礎体が外力に対して逆位相の力を表層より受けることを意味している。また虚数部 g_2 も急激に小さくなり、振動数が増大するにしたがって振動土圧による効果は徐々に減少するが、ほぼ一定の値に落ち着く。また断面の差異による影響は振動土圧に関してはあまり効かないようである。Fig. 6 の長軸方向の振動でも振動土圧は断面形状によらず、ほぼ一定の傾向で発生することを示している。同様に振動数が大きくなると、 g_1, g_2 ともに小さな一定の値に近づいていく。

かくして f_1+if_2 , g_1+ig_2 の一般的傾向から式 (43) で示される応答が小さくなることが予想されるがその結果を Fig. 7 および Fig. 8 に示した。まず Fig. 7 の短軸方向の振動のときは、ロッキングのばね定数 k_r による剛基礎体の固有振動数 ω_s が表層地盤の固有振動数 ω_0 より小さいときは、 $\omega = \omega_s$ の近辺にピークが現われずに表層の一次共振 $\omega = \omega_0$ のときの剛基礎体の共振を大きくし、かつその領域を著しく広めるといふ、いわば相乗的な効果を及ぼすといえよう。このような状態のときは、表層の影響を受けやすい板状のものより大きな共振を引き起すこともありうることを示している。円柱の場合はたまたま $\omega_s > \omega_0$ となるため、 ω_s による影響が $\omega = \omega_s$ の近傍にピークとして現われることがわかる。振動数が大きくなると、断面形状の如何にかかわらずほぼ一定の傾向を示すようである。

次に Fig. 8 より長軸方向に振動する場合は、断面形状が円柱より次第に偏平になるにつれて ω_s の値が増大し、ついに板の状態では ω_s の値は無量大となる。このとき表層の共振による影響は比較的少なく、そのかわり $\omega \cong \omega_s$ の共振が起る。この $\omega \cong \omega_s$ におけるピークの高さは ω_s の値に近いほど高くなるが、その範囲は狭い。一方 ω_s の値が ω_0 の値より大きくなるにつれて共振点のピークの高さは漸減するが、この ω_s による共振の影響範囲は広がる。しかるに $b/a=0$ という幅 $2a$ の板の状態では f_1+if_2, g_1+ig_2 の値が短軸方向と長軸方向の振動では異なるにもかかわらず、その応答倍率はほとんど一致する。いずれにしても断面形状の如何にかかわらず、振動数が大きくなると応答は一定の値に近づいていく。

(b) b/a が一定のとき

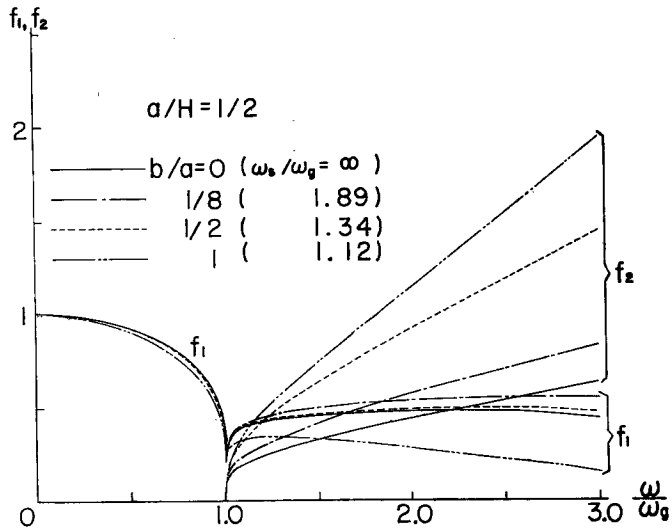


Fig. 3 Dynamic Effects of Horizontal Ground Coefficient.
(in the Direction of Minor Axis)

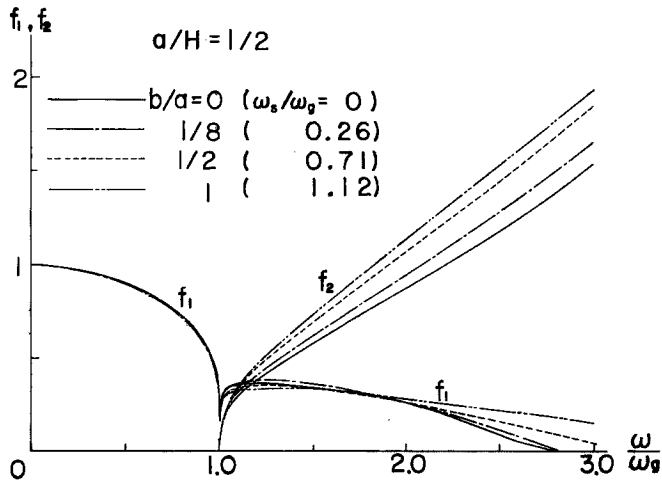


Fig. 4 Dynamic Effects of Horizontal Ground Coefficient.
(in the Direction of Major Axis)

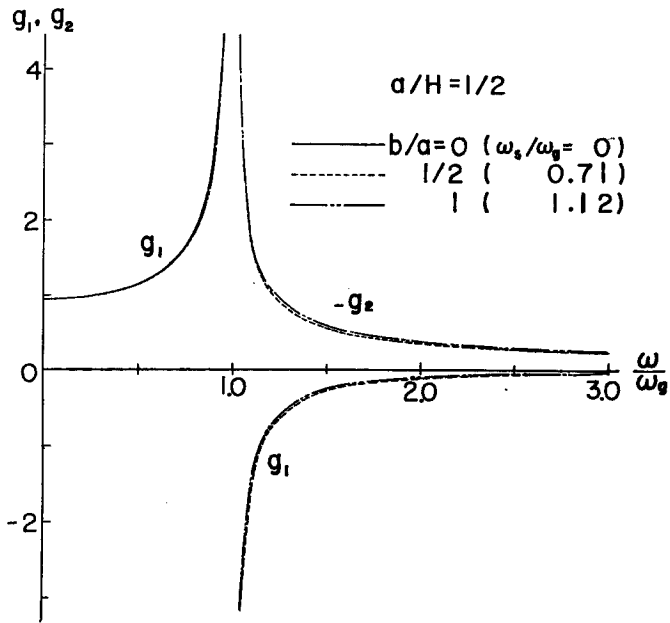


Fig. 5 Dynamic Effects of Horizontal Earth Pressure (in the Direction of Minor Axis)

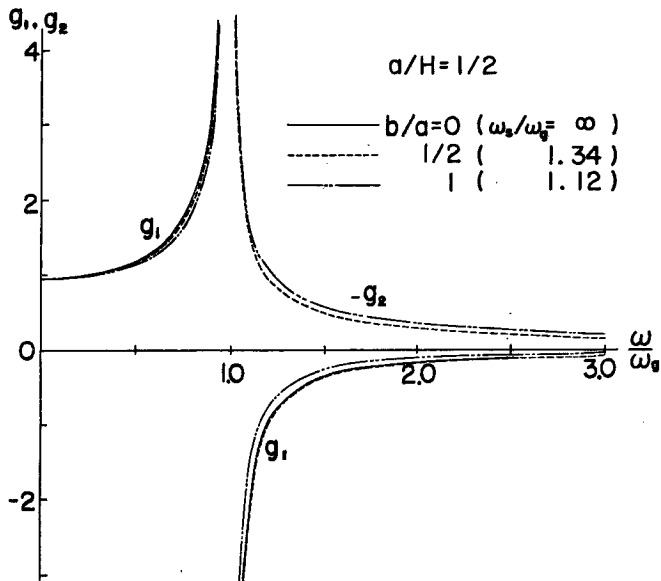


Fig. 6 Dynamic Effects of Horizontal Earth pressure (in the Direction of Major Axis)

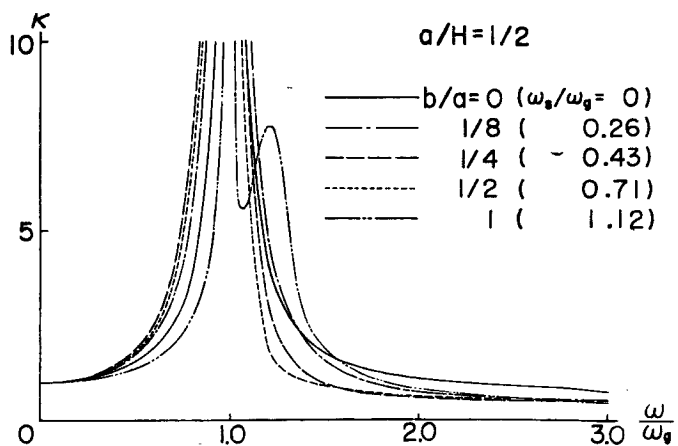


Fig. 7 Frequency Response Curves
(in the Direction of Minor Axis)

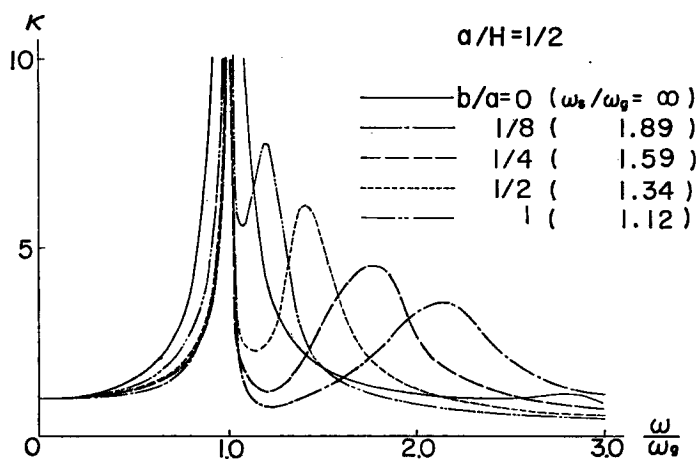


Fig. 8 Frequency Response Curves
(in the Direction of Major Axis)

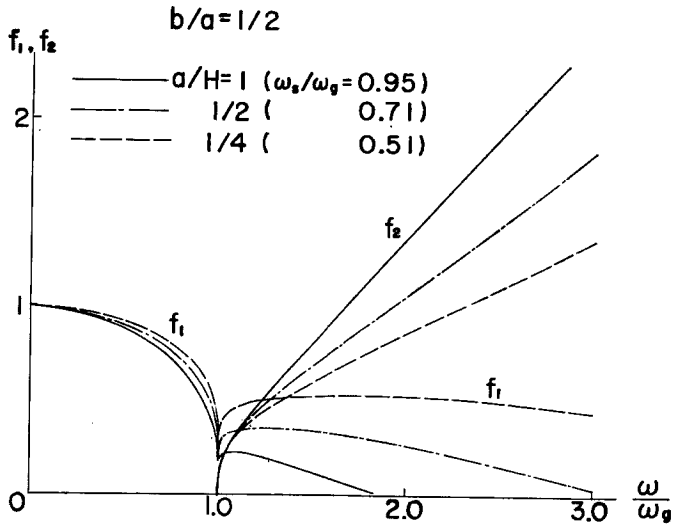


Fig. 9 Dynamic Effects of Horizontal Ground Coefficient (in the Direction of Minor Axis)

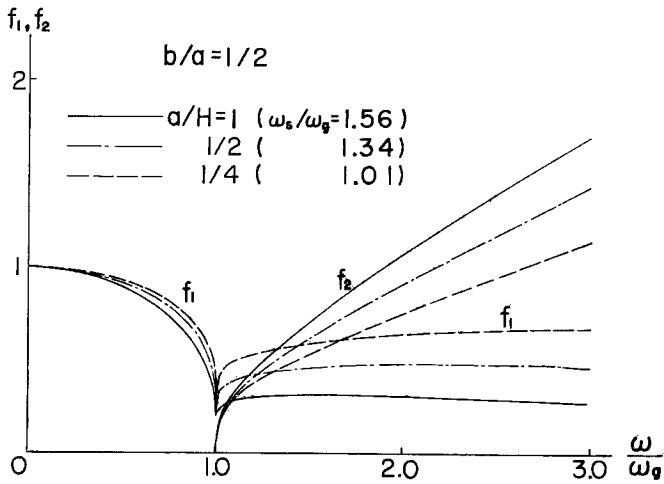


Fig. 10 Dynamic Effects of Horizontal Ground Coefficient (in the Direction of Major Axis)

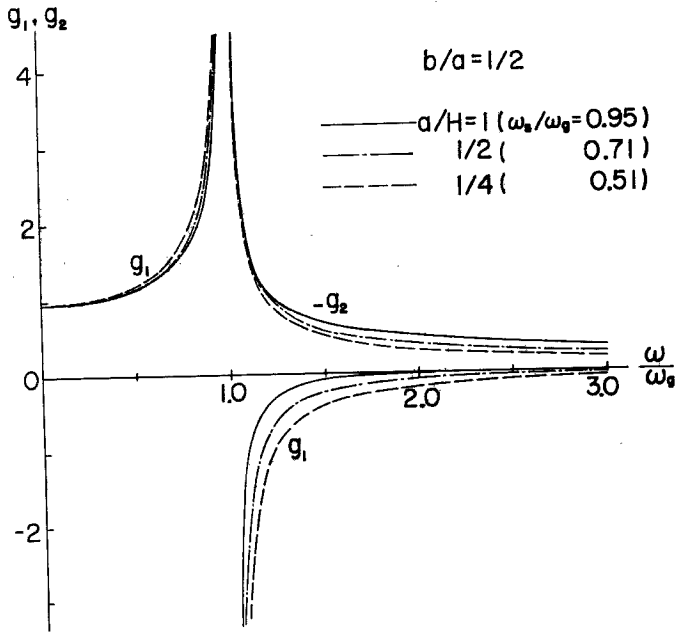


Fig. 11 Dynamic Effects of Horizontal Earth Pressure (in the Direction of Minor Axis)

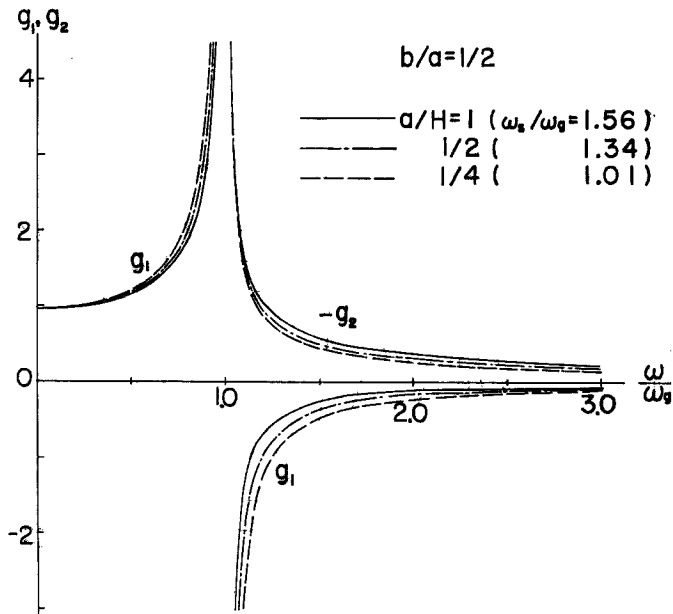


Fig. 12 Dynamic Effects of Horizontal Earth Pressure (in the Direction of Major Axis)

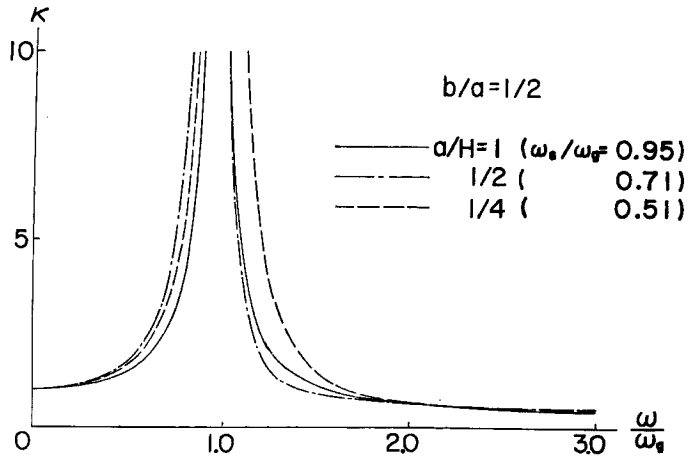


Fig. 13 Frequency Response Curves
(in the Direction of Minor Axis)

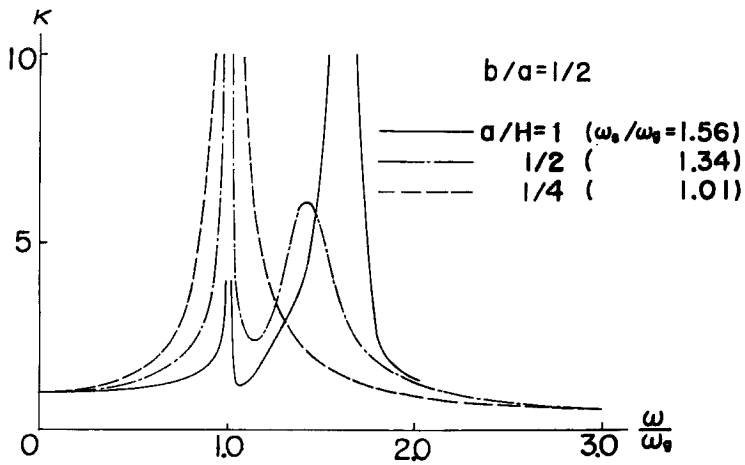


Fig. 14 Frequency Response Curves
(in the Direction of Major Axis)

a/H を変化させたとき、Fig. 9 においてばねの剛さの影響は剛基礎体の底面よりの高さ、すなわち根入長 H に大きく依存することがわかる。振動数の増大とともに実数部 f_1 は徐々に減少するが、当然のことながら根入れが浅くなると側圧によるばねの剛さの減少の割合が一層激しくなり、ついには負の値をとるようになる。しかしこの場合は虚数部 f_2 が振動数に比例して飛躍的に増大することから、 f_1+if_2 は減衰効果が支配的になり、その絶対値 $|f_1+if_2|$ も f_2 に依存することになる。この傾向は根入れの浅い場合、すなわち表層の厚さの小さい場合ほど著しい。ところが Fig. 10 のように長軸方向に振動するときは $\omega > \omega_g$ では実数部 f_1 はほぼ一定の値を保つが、減衰を示す f_2 は ω/ω_g に比例的に増大する。また f_1 がより大きい場合には、 f_2 がより小さくなる傾向は Fig. 9 の場合と同様である。

このことからして、いずれにしても短軸方向に振動するときは実数部 f_1 は負の値になる場合もでてくるが、このときは減衰 f_2 が非常に大きく効いてくることが知られる。したがってこの傾向が著しいほど位相差 $\tan^{-1}(f_2/f_1)$ が $\pi/2$ に近い値になり、 f_1+if_2 は振動減衰としての効果を持つてくることになる。

一方振動土圧の動的効果の程度は Fig. 11, Fig. 12 を見るかぎり、短軸・長軸方向の振動において、その差異はそれほど顕著ではないが、実数部 q_1 はその絶対値において H が大なるほど大きく、虚数部 g_2 はその絶対値は H が大なるほど小さくなる。このことからして、根入れが深いほど位相差 $\tan^{-1}(g_2/g_1)$ が小さくなり土圧の効果が大きくなることと推察される。3. の(a) の場合と同様に表層の共振 $\omega = \omega_g$ を過ぎると急激に g_1, g_2 の絶対値は小さくなり、 ω の増大につれてほぼ一定の値に近づく。これらの f_1+if_2, g_1+ig_2 の値を用いると応答倍率 κ の値は Fig. 13, Fig. 14 のように図示される。

短軸方向の振動の場合は $\omega_s < \omega_g$ のため ω_s によるピークは現われず、 $\omega = \omega_g$ では表層の共振による影響を一層高めることに寄与するが、このような状態は表層の影響を受けやすい板の応答と類似している。しかし $\omega = \omega_g$ での共振が非常に大きいにもかかわらず $\omega > \omega_g$ では急速に小さくなり、ただちに一定の値に近づくところは a/H が一定とした場合の応答とかなり異っている。

次に長軸方向の振動では H が大なるほど ω_s が小さくなり、 $\omega = \omega_g$ での共振を大きくするが、 H が小さくなるほど表層の共振の影響が少なくなり、 ω が ω_s の近傍できわめて大きな共振を起す。これは a/H が小なるにつれてロッキングのばね定数 k_r のみが効いてきて、表層による側圧の効果が小さくなることを意味しているものといえよう。このように根入れの浅い基礎の場合は基礎がその応答に大きな影響を及ぼすことになる。かくして、基礎体の断面が同一のときでもその根入れの大小によって応答がかなり異なることを知る。なお本研究での数値計算にあたっては京都大学電子計算機 KDC-II を使用した。

4. 結 言

以上の理論解析およびその数値計算結果からして、地中に埋設された剛な基礎体はその根入長によって応答が異なることは、田治見教授による断面が円形の場合の解析¹⁾からも知られるが、著者等はそれのみならず断面が円→楕円→板の場合と変化したときの応答もまたそれぞれ異なることを示した。前者の取扱いは断面形を一定として根入長に着目したものであるから、これは側圧が基礎体に及ぼす影響つまり表層の影響を調べるのが主眼である。これに対して根入長を一定として断面の差異に着目した後者の取扱い方は、結局基礎の支持機構が基礎体の応答に及ぼす影響を調べるのが主眼であって、本研究の結論としては次のように要約される。

- (a) 円形以外の断面形状をもつ剛基礎体は、振動の方向によって全く異なった応答を示す。
- (b) 短軸方向に振動するときは、その断面形が扁平なほど、またその根入れが浅いほど側圧の持つ減衰効果が増大する。
- (c) 単位長当りの振動土圧は、断面形状の差異による一定の傾向はないが、根入れが深くなると大きくなる。
- (d) 構造物の固有振動数が表層の固有振動数より小さいときは、入力振動数と構造物の固有振動数が一致しても共振は起らないが、構造物の固有振動数が表層の固有振動数より大きいときは、入力振動数が

構造物の固有振動数に対応したところで共振が起る。

(e) 根入れの浅い楕円形断面の基礎体が長軸方向の振動をうけるときは、当然のことながら表層の影響は薄れるが、基盤の条件によっては表層の共振以外のところで非常に大きな共振が起る可能性がある。

以上が半無限弾性体中に埋設された剛な楕円柱が長軸または短軸方向に振動する場合の理論解析およびその数値計算結果であったが、本解析においては楕円が扁平になってきても基礎体の剛性を無限に大きいとしてきたことは若干問題もあると思われる。また本理論解析にあたって変位があまり大きくなると、境界条件等が完全には満足されない点もでてくるが、このような半無限弾性体の振動を取り扱うときは限られた解しか知られていないので、それはやむを得ないことである。今後はこのような点をも考慮して、さらに任意方向より外力を受けた場合の埋設された楕円柱の応答解析を進めていくつもりである。

参 考 文 献

- 1) 田治見 宏：深い基礎を有する構造物の地震応答について，日本地震工学シンポジウム（1966）講演集，1966，10，pp. 255—260.
- 2) 小坪清真：楕円形水中橋脚に働く地震力，九大工学集報，第37巻，第3号，昭39，pp. 196—202.
- 3) McLachlan, N. W. : Theory and Application of Mathieu Functions, Dover, 1964.
- 4) Timoshenko, S. and Goodier, J. N. : Theory of Elasticity, McGraw-hill, 1951, pp. 366—372.