

# 長方形基礎の Dynamical Ground Compliance (その 2)

——基盤上に弾性層のある場合——

小堀 鐸二・南井良一郎・鈴木 有

## DYNAMICAL GROUND COMPLIANCE OF RECTANGULAR FOUNDATION ON AN ELASTIC STRATUM OVER A SEMI-INFINITE RIGID MEDIUM (PART 2)

By *Takuji KOBORI, Ryoichiro MINAI and Tamotsu SUZUKI*

### Synopsis

At the first step to investigate the dynamical properties of the ground surrounding structures which is considered as a stratified medium, we try to obtain, in this paper, the analytical and numerical expressions of "Dynamical Ground Compliance" about an elastic stratum over a semi-infinite rigid medium, using the method based on the three-dimensional elastic wave propagation theory as in the previous paper. The distinguished characters different from the case of a semi-infinite elastic medium are pointed out as follows; (1) there are three kinds of resonant frequency which include the natural frequencies of equivalent elastic rod with the same length as the depth of a stratum, (2) the diffusive energy is extremely small or zero in the range of low frequency.

### 1. ま え が き

前報では等質等方な半無限弾性地盤を対象とし、その表面にのる剛体長方形基礎に種々の加振力が作用する場合の基礎の変位応答を弾性波動論から求め、時間に関する Fourier 変換領域においてとった加振方向の変位応答と加振力との比を "Dynamical Ground Compliance" と定義し、これによって構造物の周辺地盤という意味での半無限弾性地盤の動特性を概括的に表現しようとした。

ところが、現実の周辺地盤は一樣な媒質で構成されていると見做される場合の他に、層を成して存在すると考えられる場合も多い。構造物底面の寸法に比べて表層が浅い場合には、層の存在による媒質の不連続性や境界面での波動の反射や透過現象の影響を受けて、一樣な媒質の地盤のときとはかなり異なった動特性を示すことが予想される。

本研究は、このような層を成す地盤の動特性を理論的に解明する第一段階として、半無限の剛な基盤上に一樣な厚さの弾性体の表層がのる場合を扱い、その表面上の剛体長方形基礎に加振力が作用したときの基礎の変位応答を求めることにより、前報の半無限地盤の場合と同様な 3 次元的な扱いによる手法を用いて、このような地盤の動特性を表わす Dynamical Ground Compliance の解析的表現を誘導し、数値解を計算してその特性を明らかにしようとするものである。

円形基礎については、同じような問題の設定に対して R.N. Arnold・G.N. Bycroft・G.B. Warburton が既に部分的に研究を行っている。それは、基盤と表層との間に水平面内のすべりのみを許すという境界条件のもとに、垂直、水平および回転加振の場合を扱い、また完全に密着しているという条件のもとに捩れ加振の場合を扱ったもので、各場合の基礎の変位応答を表わす解析的表現を誘導し、垂直および捩れ加振

の場合のみ部分的に数値解を計算しているが、このような層を成す地盤の動特性が十分に解明されているとは言い難い。ここでは、構造物の基礎の形状として一般的な長方形基礎について、基礎と表層との間に水平面内のすべりのみを許すという彼等の採用した境界条件に、そこで完全に密着しているという条件のときをも加えて、垂直、水平および回転加振の場合を扱うことにする。後者の境界条件は前者に比べて拘束が強いから解の形はいっそう複雑になるが、現実の地盤の境界面における状態は後者の境界条件に近い場合が多いと考えられるので、ここではこの条件の場合の解析に主体をおいている。基礎寸法と層厚との相対的な関係によって、このような境界条件の差異が地盤の動特性にどのような影響を与えるか、あるいは前報で扱った半無限地盤との関係はどうか等についても考察を加える。一方、地盤の表面における基礎下の応力分布について、彼等は、同時に解析の対象とした半無限地盤のときの扱いを踏襲して半無限体に体する Boussinesq 分布を仮定しているが、ここでは前報と同じ仮定を採用する。なお、表層の下に剛な基礎を想定しているためその境界面で波動の完全反射が起こるので、地盤の表面にあたる自由表面での波動の完全反射を考え合わせると、共振現象の生じる可能性が考えられる。この現象と波動の逸散による減衰機構に注目しながら解析を進める。

## 2. 基礎方程式と解の誘導

半無限の剛な基礎上に、一様な厚さで平面的に無限の拡がりをもった等質等方性の弾性体の表層がのるという構成をもつ、Fig. 1 に示すような地盤を考える。その表面上の図に示すような断面の剛体長方形基礎に、垂直、水平および $y$ 軸まわりの回転方向の加振力が作用したときの振動問題を扱う。座標軸のとり方と基礎自重を考慮に入れないことは前報と同様である。

表層の3次元弾性体に関する運動方程式を出発点として、これに空間座標  $x$ ,  $y$  と時間座標  $t$  に関する

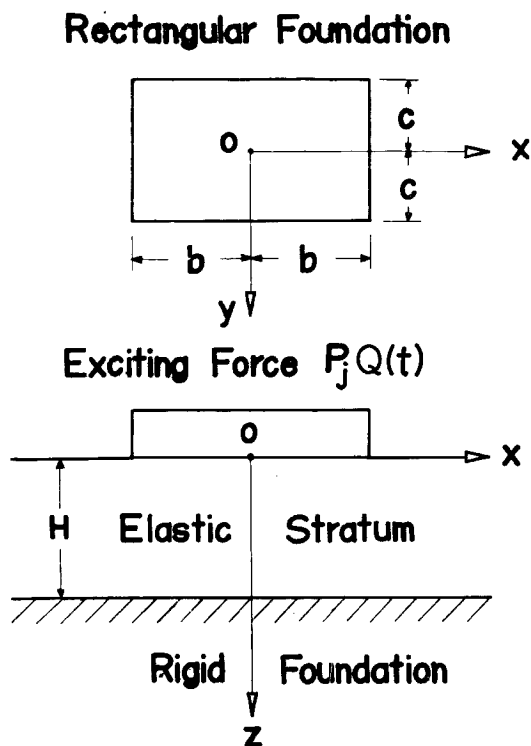


Fig. 1 Formulation of problem.

三重 Fourier 変換を導入しその解を誘導する過程は前報とほとんど変わらないが、この場合には表層の層厚が有限であるから、 $z$  の増加とともに指数関数的に増大する項を最初から除いておくことのできないところが異なる。したがって、前報 (2.13) 式および (2.17) 式に  $e^{+\alpha_1 z}$  および  $e^{+\alpha_2 z}$  を含む項がそれぞれ加わり、最終的には前報の2倍の6個の未定常数が含まれることになる。ここでは、詳細は省略して誘導された解の結果のみを記すに止める。

<dilation>

$$A = \mathcal{F}^{-3}[A_1 e^{-\alpha_1 z} + A_2 e^{+\alpha_1 z}] \dots\dots\dots (2.1)$$

<変位成分>

$$\begin{aligned} \{u, v, w\} = \mathcal{F}^{-3} & \left[ \{-i\beta Y_1(z), -i\gamma Y_1(z), \alpha_1 Y_2(z)\} + \{B_1, C_1, \frac{i}{\alpha_2}(\beta B_1 + \gamma C_1)\} e^{-\alpha_2 z} \right. \\ & \left. + \{B_2, C_2, -\frac{i}{\alpha_2}(\beta B_2 + \gamma C_2)\} e^{+\alpha_2 z} \right] \dots\dots\dots (2.2) \end{aligned}$$

<応力成分>

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = -\mu \mathcal{F}^{-3} & \left[ -2i\alpha_1 \beta Y_2(z) + \frac{1}{\alpha_2} \{(\beta^2 + \alpha_2^2) B_1 + \beta \gamma C_1\} e^{-\alpha_2 z} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\alpha_2} \{(\beta^2 + \alpha_2^2) B_2 + \beta \gamma C_2\} e^{+\alpha_2 z} \right] \dots\dots\dots (2.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = -\mu \mathcal{F}^{-3} & \left[ -2i\alpha_1 \gamma Y_2(z) + \frac{1}{\alpha_2} \{\beta \gamma B_1 + (\gamma^2 + \alpha_2^2) C_1\} e^{-\alpha_2 z} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\alpha_2} \{\beta \gamma B_2 + (\gamma^2 + \alpha_2^2) C_2\} e^{+\alpha_2 z} \right] \dots\dots\dots (2.4) \end{aligned}$$

$$\sigma_z = -\mu \mathcal{F}^{-3} [(2\alpha_2^2 + \kappa^2) Y_1(z) + 2i(\beta B_1 + \gamma C_1) e^{-\alpha_2 z} + 2i(\beta B_2 + \gamma C_2) e^{+\alpha_2 z}] \dots\dots\dots (2.5)$$

<地盤の表面  $z=0$  上での応力成分>

$$\tau_{xz} \Big|_{z=0} = -\mu \mathcal{F}^{-3} \left[ -\frac{2i\alpha_1 \beta}{h^2} (A_1 - A_2) + \frac{1}{\alpha_2} \{(\beta^2 + \alpha_2^2)(B_1 - B_2) + \beta \gamma (C_1 - C_2)\} \right] \dots\dots (2.6)$$

$$\tau_{yz} \Big|_{z=0} = -\mu \mathcal{F}^{-3} \left[ -\frac{2i\alpha_1 \gamma}{h^2} (A_1 - A_2) + \frac{1}{\alpha_2} \{\beta \gamma (B_1 - B_2) + (\gamma^2 + \alpha_2^2)(C_1 - C_2)\} \right] \dots\dots (2.7)$$

$$\sigma_z \Big|_{z=0} = -\mu \mathcal{F}^{-3} \left[ \frac{2\alpha_2^2 + \kappa^2}{h^2} (A_1 + A_2) + 2i \{ \beta (B_1 + B_2) + \gamma (C_1 + C_2) \} \right] \dots\dots\dots (2.8)$$

ここに、

$$\begin{cases} Y_1(z) = \frac{A_1 e^{-\alpha_1 z} + A_2 e^{+\alpha_1 z}}{h^2}, & Y_2 = \frac{A_1 e^{-\alpha_1 z} - A_2 e^{+\alpha_1 z}}{h^2} \dots\dots\dots (2.9) \\ A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2; \text{境界条件より定まる未定常数} \end{cases}$$

なお、他の記号については前報の 2. を参照のこと。以下の解析においても、前報で使用した記号は改め定義せずに使用する場合が多いことを断っておく。

### 3. Ground Compliance の解析的表現

#### 3. 1. 境界条件の導入

##### 3. 1. 1. $z=H$ (基盤と表層との境界面) における境界条件

表層と基盤との間の境界条件に関して

$$\begin{cases} (1) w = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \text{水平面内のすべりのみ許す場合} \\ (2) u = v = w = 0 \quad ; \quad \text{完全に密着している場合} \end{cases} \dots\dots\dots (3.1)$$

という二つの理想的な状態に分け、 $j=1$  および  $j=2$  でそれぞれの場合を表記する。そして、境界条件の差異が地盤の動特性に及ぼす影響について、基礎の寸法と層厚との相対的な関係を変え、前報で得られた半無限地盤の場合 ( $j=0$  で表記) の結果との比較をも行いながら検討する。この境界条件によって6個の未

定常数のうち3個が決まることになるので、ここでは  $A_2, B_2, C_2$  を  $A_1, B_1, C_1$  で表わすことにする。

(i)  $j=1$  の場合

変位成分の解 (2.2) 式および応力成分の解 (2.3), (2.4) 式に  $z=H$  を代入して,  $w=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$  とおけば,

$$\begin{cases} \alpha_1 Y_2(H) + \frac{i}{\alpha_2} (\beta B_1 + \gamma C_1) e^{-\alpha_2 H} - \frac{i}{\alpha_2} (\beta B_2 + \gamma C_2) e^{+\alpha_2 H} = 0 \\ -2i\alpha_1 \beta Y_2(H) + \frac{1}{\alpha_2} \left\{ (\beta^2 + \alpha_2^2) B_1 + \beta \gamma C_1 \right\} e^{-\alpha_2 H} - \frac{1}{\alpha_2} \left\{ (\beta^2 + \alpha_2^2) B_2 + \beta \gamma C_2 \right\} e^{+\alpha_2 H} = 0 \cdots (3.2) \\ -2i\alpha_1 \gamma Y_2(H) + \frac{1}{\alpha_2} \left\{ \beta \gamma B_1 + (\gamma^2 + \alpha_2^2) C_1 \right\} e^{-\alpha_2 H} - \frac{1}{\alpha_2} \left\{ \beta \gamma B_2 + (\gamma^2 + \alpha_2^2) C_2 \right\} e^{+\alpha_2 H} = 0 \end{cases}$$

これを  $A_2, B_2$  および  $C_2$  について解くと,

$$A_2 = e^{-2\alpha_1 H} A_1, \quad B_2 = e^{-2\alpha_2 H} B_1, \quad C_2 = e^{-2\alpha_2 H} C_1 \cdots (3.3)$$

(ii)  $j=2$  の場合

変位成分の解 (2.2) 式に  $z=H$  を代入し  $u=v=w=0$  とおいて得られる三つの方程式から  $A_2, B_2, C_2$  を求めると,

$$\begin{cases} A_2 = \frac{e^{-\alpha_1 H}}{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha_1 \alpha_2} \left\{ -(\beta^2 + \gamma^2 + \alpha_1 \alpha_2) e^{-\alpha_1 H} A_1 - 2i h^2 e^{-\alpha_2 H} (\beta B_1 + \gamma C_1) \right\} \\ B_2 = \frac{e^{-\alpha_2 H}}{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha_1 \alpha_2} \left\{ -\frac{2i \alpha_1 \alpha_2 \beta}{h^2} e^{-\alpha_1 H} A_1 + (\beta^2 - \gamma^2 + \alpha_1 \alpha_2) e^{-\alpha_2 H} B_1 + 2\beta \gamma e^{-\alpha_2 H} C_1 \right\} \cdots (3.4) \\ C_2 = \frac{e^{-\alpha_2 H}}{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha_1 \alpha_2} \left\{ -\frac{2i \alpha_1 \alpha_2 \gamma}{h^2} e^{-\alpha_1 H} A_1 + 2\beta \gamma e^{-\alpha_2 H} B_1 + (-\beta^2 + \gamma^2 + \alpha_1 \alpha_2) e^{-\alpha_2 H} C_1 \right\} \end{cases}$$

### 3. 1. 2. $z=0$ (表層の表面) における境界条件

加振力の型に応じた地盤の表面における境界条件については、半無限地盤の場合と同一の仮定をここでも採用するので、前報 3.1. の記述がこの場合にもそのまま成立つことを記して詳細は省略する。ただし、振れ加振の場合は解析が極めて複雑になるのでここでは扱わない。

### 3. 2. 振動数方程式とその解

地盤の表面  $z=0$  上の応力成分  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  をすべて零とおき、表面における応力成分の解 (2.6) ~ (2.8) 式に代入すると,

$$\begin{cases} -\frac{2i\alpha_1 \beta}{h^2} (A_1 - A_2) + \frac{1}{\alpha_2} \left\{ (\beta^2 + \alpha_2^2) (B_1 - B_2) + \beta \gamma (C_1 - C_2) \right\} = 0 \\ -\frac{2i\alpha_1 \gamma}{h^2} (A_1 - A_2) + \frac{1}{\alpha_2} \left\{ \beta \gamma (B_1 - B_2) + (\gamma^2 + \alpha_2^2) (C_1 - C_2) \right\} = 0 \cdots (3.5) \\ \frac{2\alpha_2^2 + \kappa^2}{h^2} (A_1 + A_2) + 2i \left\{ \beta (B_1 + B_2) + \gamma (C_1 + C_2) \right\} = 0 \end{cases}$$

(i)  $j=1$  の場合

(3.3) 式の関係を (3.5) 式に代入して  $A_2, B_2, C_2$  を消去すれば,

$$\begin{cases} -\frac{2i\alpha_1 \beta}{h^2} (1 - e^{-2\alpha_1 H}) A_1 + \frac{\beta^2 + \alpha_2^2}{\alpha_2} (1 - e^{-2\alpha_2 H}) B_1 + \frac{\beta \gamma}{\alpha_2} (1 - e^{-2\alpha_2 H}) C_1 = 0 \\ -\frac{2i\alpha_1 \gamma}{h^2} (1 - e^{-2\alpha_1 H}) A_1 + \frac{\beta \gamma}{\alpha_2} (1 - e^{-2\alpha_2 H}) B_1 + \frac{\gamma^2 + \alpha_2^2}{\alpha_2} (1 - e^{-2\alpha_2 H}) C_1 = 0 \cdots (3.6) \\ \frac{2\alpha_2^2 + \kappa^2}{h^2} (1 + e^{-2\alpha_1 H}) A_1 + 2i\beta (1 + e^{-2\alpha_2 H}) B_1 + 2i\gamma (1 + e^{-2\alpha_2 H}) C_1 = 0 \end{cases}$$

$A_1, B_1, C_1$  がともに零ではないという条件から、その係数のつくる行列式を零とおいて,

$$F_1(\beta, \gamma) \equiv \{2(\beta^2 + \gamma^2) - \kappa^2\} \coth \alpha_1 H - 4\alpha_1 \alpha_2 (\beta^2 + \gamma^2) \coth \alpha_2 H = 0 \cdots (3.7)$$

ここで、前報 (3.12) 式および (3.13) 式の変数変換と無次元量を導入すれば,

$$F_1(\xi) \equiv (2\xi^2 - 1)^2 \coth(\sqrt{\xi^2 - n^2} a_1) - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - n^2} \sqrt{\xi^2 - 1} \coth(\sqrt{\xi^2 - 1} a_1) = 0 \dots (3.8)$$

ここに,

$$a_1 = \kappa H = \frac{\omega}{c_2} H = a_0 r, \quad a_0 = \kappa b = \frac{\omega}{c_2} b, \quad r = \frac{H}{b} \dots (3.9)$$

(3.7) 式または (3.8) 式はこの場合の振動数方程式で,  $F(\beta, \gamma)$  または  $F_1(\xi)$  は一般化された Rayleigh function にあたり, 両面自由な無限板の振動数方程式と一致する。

(ii)  $j=2$  の場合

$$A_1 - A_2 = A, \quad B_1 - B_2 = B, \quad C_1 - C_2 = C \dots (3.10)$$

とおき (3.4) 式に代入して  $A_2, B_2, C_2$  を消去し,  $A_1, B_1, C_1$  を  $A, B, C$  について解けば,

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{2A_1} \left[ \left\{ (\beta^2 + \gamma^2) \sinh \alpha_2 H - \alpha_1 \alpha_2 \cosh \alpha_2 H \right\} e^{+\alpha_1 H} A - i h^2 (\beta B + \gamma C) \right] \cosh \alpha_2 H \\ B_1 = \frac{1}{2A_1} \left[ -\frac{i \alpha_1 \alpha_2 \beta}{h^2} \cosh \alpha_2 H \cdot A + \left\{ (\beta^2 \cosh \alpha_2 H + \gamma^2 \sinh \alpha_2 H) \cosh \alpha_1 H \right. \right. \\ \quad \left. \left. - \alpha_1 \alpha_2 \sinh \alpha_1 H \cdot \cosh \alpha_2 H \right\} e^{+\alpha_2 H} B + \beta \gamma \cosh \alpha_1 H \cdot C \right] \dots (3.11) \\ C_1 = \frac{1}{2A_1} \left[ -\frac{i \alpha_1 \alpha_2 \gamma}{h^2} \cosh \alpha_2 H \cdot A + \beta \gamma \cosh \alpha_1 H \cdot B \right. \\ \quad \left. + \left\{ (\beta^2 \sinh \alpha_2 H + \gamma^2 \cosh \alpha_2 H) \cosh \alpha_1 H - \alpha_1 \alpha_2 \sinh \alpha_1 H \cdot \cosh \alpha_2 H \right\} e^{+\alpha_2 H} C \right] \end{cases}$$

ここに,

$$A_1 = \{ (\beta^2 + \gamma^2) \cosh \alpha_1 H \cdot \sinh \alpha_2 H - \alpha_1 \alpha_2 \sinh \alpha_1 H \cdot \cosh \alpha_2 H \} \cosh \alpha_2 H \dots (3.12)$$

(3.5) 式に (3.4), (3.10) および (3.11) 式を代入して  $A, B, C$  のみの方程式をつくると,

$$\begin{cases} -\frac{2i \alpha_1 \beta}{h^2} A + \frac{1}{\alpha_2} \left\{ (\beta^2 + \alpha_2^2) B + \beta \gamma C \right\} = 0 \\ -\frac{2i \alpha_1 \gamma}{h^2} A + \frac{1}{\alpha_2} \left\{ \beta \gamma B + (\gamma^2 + \alpha_2^2) C \right\} = 0 \dots (3.13) \\ \frac{[\textcircled{1}]}{h^2} \cosh \alpha_2 H \cdot A - i [\textcircled{2}] (\beta B + \gamma C) = 0 \end{cases}$$

ここに,

$$\begin{cases} [\textcircled{1}] = \{ (2\alpha_2^2 + \kappa^2) \sinh \alpha_1 H \cdot \sinh \alpha_2 H + 2\alpha_1 \alpha_2 \} (\beta^2 + \gamma^2) \\ \quad - \alpha_1 \alpha_2 (2\alpha_2^2 + \kappa^2) \cosh \alpha_1 H \cdot \cosh \alpha_2 H \dots (3.14) \\ [\textcircled{2}] = \{ (2\alpha_2^2 + \kappa^2) + 2\alpha_1 \alpha_2 \sinh \alpha_1 H \cdot \sinh \alpha_2 H \\ \quad - 2(\beta^2 + \gamma^2) \cosh \alpha_1 H \cdot \cosh \alpha_2 H \} \cosh \alpha_2 H \end{cases}$$

$A, B, C$  がともに零ではないという条件から, その係数のつくる行列式を零とおいて,

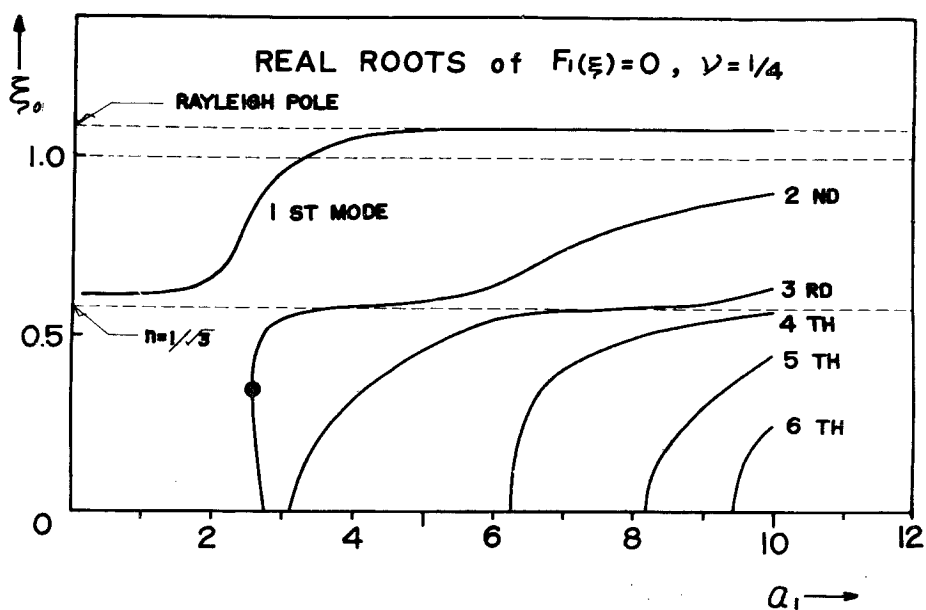
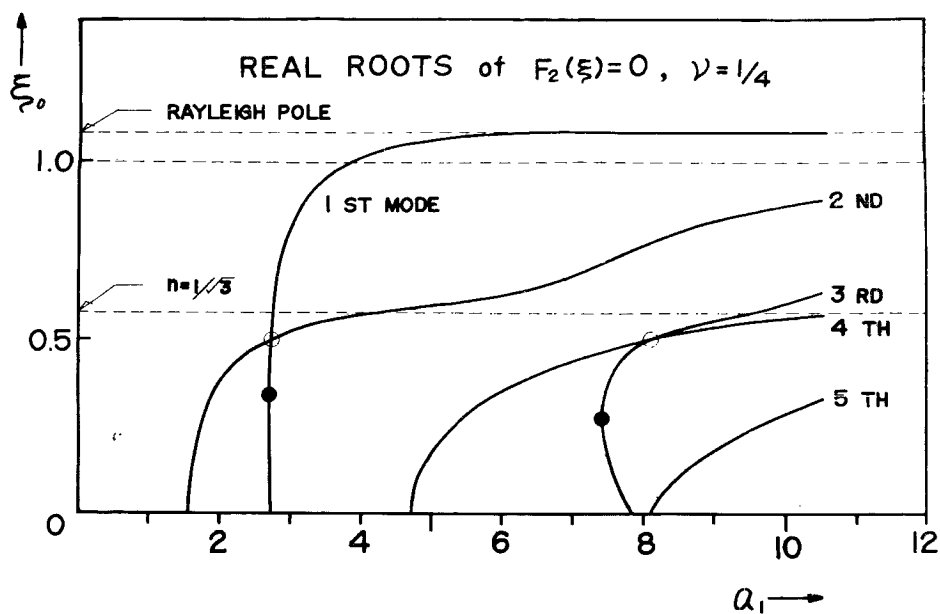
$$F_2(\beta, \gamma) \equiv 4\alpha_1 \alpha_2 (\beta^2 + \gamma^2) (2\alpha_2^2 + \kappa^2) \operatorname{cosech} \alpha_1 H \cdot \operatorname{cosech} \alpha_2 H - \alpha_1 \alpha_2 \{ 4(\beta^2 + \gamma^2)^2 \\ + (2\alpha_2^2 + \kappa^2)^2 \} \coth \alpha_1 H \cdot \coth \alpha_2 H + (\beta^2 + \gamma^2) \{ 4\alpha_1^2 \alpha_2^2 + (2\alpha_2^2 + \kappa^2)^2 \} = 0 \dots (3.15)$$

あるいは,

$$F_2(\xi) \equiv 4\xi^2 (2\xi^2 - 1) \sqrt{\xi^2 - n^2} \sqrt{\xi^2 - 1} \operatorname{cosech}(\sqrt{\xi^2 - n^2} a_1) \cdot \operatorname{cosech}(\sqrt{\xi^2 - 1} a_1) \\ - \{ 4\xi^4 + (2\xi^2 - 1)^2 \} \sqrt{\xi^2 - n^2} \sqrt{\xi^2 - 1} \coth(\sqrt{\xi^2 - n^2} a_1) \cdot \coth(\sqrt{\xi^2 - 1} a_1) \\ + \xi^2 \{ 4(\xi^2 - n^2)(\xi^2 - 1) + (2\xi^2 - 1)^2 \} = 0 \dots (3.16)$$

(3.15) 式または (3.16) 式はこの場合の振動数方程式で,  $F_2(\beta, \gamma)$  または  $F_2(\xi)$  は一般化された Rayleigh function になる。

(i) および (ii) の場合とも, 一般化された Rayleigh function において表層の層厚  $H \rightarrow \infty$  (i.e.  $a_1 \rightarrow \infty$ ) とすれば,

Fig. 2 Real Roots of  $F_1(\xi)=0$ ,  $\nu=1/4$ .Fig. 3 Real Roots of  $F_2(\xi)=0$ ,  $\nu=1/4$ .

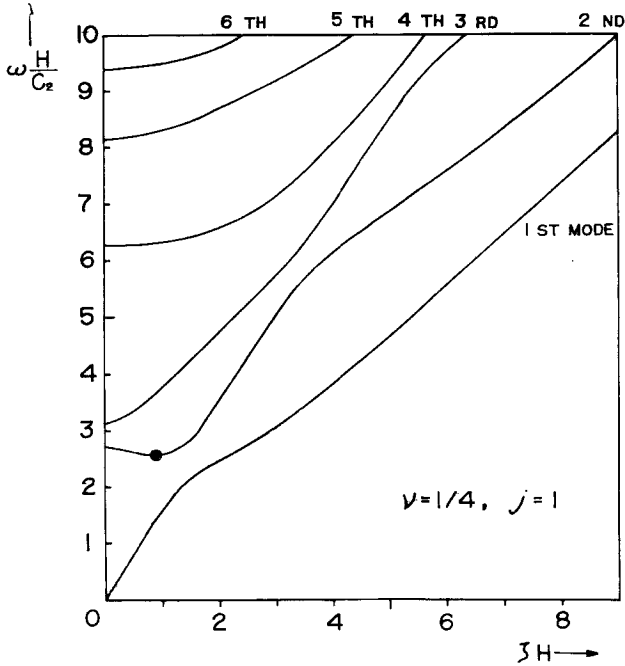


Fig. 4 Hamiltonian,  $\nu=1/4, j=1$ .

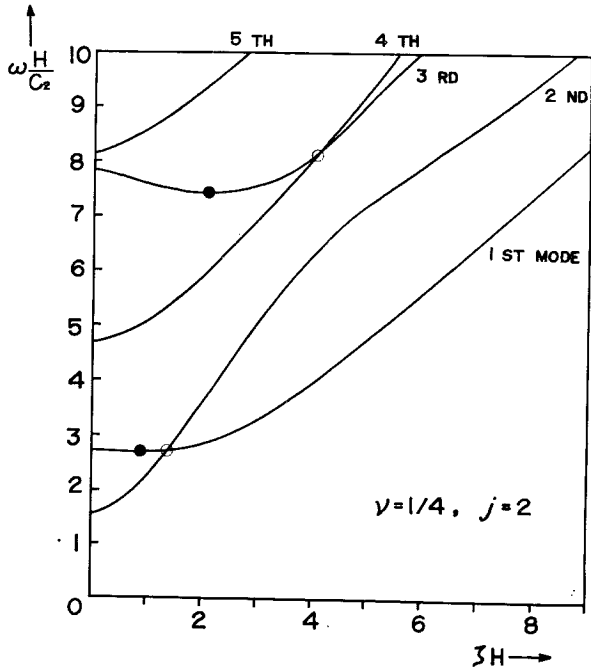
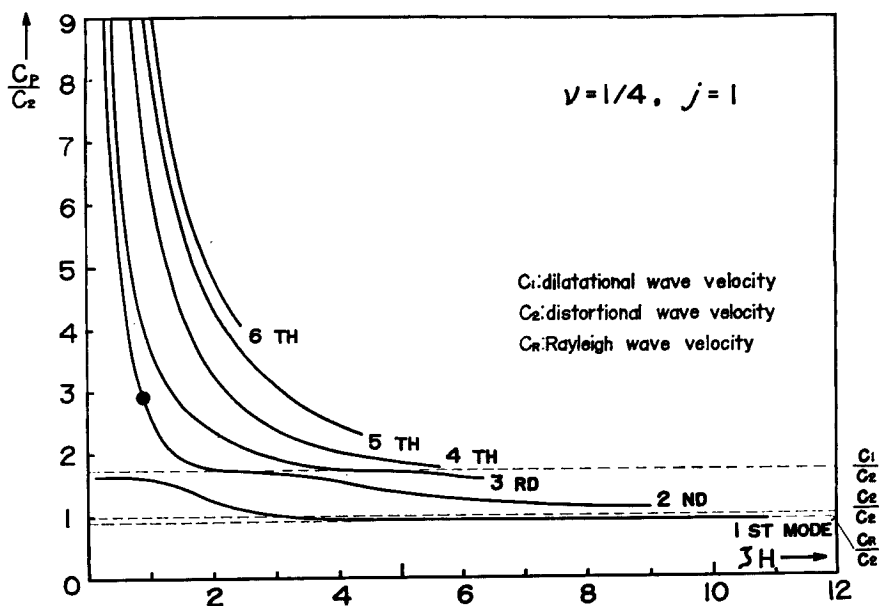
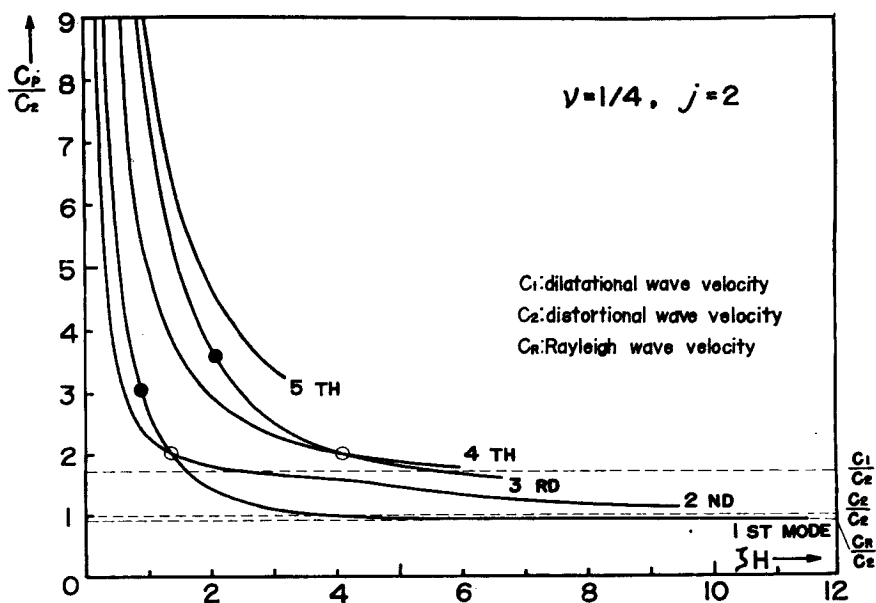


Fig. 5 Hamiltonian,  $\nu=1/4, j=2$ .

Fig. 6 Phase velocity,  $\nu=1/4, j=1$ .Fig. 7 Phase velocity,  $\nu=1/4, j=2$ .

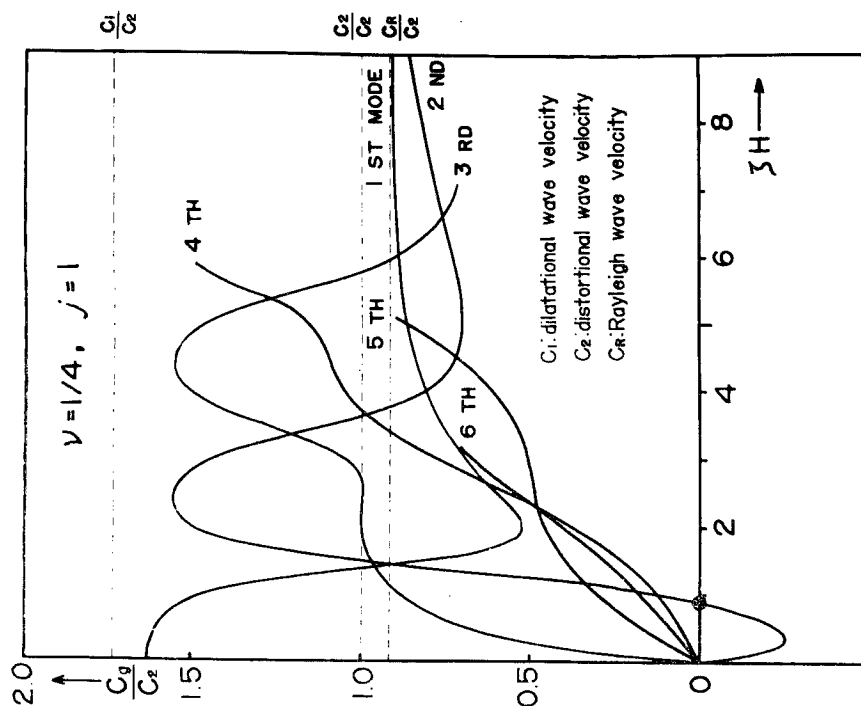


Fig. 9 Group velocity,  $\nu=1/4$ ,  $j=2$ .

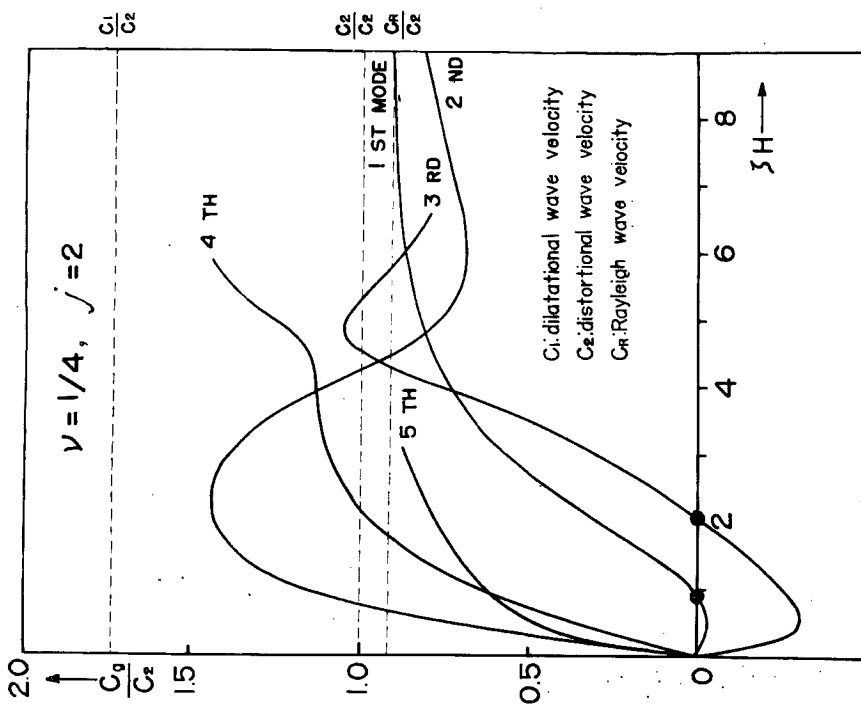


Fig. 8 Group velocity,  $\nu=1/4$ ,  $j=1$ .

$$\begin{cases} \lim_{H \rightarrow \infty} F_1(\beta, \gamma) = \lim_{H \rightarrow \infty} F_2(\beta, \gamma) = F(\beta, \gamma) & \text{; 前報 (3.11) 式} \\ \lim_{a_1 \rightarrow \infty} F_1(\xi) = \lim_{a_1 \rightarrow \infty} F_2(\xi) = F(\xi) & \text{; 前報 (3.14) 式} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3.17)$$

となって半無限地盤の場合の Rayleigh function に一致する。

$F_j(\xi)=0$  [ $j=1, 2$ ] は一般に有限個の実根をもっている、その根を  $\xi_{0n}$  [ $n=1, 2, \dots, N$ ;  $N$ は実根の総数] で表わすと、これは一般化された Rayleigh pole にあたり、表層の Poisson 比  $\nu$  と層厚  $H$  のみの関数となる。また  $\xi_{0n}$  は、各場合の free wave である一般化された Rayleigh 波 (表面波) の phase velocity と表層内を伝播する剪断波の速度との逆比を表わしている。Figs. 2, 3 は  $j=1$  および  $j=2$  の場合について、 $n^2=1/3$  ( $\nu=1/4$ ) のときの実根  $\xi_{0n}$  を、振動数  $\omega$  と層厚  $H$  の積に比例する無次元量  $a_1$  の関数として図示したものである。図中横軸に平行な点線は、上より半無限地盤の Rayleigh 波、剪断波および疎密波の速度にそれぞれ対応しているものである。次に、振動数  $\omega$  を wave number  $\xi$  の関数として表わしたものの (Hamiltonian) が Figs. 4, 5 である。これより各 mode に関する phase velocity  $c_p=\omega/\xi$  と group velocity  $c_g=d\omega/d\xi$  を計算することができる。Figs. 6, 7 は phase velocity を、また Figs. 8, 9 は group velocity をそれぞれ剪断波の速度  $c_2$  との比の形で、wave number と層厚との積  $\xi H$  を横軸にとって図示したものである。これらの図より次のことがわかる。

1. 層を成す地盤の場合には半無限地盤の場合と異なり、wave number あるいは波長によって free wave の速度が異なるという所謂分散 (dispersion) の現象がみられる。

2. 層厚と振動数の積  $a_1$  が大きくなると次第に実根の数が増し、現われる free wave の mode の数が多くなるが、基盤と表層がその境界面で密着している  $j=2$  のときには、実根が存在しないような、言い換えると free wave が現われないような  $a_1$  の領域  $0 < a_1 < a_{1cr}$  が存在する。ここに、 $a_{1cr}$  は層厚に等しい長さをもつ一端固定・他端自由な棒の剪断振動の最低次の固有振動数に対応する値である。

3. phase velocity および group velocity は、層厚と振動数の積が増加するとともに 1st mode のみが半無限地盤の Rayleigh 波の速度に近づき、その他の mode はすべて剪断波の速度に近づいていく。

4. 図に現われている  $a_1$  の範囲では、 $j=1$  の場合には1種類のまた  $j=2$  のときには2種類の重複根が存在する。それは、

(a) 同じ mode で重複根をもつ場合——その mode の group velocity が零になるとき

(図中●印の点)

(b) 異なる mode の間で重複根をもつ場合——それらの mode の phase velocity が等しくなるとき

(図中○印の点)

である。後者の場合の  $a_1$  の値はある mode の  $\xi_{0n}=0$  のときの  $a_1$  に一致している。例えば Fig. 3 において、1st および 2nd mode (または 3rd および 4th mode) の間に重複根が生じるときの  $a_1$  は、1st mode (または 5th mode) の  $\xi_{0n}=0$  における  $a_1$  の値に等しい。

5. Figs. 2, 3 において、各 mode の曲線が横軸と交わる点は  $\xi_{0n}=0$ 、すなわち wave number  $\xi=0$  の点で、波長が無限大の場合に相当する。この点における  $a_1$  の値から算出した振動数は、層厚に等しい長さで類似の境界条件をもった3次元の棒の振動の固有振動数になっている。すなわち、 $j=1$  のときには、一端固定・他端自由な棒の縦振動と両端自由な棒の剪断振動の固有振動数に一致しており、また  $j=2$  のときには、一端固定・他端自由な棒の縦振動および剪断振動の固有振動数に一致している。

### 3. 3. 地盤の表面における変位成分の解

(1) 垂直加振

(i)  $j=1$  の場合

前報の境界条件 (3.5)' 式を表面における応力成分の解 (2.6) ~ (2.8) 式に代入し、さらに (3.3) 式の関係を使って  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  のみの式をつくると、

$$\begin{cases} -\frac{2i\alpha_1\beta}{h^2}(1-e^{-2\alpha_1H})A_1 + \frac{\beta^2+\alpha_2^2}{\alpha_2}(1-e^{-2\alpha_2H})B_1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha_2}(1-e^{-2\alpha_2H})C_1 = 0 \\ -\frac{2i\alpha_1\gamma}{h^2}(1-e^{-2\alpha_1H})A_1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha_2}(1-e^{-2\alpha_2H})B_1 + \frac{\gamma^2+\alpha_2^2}{\alpha_2}(1-e^{-2\alpha_2H})C_1 = 0 \quad \dots (3.18) \\ \frac{2\alpha_2^2+\kappa^2}{h^2}(1+e^{-2\alpha_1H})A_1 + 2i\beta(1+e^{-2\alpha_2H})B_1 + 2i\gamma(1+e^{-2\alpha_2H})C_1 = K_V, \end{cases}$$

[K<sub>V</sub>; 前報 (3.16) 式]これを解いて  $A_1, B_1, C_1$  を求めれば,

$$\begin{cases} A_1 = \frac{(2\alpha_2^2+\kappa^2)h^2}{F_1(\beta, \gamma)} \cdot \frac{K_V}{1-e^{-2\alpha_1H}} \\ B_1 = \frac{2i\alpha_1\alpha_2\beta}{F_1(\beta, \gamma)} \cdot \frac{K_V}{1-e^{-2\alpha_2H}}, \quad [F_1(\beta, \gamma); (3.7)式] \dots\dots\dots (3.19) \\ C_1 = \frac{2i\alpha_1\alpha_2\gamma}{F_1(\beta, \gamma)} \cdot \frac{K_V}{1-e^{-2\alpha_2H}} \end{cases}$$

これを変位成分の解 (2.2)' 式に代入すれば, 表面  $z=0$  における変位成分の解を求めることができる。(ii)  $j=2$  の場合前報の境界条件 (3.5)' 式を (2.6) . ~ (2.8) 式に代入し, さらに (3.4), (3.10) および (3.11) 式を代入して  $A, B, C$  のみの方程式をつくると,

$$\begin{cases} -\frac{2i\alpha_1\beta}{h^2}A + \frac{1}{\alpha_2}\{(\beta^2+\alpha_2^2)B + \beta\gamma C\} = 0 \\ -\frac{2i\alpha_1\gamma}{h^2}A + \frac{1}{\alpha_2}\{\beta\gamma B + (\gamma^2+\alpha_2^2)C\} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.20) \\ \frac{[\textcircled{1}]}{h^2} \cosh\alpha_2H \cdot A - i[\textcircled{2}](\beta B + \gamma C) = A_1K_V, \quad [A_1; (3.12)式] \end{cases}$$

これを解いて  $A, B, C$  を求めれば,

$$\begin{cases} A = \frac{(2\alpha_2^2+\kappa^2)h^2}{F_2(\beta, \gamma)} \cdot \frac{A_1K_V}{\sinh\alpha_1H \cdot \sinh\alpha_2H \cdot \cosh\alpha_2H} \\ B = \frac{2i\alpha_1\alpha_2\beta}{F_2(\beta, \gamma)} \cdot \frac{A_1K_V}{\sinh\alpha_1H \cdot \sinh\alpha_2H \cdot \cosh\alpha_2H}, \quad [F_2(\beta, \gamma); (3.15)式] \dots\dots\dots (3.21) \\ C = \frac{2i\alpha_1\alpha_2\gamma}{F_2(\beta, \gamma)} \cdot \frac{A_1K_V}{\sinh\alpha_1H \cdot \sinh\alpha_2H \cdot \cosh\alpha_2H} \end{cases}$$

これより (3.11) 式および (3.4) 式を用いて  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$  を計算し, 変位成分の解 (2.2) 式に代入すれば, 表面  $z=0$  における変位成分の解を求めることができる。結果は,  $j=1$  および  $j=2$  の場合にさらに半無限地盤の場合 ( $j=0$ ) をも含めて同一の式で表示することができる。すなわち,

$$\begin{cases} u = \mathcal{F}^{-3} \left[ -\frac{i\beta}{F_j(\beta, \gamma)} W_j(\beta, \gamma) K_V \right] \\ v = \mathcal{F}^{-3} \left[ -\frac{i\gamma}{F_j(\beta, \gamma)} W_j(\beta, \gamma) K_V \right] \dots\dots\dots (3.22) \\ w = \mathcal{F}^{-3} \left[ -\frac{\alpha_1\kappa^2}{F_j(\beta, \gamma)} T_j(\beta, \gamma) K_V \right] \end{cases}$$

ここに,

$$\left\{ \begin{aligned} W_0(\beta, \gamma) &= (2\alpha_2^2 + \kappa^2) - 2\alpha_1\alpha_2, & W_1(\beta, \gamma) &= (2\alpha_2^2 + \kappa^2)\coth\alpha_1 H - 2\alpha_1\alpha_2\coth\alpha_2 H \\ W_2(\beta, \gamma) &= \{(2\alpha_2^2 + \kappa^2)(\beta^2 + \gamma^2) + 2\alpha_1^2\alpha_2^2\} + \alpha_1\alpha_2\{(2\alpha_2^2 + \kappa^2) + 2(\beta^2 + \gamma^2)\} \\ &\quad \cdot (\operatorname{cosech}\alpha_1 H \cdot \operatorname{cosech}\alpha_2 H - \coth\alpha_1 H \cdot \coth\alpha_2 H) \quad \dots\dots\dots (3.23) \\ T_0(\beta, \gamma) &= T_1(\beta, \gamma) = 1, & T_2(\beta, \gamma) &= (\beta^2 + \gamma^2)\coth\alpha_1 H - \alpha_1\alpha_2\coth\alpha_2 H \\ F_0(\beta, \gamma) &= F(\beta, \gamma); \text{前報 (3.11) 式} \end{aligned} \right.$$

$K_V$  の中に含まれている一定応力  $q_0 V$  を前報 (3.9) 式の関係を使って加振力の振巾  $P_V$  に変え、前報の三重 Fourier 逆変換の定義 (2.8) 式を適用すると、

$$\begin{aligned} u &= -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} i \frac{P_V}{2\pi\mu bc} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{F_j(\beta, \gamma)} W_j(\beta, \gamma) S(\beta, \gamma) \bar{Q}(\omega) e^{+i(\omega\beta + \gamma\gamma + t\omega)} d\beta d\gamma d\omega \\ &= \frac{P_V}{\pi^2\mu bc} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\beta}{F_j(\beta, \gamma)} W_j(\beta, \gamma) S(\beta, \gamma) \\ &\quad \cdot \sin x\beta \cdot \cos y\gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \quad \dots\dots\dots (3.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{P_V}{\pi^2\mu bc} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\gamma}{F_j(\beta, \gamma)} W_j(\beta, \gamma) S(\beta, \gamma) \\ &\quad \cdot \cos x\beta \cdot \sin y\gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \quad \dots\dots\dots (3.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= -\frac{P_V}{\pi^2\mu bc} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\alpha_1\kappa^2}{F_j(\beta, \gamma)} T_j(\beta, \gamma) S(\beta, \gamma) \\ &\quad \cdot \cos x\beta \cdot \cos y\gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega, \quad \dots\dots\dots (3.26) \\ &\quad [S(\beta, \gamma); \text{前報 (3.22) 式}] \end{aligned}$$

## (2) 水平加振

前報の境界条件 (3.6)' 式に基づき、上述の垂直加振の場合と同様にして未定常数を定めると、

(i)  $j=1$  の場合

$$\left\{ \begin{aligned} A_1 &= -\frac{2i\alpha_2\beta h^2}{F_1(\beta, \gamma)} \cdot \frac{\coth\alpha_2 H}{1 - e^{-2\alpha_1 H}} K_H \\ B_1 &= \frac{1}{\alpha_2 F_1(\beta, \gamma)} \cdot \frac{(2\alpha_2^2 + \kappa^2)(\gamma^2 + \alpha_2^2)\coth\alpha_1 H - 4\alpha_1\alpha_2\gamma^2\coth\alpha_2 H}{1 - e^{-2\alpha_2 H}} K_H \quad \dots\dots\dots (3.27) \\ C_1 &= -\frac{\beta\gamma}{\alpha_2 F_1(\beta, \gamma)} \cdot \frac{(2\alpha_2^2 + \kappa^2)\coth\alpha_1 H - 4\alpha_1\alpha_2\coth\alpha_2 H}{1 - e^{-2\alpha_2 H}} K_H \end{aligned} \right.$$

(ii)  $j=2$  の場合

$$\left\{ \begin{aligned} A &= -\frac{i\alpha_2\beta h^2}{F_2(\beta, \gamma)} [2(\beta^2 + \gamma^2) \cdot \coth\alpha_1 H \cdot \coth\alpha_2 H \\ &\quad - \{(2\alpha_2^2 + \kappa^2)\operatorname{cosech}\alpha_1 H \cdot \operatorname{cosech}\alpha_2 H + 2\alpha_1\alpha_2\}] K_H \\ B &= \frac{1}{\alpha_2 F_2(\beta, \gamma)} [\{(2\alpha_2^2 + \kappa^2)(\beta^2 + \gamma^2)(\gamma^2 + \alpha_2^2) + 4\alpha_1^2\alpha_2^2\gamma^2\} \\ &\quad - \alpha_1\alpha_2\{(2\alpha_2^2 + \kappa^2)(\gamma^2 + \alpha_2^2) + 4(\beta^2 + \gamma^2)\gamma^2\}\coth\alpha_1 H \cdot \coth\alpha_2 H \quad \dots (3.28) \\ &\quad + 2\alpha_1\alpha_2\{(\beta^2 + \gamma^2)(\gamma^2 + \alpha_2^2) + (2\alpha_2^2 + \kappa^2)\gamma^2\}\operatorname{cosech}\alpha_1 H \cdot \operatorname{cosech}\alpha_2 H] K_H \\ C &= -\frac{\beta\gamma}{\alpha_2 F_2(\beta, \gamma)} [\{(2\alpha_2^2 + \kappa^2)(\beta^2 + \gamma^2) + 4\alpha_1^2\alpha_2^2\} \\ &\quad - \alpha_1\alpha_2\{(2\alpha_2^2 + \kappa^2) + 4(\beta^2 + \gamma^2)\}\coth\alpha_1 H \cdot \coth\alpha_2 H \\ &\quad + 2\alpha_1\alpha_2\{(\beta^2 + \gamma^2) + (2\alpha_2^2 + \kappa^2)\}\operatorname{cosech}\alpha_1 H \cdot \operatorname{cosech}\alpha_2 H] K_H, \end{aligned} \right.$$

$[K_H; \text{前報 (3.24) 式}]$

これより地盤の表面における変位成分の解を求めると、 $j=0, 1$  および  $2$  の三つの場合がやはり同一の式で表示できて、

$$\begin{cases} u = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\gamma^2 F_j(\beta, \gamma) - \kappa^2 \alpha_2^2 \beta^2 D_j(\beta, \gamma)}{(\beta^2 + \gamma^2) \alpha_2 F_j(\beta, \gamma)} E_j(\beta, \gamma) K_H \right] \\ v = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\beta \gamma \{ F_j(\beta, \gamma) - \kappa^2 \alpha_2^2 D_j(\beta, \gamma) \}}{(\beta^2 + \gamma^2) \alpha_2 F_j(\beta, \gamma)} E_j(\beta, \gamma) K_H \right] \dots \dots \dots (3.29) \\ w = \mathcal{F}^{-1} \left[ i \frac{\beta \{ F_j(\beta, \gamma) + \kappa^2 G_j(\beta, \gamma) \}}{2(\beta^2 + \gamma^2) \alpha_2 F_j(\beta, \gamma)} K_H \right] \end{cases}$$

ここに

$$\begin{cases} D_0(\beta, \gamma) = 1, & D_1(\beta, \gamma) = \coth \alpha_1 H, \\ D_2(\beta, \gamma) = \{ (\beta^2 + \gamma^2) \coth \alpha_2 H - \alpha_1 \alpha_2 \coth \alpha_1 H \} \coth \alpha_2 H \\ E_0(\beta, \gamma) = 1, & E_1(\beta, \gamma) = \coth \alpha_2 H, & E_2(\beta, \gamma) = \tanh \alpha_2 H, \\ G_0(\beta, \gamma) = 2\alpha_2^2 + \kappa^2, & G_1(\beta, \gamma) = (2\alpha_2^2 + \kappa^2) \coth \alpha_1 H \dots \dots \dots (3.30) \\ G_2(\beta, \gamma) = (2\alpha_2^2 + \kappa^2) \{ (\beta^2 + \gamma^2) - \alpha_1 \alpha_2 \coth \alpha_1 H \cdot \coth \alpha_2 H \} \\ & + 2\alpha_1 \alpha_2 (\beta^2 + \gamma^2) \operatorname{cosech} \alpha_1 H \cdot \operatorname{cosech} \alpha_2 H \end{cases}$$

すなわち

$$u = \frac{P_H}{\pi^2 \mu b^2 c} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\gamma^2 F_j(\beta, \gamma) - \kappa^2 \alpha_2^2 \beta^2 D_j(\beta, \gamma)}{(\beta^2 + \gamma^2) \alpha_2 F_j(\beta, \gamma)} E_j(\beta, \gamma) S(\beta, \gamma) \\ \cdot \cos x \beta \cdot \cos y \gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \dots \dots \dots (3.31)$$

$$v = -\frac{P_H}{\pi^2 \mu b^2 c} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\beta \gamma \{ F_j(\beta, \gamma) - \kappa^2 \alpha_2^2 D_j(\beta, \gamma) \}}{(\beta^2 + \gamma^2) \alpha_2 F_j(\beta, \gamma)} E_j(\beta, \gamma) S(\beta, \gamma) \\ \cdot \sin x \beta \cdot \sin y \gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \dots \dots \dots (3.32)$$

$$w = -\frac{P_H}{\pi^2 \mu b^2 c} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\beta \{ F_j(\beta, \gamma) + \kappa^2 G_j(\beta, \gamma) \}}{2(\beta^2 + \gamma^2) \alpha_2 F_j(\beta, \gamma)} S(\beta, \gamma) \\ \cdot \sin x \beta \cdot \cos y \gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \dots \dots \dots (3.33)$$

### (3) 回転加振

垂直加振の場合の  $K_V$  のところに  $K_R$  [前報 (3.29) 式] を代入すれば (3.18) ~ (3.23) 式がそのまま成立つ。したがって、地盤の表面における変位成分の解は次式で表わされる。

$$u = \frac{3M_R}{\pi^2 \mu b^2 c} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\beta}{F_j(\beta, \gamma)} W_j(\beta, \gamma) \frac{S(\beta, \gamma)}{\sin \beta b} N(\beta b) \\ \cdot \cos x \beta \cdot \cos y \gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \dots \dots \dots (3.34)$$

$$v = -\frac{3M_R}{\pi^2 \mu b^2 c} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\gamma}{F_j(\beta, \gamma)} W_j(\beta, \gamma) \frac{S(\beta, \gamma)}{\sin \beta b} N(\beta b) \\ \cdot \sin x \beta \cdot \sin y \gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \dots \dots \dots (3.35)$$

$$w = -\frac{3M_R}{\pi^2 \mu b^2 c} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\alpha_1 \kappa^2}{F_j(\beta, \gamma)} T_j(\beta, \gamma) \frac{S(\beta, \gamma)}{\sin \beta b} N(\beta b) \\ \cdot \sin x \beta \cdot \cos y \gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega, \dots \dots \dots (3.36)$$

[ $N(\beta b)$ ; 前報 (3.30) 式]

### 3. 4. Dynamical Ground Compliance の解析的表現

前報 3. 4. で定義した “Dynamical Ground Compliance”，すなわち，時間に関して Fourier 変換された像空間における，あるいは time factor を  $e^{i\omega t}$  とおいたときの原空間における加振方向の変位応答と加振力との比について，ここで扱っている層を成す地盤に対する解析的表現を求める。加振方向の基礎の変位としては，前報 (3.47) 式に示す載荷面の地盤の変位をここでも代表的に採用する。前節で得られた表面における変位成分の解を表わす各式は，基礎と表層との境界条件  $j=1$  および  $j=2$  の場合に半無限地盤の場合  $j=0$  をも含めて同一の式で表示できたから，ここでもこの三つの場合を一つの式で表示することになると，Dynamical Ground Compliance の解析的表現は次のようになる。

#### (1) 垂直加振

$$\frac{w_0}{P_V e^{i\omega t}} = \frac{-1}{\pi^2 \mu b c} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha_1 \kappa^2}{F_j(\beta, \gamma)} T_j(\beta, \gamma) S(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \quad \dots\dots\dots (3.37)$$

(2) 水平加振

$$\frac{u_0}{P_H e^{i\omega t}} = \frac{1}{\pi^2 \mu b c} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma^2 F_j(\beta, \gamma) - \kappa^2 \alpha_2^2 \beta^2 D_j(\beta, \gamma)}{(\beta^2 + \gamma^2) \alpha_2 F_j(\beta, \gamma)} E_j(\beta, \gamma) S(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \quad \dots\dots\dots (3.38)$$

(3) 回転加振

$$\frac{\phi}{M_R e^{i\omega t}} = \frac{-3}{\pi^2 \mu b^3 c} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha_1 \kappa^2}{F_j(\beta, \gamma)} T_j(\beta, \gamma) N(\beta b) S(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \quad \dots\dots\dots (3.39)$$

以上の各式の二重無限積分のうち一方を有限積分になおすために、前報 (3.53) 式の変数変換を導入すると、

(1) 垂直加振

$$\frac{w_0}{P_V e^{i\omega t}} = \frac{-1}{\pi^2 \mu b c} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\kappa^2 \sqrt{\xi^2 - n^2 \kappa^2}}{\xi F_j(\xi)} T_j(\xi) S(\xi, \theta) d\theta d\xi \quad \dots\dots\dots (3.40)$$

(2) 水平加振

$$\frac{u_0}{P_H e^{i\omega t}} = \frac{1}{\pi^2 \mu b c} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\sin^2 \theta}{\xi \sqrt{\xi^2 - \kappa^2}} - \frac{\kappa^2 \sqrt{\xi^2 - \kappa^2}}{\xi F_j(\xi)} D_j(\xi) \cos^2 \theta \right] E_j(\xi) S(\xi, \theta) d\theta d\xi \quad \dots\dots\dots (3.41)$$

(3) 回転加振

$$\frac{\phi}{M_R e^{i\omega t}} = \frac{-3}{\pi^2 \mu b^3 c} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\kappa^2 \sqrt{\xi^2 - n^2 \kappa^2}}{\xi F_j(\xi)} T_j(\xi) N(b\xi \cos \theta) S(\xi, \theta) d\theta d\xi \quad \dots\dots\dots (3.42)$$

ここに、

$$\begin{cases} F_0(\xi) = F(\xi) \text{ および } S(\xi, \theta); \text{ 前報 (3.58) 式} \\ F_1(\xi) = (2\xi^2 - \kappa^2)^2 \coth(\sqrt{\xi^2 - n^2 \kappa^2} H) - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - n^2 \kappa^2} \sqrt{\xi^2 - \kappa^2} \coth(\sqrt{\xi^2 - \kappa^2} H) \\ F_2(\xi) = 4\xi^2 (2\xi^2 - \kappa^2) \sqrt{\xi^2 - n^2 \kappa^2} \sqrt{\xi^2 - \kappa^2} \operatorname{cosech}(\sqrt{\xi^2 - n^2 \kappa^2} H) \cdot \operatorname{cosech}(\sqrt{\xi^2 - \kappa^2} H) \\ \quad - \{4\xi^4 + (2\xi^2 - \kappa^2)^2\} \sqrt{\xi^2 - n^2 \kappa^2} \sqrt{\xi^2 - \kappa^2} \coth(\sqrt{\xi^2 - n^2 \kappa^2} H) \coth(\sqrt{\xi^2 - \kappa^2} H) \\ \quad + \xi^2 \{4(\xi^2 - n^2 \kappa^2)(\xi^2 - \kappa^2) + (2\xi^2 - \kappa^2)^2\} \quad \dots\dots\dots (3.43) \\ T_0(\xi) = T_1(\xi) = 1, \\ T_2(\xi) = \xi^2 \coth(\sqrt{\xi^2 - n^2 \kappa^2} H) - \sqrt{\xi^2 - n^2 \kappa^2} \sqrt{\xi^2 - \kappa^2} \coth(\sqrt{\xi^2 - \kappa^2} H) \\ D_0(\xi) = 1, \quad D_1(\xi) = \coth(\sqrt{\xi^2 - n^2 \kappa^2} H), \quad D_2(\xi) = \{\xi^2 \coth(\sqrt{\xi^2 - \kappa^2} H) \\ \quad - \sqrt{\xi^2 - n^2 \kappa^2} \sqrt{\xi^2 - \kappa^2} \coth(\sqrt{\xi^2 - n^2 \kappa^2} H)\} \cdot \coth(\sqrt{\xi^2 - \kappa^2} H) \\ E_0(\xi) = 1, \quad E_1(\xi) = \coth(\sqrt{\xi^2 - \kappa^2} H), \quad E_2(\xi) = \tanh(\sqrt{\xi^2 - \kappa^2} H) \end{cases}$$

さらに、解析に便利なように前報 (3.59) 式の変数変換を導入し式全体の無次元化を行うと、

(1) 垂直加振

$$\frac{w_0}{P_V e^{i\omega t}} \cdot b\mu = \frac{-1}{\pi^2 a_0 \frac{c}{b}} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\xi^2 - n^2}}{\xi F_j(\xi)} T_j(\xi) S(\xi, \theta) d\theta d\xi \quad \dots\dots\dots (3.44)$$

(2) 水平加振

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{P_H e^{i\omega t}} \cdot b\mu = & \frac{1}{\pi^2 a_0 \frac{c}{b}} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\sin^2 \theta}{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi F_j(\xi)} D_j(\xi) \cos^2 \theta \right] \\ & \cdot E_j(\xi) S(\xi, \theta) d\theta d\xi \quad \dots\dots\dots (3.45) \end{aligned}$$

(3) 回転加振

$$\frac{\phi}{M_R e^{i\omega t}} \cdot \frac{b^3 \mu}{3} = \frac{-1}{\pi^2 a_0 \frac{c}{b}} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\xi^2 - n^2}}{\xi F_j(\xi)} T_j(\xi) N(a_0 \xi \cos \theta) S(\xi, \theta) d\theta d\xi \quad \dots\dots\dots (3.46)$$

ここに,

$$\begin{cases}
 F_0(\xi) = F(\xi) \text{ および } S(\xi, \theta); \text{ 前報 (3.64) 式} \\
 F_1(\xi) = (2\xi^2 - 1)^2 \coth(\sqrt{\xi^2 - n^2} a_1) - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - n^2} \sqrt{\xi^2 - 1} \coth(\sqrt{\xi^2 - 1} a_1) \\
 F_2(\xi) = 4\xi^2 (2\xi^2 - 1) \sqrt{\xi^2 - n^2} \sqrt{\xi^2 - 1} \operatorname{cosech}(\sqrt{\xi^2 - n^2} a_1) \operatorname{cosech}(\sqrt{\xi^2 - 1} a_1) \\
 \quad - \{4\xi^4 + (2\xi^2 - 1)^2\} \sqrt{\xi^2 - n^2} \sqrt{\xi^2 - 1} \coth(\sqrt{\xi^2 - n^2} a_1) \coth(\sqrt{\xi^2 - 1} a_1) \\
 \quad + \xi^2 \{4(\xi^2 - n^2)(\xi^2 - 1) + (2\xi^2 - 1)^2\} \dots\dots\dots (3.47) \\
 T_0(\xi) = T_1(\xi) = 1, \\
 T_2(\xi) = \xi^2 \coth(\sqrt{\xi^2 - n^2} a_1) - \sqrt{\xi^2 - n^2} \sqrt{\xi^2 - 1} \coth(\sqrt{\xi^2 - 1} a_1) \\
 D_0(\xi) = 1, \quad D_1(\xi) = \coth(\sqrt{\xi^2 - n^2} a_1), \quad D_2(\xi) = \{\xi^2 \coth(\sqrt{\xi^2 - 1} a_1) \\
 \quad - \sqrt{\xi^2 - n^2} \sqrt{\xi^2 - 1} \coth(\sqrt{\xi^2 - n^2} a_1)\} \coth(\sqrt{\xi^2 - 1} a_1) \\
 E_0(\xi) = 1, \quad E_1(\xi) = \coth(\sqrt{\xi^2 - 1} a_1), \quad E_2(\xi) = \tanh(\sqrt{\xi^2 - 1} a_1), \quad [a_1 : (3.9) \text{ 式}]
 \end{cases}$$

なお、以上の各式において層厚  $H \rightarrow \infty$  (i.e.  $a_1 \rightarrow \infty$ ) とすれば、 $j=1$  および  $j=2$  の場合の解析的表現が半無限地盤の場合 ( $j=0$ ) に一致する。

### 3. 5. Statical Ground Compliance の解析的表現

前報 3. 5. で定義した “Statical Ground Compliance”, すなわち, Dynamical Ground Compliance の解析的表現において加振力の振動数  $\omega \rightarrow 0$  とした極限值について, この場合の層を成す地盤に対する解析的表現を求める。前報と同じような扱いで, (3.40) ~ (3.42) 式に “L’ Hospital の定理” を適用して極限値の計算を行うが, この場合には適当な積分公式が見当たらないので, 結果は無限積分を含む二重積分のままで表示しておく。

#### (1) 垂直加振

##### (i) $j=1$ の場合

$$\begin{aligned}
 f_{sv1} &= \frac{w_0}{P_V} \cdot b\mu = \frac{-1}{2\pi^2(1-n^2)c} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\xi^2 \{\coth \xi H + \xi H (\operatorname{cosech} \xi H)^2\}} S(\xi, \theta) d\theta d\xi \\
 &= \frac{-r}{2\pi^2(1-n^2)c/b} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sinh \eta)^2}{\eta^2 (\eta + \sinh \eta \cdot \cosh \eta)} S(\eta, \theta) d\theta d\eta \dots\dots\dots (3.48)
 \end{aligned}$$

$$\text{ここに, } \eta = \xi H, \quad S(\eta, \theta) = \frac{\sin\left(\frac{\eta}{r} \cdot \cos \theta\right) \cdot \sin\left(\frac{c}{b} \cdot \frac{\eta}{r} \sin \theta\right)}{\cos \theta \cdot \sin \theta}, \quad [r : (3.9) \text{ 式}] \quad (3.49)$$

##### (ii) $j=2$ の場合

$$f_{sv2} = \frac{w_0}{P_V} \cdot b\mu = \frac{-r}{2\pi^2 c/b} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+n^2) \sinh \eta \cdot \cosh \eta - (1-n^2) \eta}{\eta^2 [1 + (1-n^2) \{ (1+n^2) (\sinh \eta)^2 + \eta \coth \eta + (1-n^2) \eta^2 \}]} S(\eta, \theta) d\theta d\eta \dots\dots\dots (3.50)$$

#### (2) 水平加振

##### (i) $j=1$ の場合

$$\begin{aligned}
 f_{sh1} &= \frac{u_0}{P_H} \cdot b\mu = \frac{r}{\pi^2 c/b} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sin^2 \theta + \frac{\sinh \eta \cosh \eta}{2(1-n^2)(\eta + \sinh \eta \cdot \cosh \eta)} \cos^2 \theta \right] \\
 &\quad \cdot \frac{\coth \eta}{\eta^2} S(\eta, \theta) d\theta d\eta \dots\dots\dots (3.51)
 \end{aligned}$$

##### (ii) $j=2$ の場合

$$\begin{aligned}
 f_{sh2} &= \frac{u_0}{P_H} \cdot b\mu = \frac{r}{\pi^2 c/b} \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \tanh \eta \cdot \sin^2 \theta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1+n^2) \sinh \eta \cdot \cosh \eta + (1-n^2) \eta}{2[1 + (1-n^2) \{ (1+n^2) (\sinh \eta)^2 + \eta \coth \eta + (1-n^2) \eta^2 \}]} \cos^2 \theta \right] \\
 &\quad \cdot \frac{1}{\eta^2} S(\eta, \theta) d\theta d\eta \dots\dots\dots (3.52)
 \end{aligned}$$

## (3) 回転加振

(i)  $j=1$  の場合

$$f_{SR1} = \frac{\phi}{M_R} \cdot \frac{b^3 \mu}{3} = \frac{-r}{2\pi^2(1-n^2)c/b} \int_0^\infty \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sinh \eta)^2}{\eta^2(\eta + \sinh \eta \cosh \eta)} \cdot N\left(\frac{\eta}{r} \cdot \cos \theta\right) S(\eta, \theta) d\theta d\eta \dots\dots\dots (3.53)$$

(ii)  $j=2$  の場合

$$f_{SR2} = \frac{\phi}{M_R} \cdot \frac{b^3 \mu}{3} = \frac{-r}{2\pi^2 c/b} \int_0^\infty \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+n^2)\sinh \eta \cdot \cosh \eta - (1-n^2)\eta}{\eta^2[1 + (1-n^2)\{(1+n^2)(\sinh \eta)^2 + \eta \coth \eta + (1-n^2)\eta^2\}]} \cdot N\left(\frac{\eta}{r} \cdot \cos \theta\right) S(\eta, \theta) d\theta d\eta \dots\dots\dots (3.54)$$

なお、以上の各式において、 $\eta = \xi H$  なる変数変換を行う以前の  $\xi$  を積分変数とする式で層厚  $H \rightarrow \infty$  とすれば、その極限値は  $j=1$  および  $j=2$  の場合ともに半無限地盤の  $j=0$  の解、前報 (3.66), (3.70) および (3.71) 式と一致する。また水平加振で  $j=1$  の場合の (3.51) 式では、 $\xi \rightarrow 0$  のとき integrand  $\rightarrow \infty$  となってこの積分は発散する。このことは、基盤と表層との境界面で水平面内のすべりを許しているの、地盤の表面に水平方向の静的荷重を作用させると水平変位は無限大に増大するという事実に対応している。

## 4. Ground Compliance の数値解とその特性

## 4. 1. 数値積分の方法

Dynamical Ground Compliance の解析的表現 (3.44) ~ (3.46) 式には次のような特異点が含まれている。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{分岐点; } \xi = n, \xi = 1 \\ \text{極; } \xi = 0, \xi = 1, \xi = \xi_{0k}, [k=1, 2, \dots, N] \end{array} \right.$$

そこで、これらの積分を評価するために複素平面に拡張し、前報 Fig. 3 に示すように、これらの特異点を第1象限側に避けて正の  $\xi$  軸上に沿う積分路を採用すると、 $j=1$  および  $j=2$  の場合には、特異点  $\xi=0$ ,  $n$  および 1 まわりの円弧に沿う積分は円弧の半径  $\rightarrow 0$  とすれば零に収束するので、残る特異点の一般化された Rayleigh pole  $\xi = \xi_{0k}$  をはさむ Cauchy の主値と、その点まわりの留数項 (留数の  $-\pi i$  倍) の和を評価すればよいことになる。積分結果は複素数となるが、層のある場合には Cauchy の主値が実数部を、留数項が虚数部を構成していることがわかる。以下においては実数部を  $f_{1l}$ , 虚数部を  $f_{2l}$  [ $l=V, H, R$ ] で表わすことにすれば、

## (1) 垂直加振

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_0}{P_V e^{i\omega t}} \cdot b\mu = f_{1V} + i f_{2V} \\ f_{1V} = \frac{-1}{\pi^2 a_0 \frac{c}{b}} P \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi^2 - n^2}}{\xi F_j(\xi)} T_j(\xi) S_I(\xi) d\xi \dots\dots\dots (4.1) \\ f_{2V} = -\pi \cdot \frac{-1}{\pi^2 a_0 \frac{c}{b}} \sum_{k=1}^N \frac{\sqrt{\xi_{0k}^2 - n^2}}{\xi \frac{dF_j(\xi)}{d\xi}} T_j(\xi) S_I(\xi) \Big|_{\xi=\xi_{0k}} \end{array} \right.$$

## (2) 水平加振

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_0}{P_H e^{i\omega t}} \cdot b\mu = f_{1H} + i f_{2H} \\ f_{1H} = \frac{1}{\pi^2 a_0 \frac{c}{b}} P \int_0^\infty \left[ \frac{1}{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}} S_{IS}(\xi) - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi F_j(\xi)} D_j(\xi) S_{IO}(\xi) \right] E_j(\xi) d\xi \dots\dots\dots (4.2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_{2H} &= -\pi \cdot \frac{-1}{\pi^2 a_0 \frac{c}{b}} \sum_{k=1}^N \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi} \frac{dF_j(\xi)}{d\xi} D_j(\xi) E_j(\xi) S_{I0}(\xi) \Big|_{\xi=\xi_{0k}} \\ (3) \text{ 回転加振} \\ &\left\{ \begin{aligned} M_R e^{i\omega t} \cdot \frac{b^3 \mu}{3} &= f_{1R} + i f_{2R} \\ f_{1R} &= \frac{-1}{\pi^2 a_0 \frac{c}{b}} P \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi^2-n^2}}{\xi} F_j(\xi) T_j(\xi) S_{IN}(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots(4.3) \\ f_{2R} &= -\pi \cdot \frac{-1}{\pi^2 a_0 \frac{c}{b}} \sum_{k=1}^N \frac{\sqrt{\xi^2-n^2}}{\xi} \frac{dF_j(\xi)}{d\xi} T_j(\xi) S_{IN}(\xi) \Big|_{\xi=\xi_{0k}} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

ここに,

$$\left\{ \begin{aligned} S_I(\xi) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(\xi, \theta) d\theta, \quad S_{IS}(\xi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(\xi, \theta) \sin^2 \theta d\theta \\ S_{I0}(\xi) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(\xi, \theta) \cos^2 \theta d\theta, \quad S_{IN}(\xi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(\xi, \theta) N(a_0 \xi \cos \theta) d\theta \quad \dots\dots\dots(4.4) \end{aligned} \right.$$

$P$ ; Cauchy の主値を表わす演算子

数値計算の方法は、まず  $\theta$  に関する積分はパラメータを変えた場合の繰返し計算に共通であるから、(4.4) 式の各量を  $\xi$  の適当な値 (ここでは  $a_0 \xi$  を 0.05 刻みに 0~100 まで) に対して前以って計算しておき、この計算値の table をもとにして、中間の値は中心差分を利用した 4 次の Everett の内挿公式で補間しながら  $\xi$  に関する積分計算を行うものである。積分区間を  $0 \leq \xi \leq n$ ,  $n \leq \xi \leq 1$  および  $1 \leq \xi$  の三つに分けると、第 3 の区間ではそのままの形で計算できるが、第 2 の区間では

$$\sqrt{\xi^2-1} \rightarrow i\sqrt{1-\xi^2}, \quad \sinh(\sqrt{\xi^2-1}a_0) \rightarrow i\sin(\sqrt{1-\xi^2}a_0), \quad \cosh(\sqrt{\xi^2-1}a_0) \rightarrow \cos(\sqrt{1-\xi^2}a_0)$$

の置き換えを行い、第 1 の区間ではさらに、

$$\sqrt{\xi^2-n^2} \rightarrow i\sqrt{n^2-\xi^2}, \quad \sinh(\sqrt{\xi^2-n^2}a_0) \rightarrow i\sin(\sqrt{n^2-\xi^2}a_0), \\ \cosh(\sqrt{\xi^2-n^2}a_0) \rightarrow \cos(\sqrt{n^2-\xi^2}a_0)$$

の置き換えを行って、また区間の端では被積分関数の極限值 (有限確定) を求めて計算する。Cauchy の主値の積分計算には前報でも使用した "I.M. Longman の方法" を適用し、無限積分については、ここでは演算時間の短縮をはかるために、前報での扱いとは異なり  $a_0 \xi = 100$  で一様に打切るという方法をとった。なお、数値積分にはすべて Simpson 3/8 則を用い、計算誤差が 0.5% 以内に収まるまで積分間隔を細分割していく方法によった。

#### 4. 2. 減衰機構について

層を成す地盤の場合にも、Dynamical Ground Compliance の解析的表現は実積分ではあるが結果は複素数となる。虚数部  $f_{2i}$  は減衰に関係する量であるが、この問題の設定において地盤には dissipative な減衰を考慮していないので、 $f_{2i}$  が現われてきて地盤がみかけの減衰作用を示すことは、やはり加振力の作用する震源から波動が逸散していく dispersive なエネルギー減衰を表わしている。 $f_{2i}$  の構成を調べると、半無限地盤の場合には、Cauchy の主値の虚数部と Rayleigh function の実根である Rayleigh pole まわりの留数項とから成り立っており、深さ方向への波動の逸散と Rayleigh 波 (表面波) による radial 方向への逸散とによってエネルギー減衰が生じるのに対して、層を成す場合には、Cauchy の主値には虚数部がなく、 $f_{2i}$  は一般化された Rayleigh function の実根である各 mode に関する留数項の和のみとなって、エネルギー減衰は表面波によって radial 方向にのみ起り、剛な基盤の境界面で波動が完全反射するために深さ方向には起らないことを示している。複素平面上で積分の評価をするとき、留数項の取扱い方について二つの考え方があることを前報 4. 2. で述べたが、もし留数項を除くという第一の立場をとると、この場

合にはいかなる状態のときにも地盤はエネルギー減衰によるみかけの減衰作用を示さないことになって、現実の物理現象を説明できないことになってしまう。したがって、Cauchy の主値に留数項を付け加えるという第二の立場による扱いの正当性がここでも裏付けられたわけである。

なお Fig. 3 によれば、基盤と表層の間が完全に密着している場合、加振力の振動数と層厚との積  $a_1$  の値が  $a_{1cr}$  より小さいときには振動数方程式に実根が存在せず、したがって  $f_{21}$  は零となってエネルギー減衰が全く生じないことがわかる。

#### 4. 3. 共振現象について

表層の下に剛な基盤を想定しているからその境界面で波動が完全反射し、また地盤の表面にあたる自由表面でも同じく完全反射の現象が起るため、定常入力の場合には地盤の変位振巾が発散して無限大となる共振現象の起る可能性がある。これには次の三つの場合が考えられる。

(a)  $\xi=0$  の近傍で積分が発散する場合

——層厚に等しい長さをもつ3次元の棒の固有振動数に一致するとき

<垂直加振,  $j=1$  および  $j=2$  のとき>

$$[\coth(\sqrt{\xi^2 - n^2} a_1)]_{\xi=0} = \coth(ina_1) = -i \cot(na_1) = 0 \dots\dots\dots (4.5)$$

のとき、すなわち、

$$\left\{ a_1 = \frac{2m+1}{2n} \pi, \quad \text{i. e.} \quad \omega = \frac{2m+1}{2H} \pi \sqrt{\frac{1}{\rho} \cdot \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}}, \dots\dots\dots (4.6) \right. \\ \left. [m=0, \pm 1, \pm 2, \dots], \quad E; \text{地盤の Young 係数} \right.$$

のとき  $\xi$  を正の微小量とすれば、上の関係を用いると、

$$\coth(\sqrt{\xi^2 - n^2} a_1) = -i \cot \left[ na_1 \left( 1 - \frac{\xi^2}{2n^2} \right) \right] \\ = -i \cot \left[ \frac{2m+1}{2} \pi \left( 1 - \frac{\xi^2}{2n^2} \right) \right] = -i \frac{2m+1}{2} \pi \cdot \frac{\xi^2}{2n^2} \dots\dots\dots (4.7)$$

となるから  $F_1(\xi)$  および  $F_2(\xi)$  は  $\xi^{-2}$  の order になる。ここで  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon$  ( $\varepsilon_1 > \varepsilon$ ) という正の微小量を取り、Dynamical Ground Compliance の解析的表現 (3.44) 式から  $\xi$  に関する積分のみを取り出してその Cauchy の主値を  $J_{Vj}$  [ $j=1, 2$ ] で表わすと、

$$J_{V1} = P \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\xi^2 - n^2}}{\xi F_1(\xi)} T_1(\xi) S(\xi, \theta) d\xi \\ = \frac{-na_0^2 \frac{c}{b}}{4n^2 \pi + 4nc \cot a_1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} \frac{d\xi}{\xi} \right] + P \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{\sqrt{\xi^2 - n^2}}{\xi F_1(\xi)} T_1(\xi) S(\xi, \theta) d\xi \dots\dots\dots (4.8)$$

$$J_{V2} = P \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\xi^2 - n^2}}{\xi F_2(\xi)} T_2(\xi) S(\xi, \theta) d\xi \\ = \frac{n^2 a_0^2 \frac{c}{b} \cot a_1}{\mp 4nc \operatorname{cosec} a_1 - \frac{2m+1}{4n} \pi \cot a_1 + (4n^2 + 1)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} \frac{d\xi}{\xi} \right] + P \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{\sqrt{\xi^2 - n^2}}{\xi F_2(\xi)} T_2(\xi) S(\xi, \theta) d\xi \\ \dots\dots\dots (4.9)$$

上の二つの積分の第1項は発散するから  $f_{1V} \rightarrow \infty$  となって、(4.6) 式の関係が成立つとき共振現象が起る。この共振振動数は、表層の層厚に等しい長さ  $H$  と縦弾性係数  $(1-\nu)E/(1+\nu)(1-2\nu)$  をもつ一端固定・他端自由な3次元の棒の縦振動の固有振動数に一致している。

<水平加振,  $j=1$  のとき>

$$[\sinh(\sqrt{\xi^2 - 1} a_1)]_{\xi=0} = \sinh(ia_1) = i \sin a_1 = 0 \dots\dots\dots (4.10)$$

のとき、すなわち、

$$a_1 = m\pi, \quad \text{i. e.} \quad \omega = \frac{m}{H} \pi \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad [m=0, \pm 1, \pm 2, \dots] \dots\dots\dots (4.11)$$

が成り立つとき、垂直加振の場合と同様な計算によって、Dynamical Ground Compliance の解析的表現 (3.45) 式の  $\xi$  に関する積分の Cauchy の主値が  $\xi=0$  の近傍で発散することがわかる。すなわち、(4.11) 式の関係が成り立つとき  $f_{1H} \rightarrow \infty$  となって共振現象が起る。この共振振動数は、層厚に等しい長さ  $H$  と剪断弾性係数  $\mu$  をもつ両端自由な棒の剪断振動の固有振動数に一致している。

<水平加振,  $j=2$  のとき>

$$[\cosh(\sqrt{\xi^2 - 1} a_1)]_{\xi=0} = \cosh(ia_1) = \cos a_1 = 0 \dots\dots\dots (4.12)$$

のとき、すなわち、

$$a_1 = \frac{2m+1}{2} \pi, \quad \text{i. e.} \quad \omega = \frac{2m+1}{2H} \pi \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad [m=0, \pm 1, \pm 2, \dots] \dots\dots\dots (4.13)$$

が成り立つとき、上の二つの場合と同様な計算によって、その Dynamical Ground Compliance の解析的表現 (3.45) 式の Cauchy の主値は発散することがわかり、 $f_{1H} \rightarrow \infty$  となって共振現象が起る。(4.13) 式で示される共振振動数は、上記の<水平加振,  $j=1$ >のときと同じ棒の一端固定・他端自由な場合の剪断振動の固有振動数に一致している。

<回転加振  $j=1$  および  $j=2$  のとき>

上述の垂直および水平加振の場合とは異なり、この加振型のときには棒の固有振動数に対応する共振現象は存在しない。

以上のように、この場合の共振振動数に関しては、3次元の拡がりをもつ層を、層厚に等しい長さに対応する類似の境界条件をもち加振型に対応する振動形態をとる棒として扱えるわけである。

(b) 振動数方程式  $F_j(\xi)=0$  が同じ mode で重複根をもつ場合

——その mode の group velocity が零になるとき

(c) 振動数方程式  $F_j(\xi)=0$  が異なる mode の間で重複根をもつ場合

——それらの mode の phase velocity が等しくなるとき

すでに 3.2. において述べたように、また Figs. 2, 3 から明らかなように、ここで解析したパラメータ範囲では振動数方程式  $F_j(\xi)=0$  は  $j=1$  のとき (b) 型の、また  $j=2$  のとき (b) および (c) 型の 2 次の重複根をもっている。このとき  $F_j(\xi)=dF_j(\xi)/d\xi=0$  となるが、この根  $\xi_{0n}$  の近傍では一般に Cauchy の主値が発散するので  $f_{1H} \rightarrow \infty$  となって共振現象が起る。Figs. 2, 3 の●印および○印の点がこの状態を表わすところで、これはどの加振型についても同一の振動数と層厚との関係のときに生じる。

#### 4. 4. 数値計算および結果

水平加振については数値計算が完了していないので、ここでは垂直および回転加振の場合について報告する。なお、以下の計算結果はすべて  $n^2=1/3$ 、すなわち、表層のポアソン比  $\nu=1/4$  のときである。

##### 4. 3. 1. Statical Ground Compliance

3. 5. で得られた解析的表現に基づいた数値計算結果を Fig. 10 (垂直加振) および Fig. 11 (回転加振) に示す。図は、基礎断面積を一定にして断面の形状を変えた場合に於ける前報 (4.10) 式に示す形の解  $\bar{f}_{si} [I=V, R]$  を、層厚と平均基礎半巾の比  $H/\sqrt{bc}$  の関数として、基礎断面辺長比  $c/b$  をパラメータにとって、表層と基盤との間の境界条件  $j=1, 2$  および半無限地盤の場合  $j=0$  について比較したものである。

##### 4. 3. 2. Dynamical Ground Compliance

3. 4. で得られた解析的表現 (3.44)~(3.46) 式に基づいた数値計算結果を、垂直および回転加振の場合についてそれぞれ Figs. 12, 16 ( $c/b=1, j=1$ ), Figs. 13, 17 ( $c/b=1, j=2$ ), Figs. 14, 18 ( $c/b=2, j=1$ ) および Figs. 15, 19 ( $c/b=2, j=2$ ) に示す。図は、振動数に関する無次元量  $a_0$  の関数として、層

厚と基礎半巾との比  $r=H/b$  を変えて比較したもので、図中○印を加えて表示した曲線は  $H/b=\infty$ 、すなわち前報で計算した半無限地盤の場合で比較のために挿入した。基礎断面辺長比  $c/b$  による違いは、基礎半巾  $b$  を一定にしてもう一方の基礎半巾  $c$  を変えた場合にあたっている。なお、パラメータ  $H/b$  の値にマイナスがついているものは符号を逆にして図示してあることを示す。

4. 3. で述べた共振点のうち、図の範囲 ( $0 \leq a_0 \leq 2$ ) に現われてくるものは次のとおりである。

(a) 層厚に等しい長さをもつ棒の固有振動数に一致するもの (垂直加振のときで  $j=1, 2$  に共通)

$$a_0 = 1.3603 \quad (H/b=2 \text{ のとき}), \quad a_0 = 0.6802 \quad (H/b=4 \text{ のとき})$$

(b) ある mode の group velocity が零になるもの (垂直および回転加振に共通)

$$j=1; \begin{cases} a_0 = 1.2858 \\ a_0 = 0.6429, \end{cases} \quad j=2; \begin{cases} a_0 = 1.3506 \\ a_0 = 0.6753, 1.8637 \end{cases} \quad (H/b=2 \text{ のとき})$$

(c) 異なる mode の間で phase velocity が等しくなるもの (垂直および回転加振に共通,  $j=2$ )

$$a_0 = 1.3603 \quad (H/b=2 \text{ のとき}), \quad a_0 = 0.6802 \quad (H/b=4 \text{ のとき})$$

以上の共振振動数はすべて  $a_1 = \omega H/c_2$  の値によって定まるので、層厚と地盤常数 (剪断波の速度すなわち剛性率と密度) のみの関数となり、基礎の形状や寸法には無関係である。なお、(a) と (c) の共振振動数が一致することはすでに 3. 2. において述べたところであるが、興味深い現象である。

#### 4. 5. 解析結果の考察

1. 構造物の周辺地盤という意味での地盤の動特性を概括的に表現する Dynamical Ground Compliance (線型伝達関数) は、前報で解析した半無限地盤の場合と同様に、本報で扱ったような層を成す地盤についても入力振動数および基礎の形状と寸法の関数になり、また地盤の弾性常数 (剛性率, Poisson 比) と密度にも関係するが、さらに表層の層厚の関数になる。そして、基盤と表層との間の二種の境界条件、すなわち、水平面内のすべりのみ許す場合と完全に密着している場合に半無限地盤の場合をも加えて、これら三種の地盤についての解析的表現は同じような形をとるので同一の式で表示することができる。また、前二者の場合において層厚を無限大にすれば半無限地盤の場合の解析的表現に一致する。

2. ここで扱った層を成す地盤について半無限地盤と異なる第一の特徴は、表層の両境界面における波動の完全反射の現象に起因する 4. 3. で詳述した三種の共振振動数が存在することである。このうち二種の共振振動数は 3 次元の棒の固有振動数に一致しているので、これについては 3 次元の拡がりをもつ層を、層厚に等しい長さに対応する類似の境界条件をもち、加振型に対応する振動形態をとる棒として扱えるわけである。本報の扱いでは地盤に dissipative な減衰機構を考えていないので、この共振点においては加振方向の変位振巾が無限大に発散し、現実の成層地盤の共振現象とはかけはなれるが、地盤に減衰項を入れるかあるいは基盤に有限な剛性を与えて表層から基盤への波動の透過現象によって生じる dispersive なエネルギー減衰を考えれば、共振振巾を有限にすることができる。しかし、地盤という媒質のもつ減衰量が微小であれば、あるいは表層に比べて基盤の剛性が相当大きい表層がかなり深ければ、本報で導いた共振振動数の近傍で共振現象の起こることが予想される。

3. 第二の特徴は、振動数と層厚との積が小さい範囲においては、虚数部で示されるエネルギー減衰が極めて少ないか (表層と基盤との間に水平面内のすべりのみを許すとき) あるいは全く存在しない (完全に密着しているとき) ことである。半無限地盤の場合には、深さの増加とともに変位振巾が指数関数的に減少する深さ方向への波動の逸散と、Rayleigh 波 (表面波) による radial 方向への波動の逸散とによってエネルギー減衰が生じるが、層を成す地盤については、剛な基盤があるために深さ方向には起りえず、各 mode の free wave からなる主として表面波によって、radial 方向へのエネルギー減衰のみが生じる。表層と基盤との間に水平面内のすべりを許す  $j=1$  の場合に、共振点の手前で減衰を表わす虚数部が急激に増加するところがあるが、これは振動数方程式の 1st mode の根が Rayleigh pole に近づきはじめの位置にあたっている。また、完全に密着している  $j=2$  の場合に共振点を越えたところで不連続的に増大しているのは、振

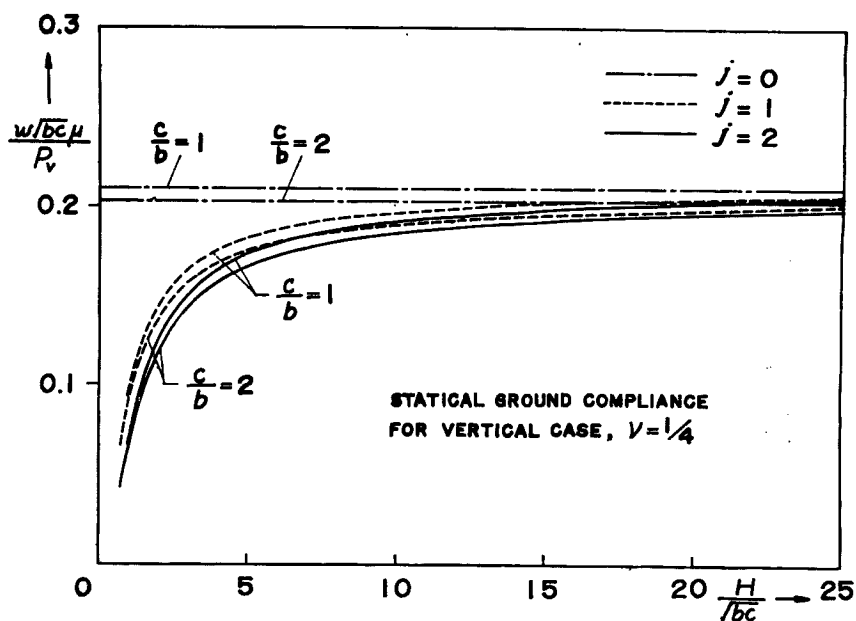


Fig. 10 Statical Ground Compliance for vertical translation,  $\nu=1/4$ .

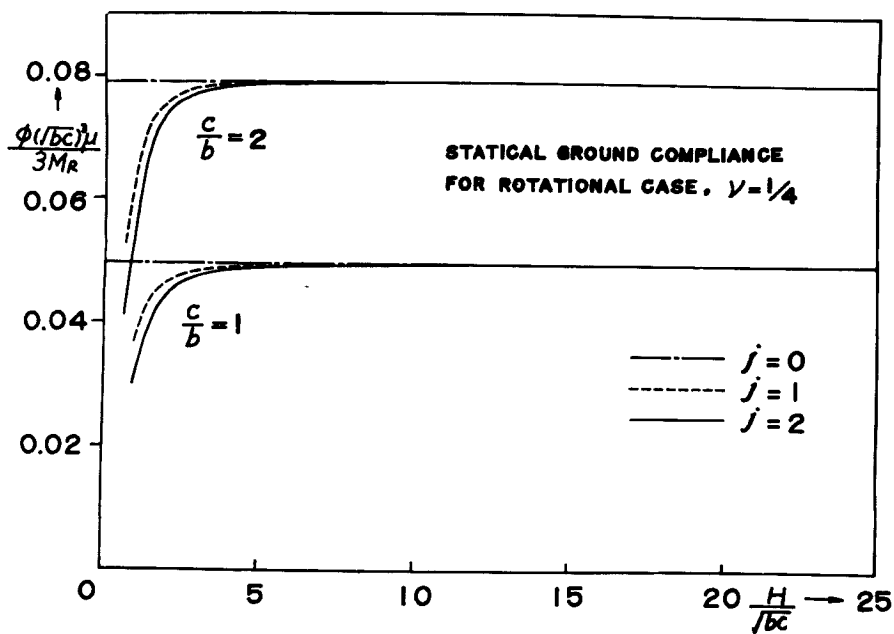
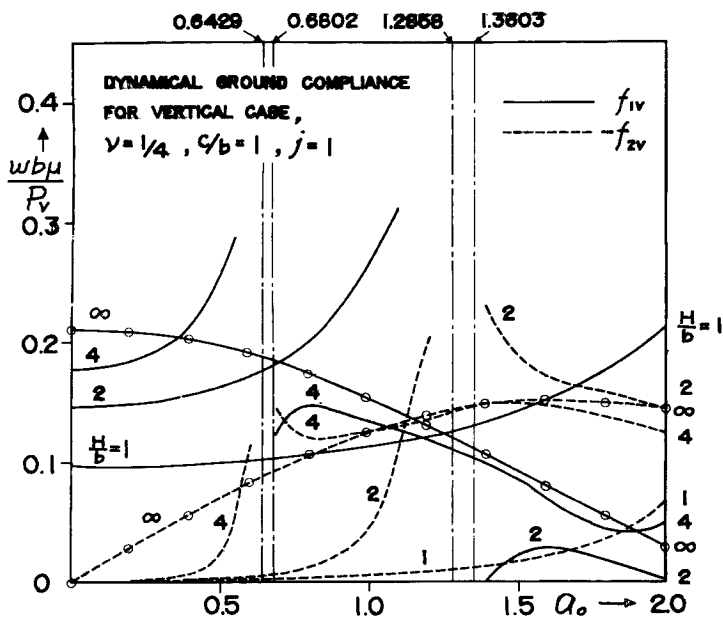
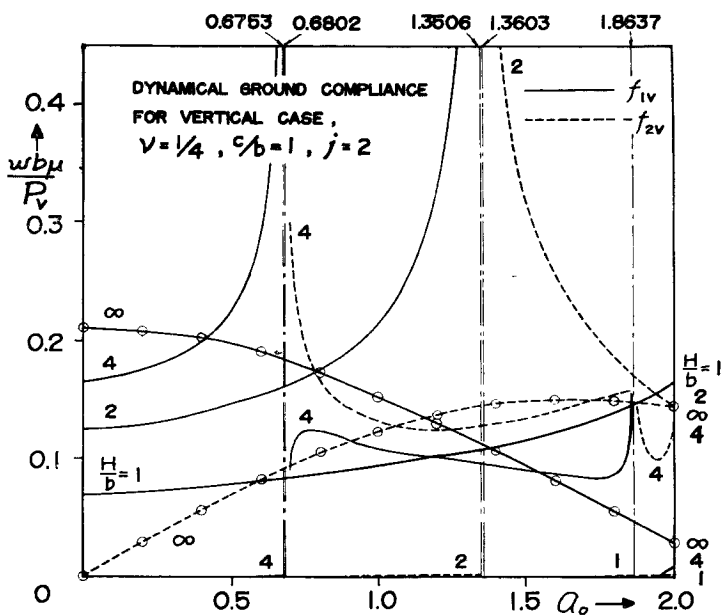


Fig. 11 Statical Ground Compliance for rotation,  $\nu=1/4$ .

Fig. 12 Dynamical Ground Compliance for vertical translation,  $\nu=1/4$ ,  $c/b=1$ ,  $j=1$ .Fig. 13 Dynamical Ground Compliance for vertical translation,  $\nu=1/4$ ,  $c/b=1$ ,  $j=2$ .

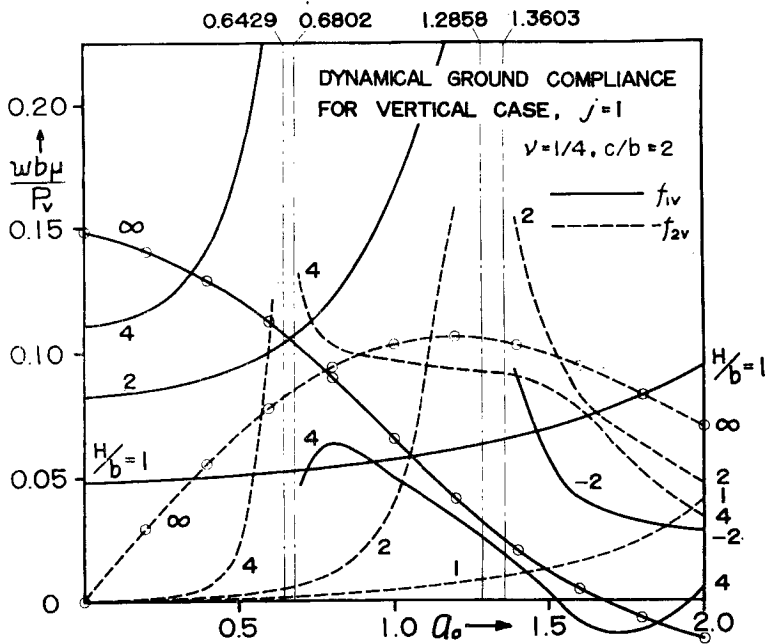


Fig. 14 Dynamical Ground Compliance for vertical translation,  $\nu=1/4$ ,  $c/b=2$ ,  $j=1$ .

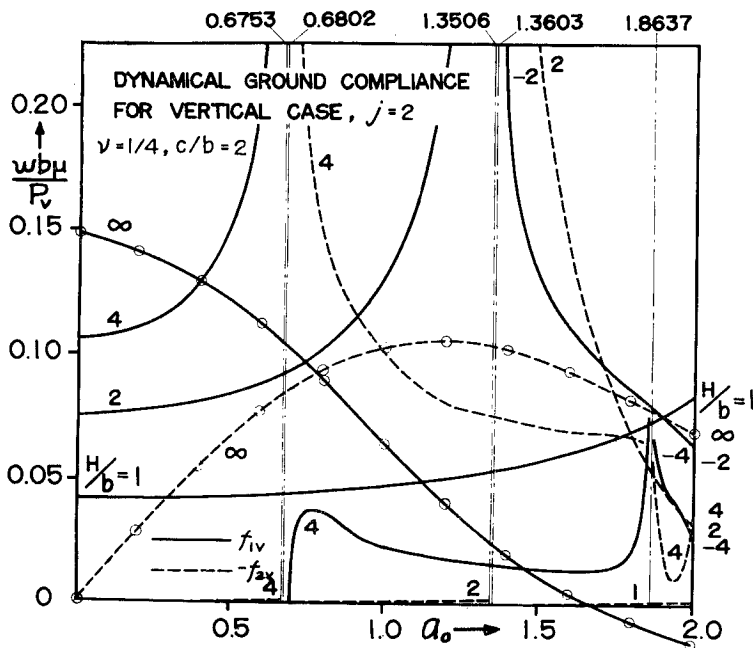
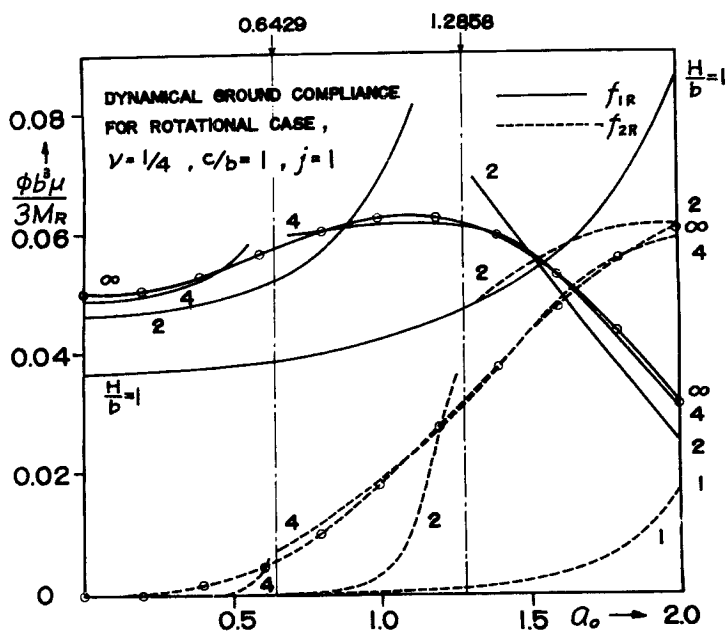
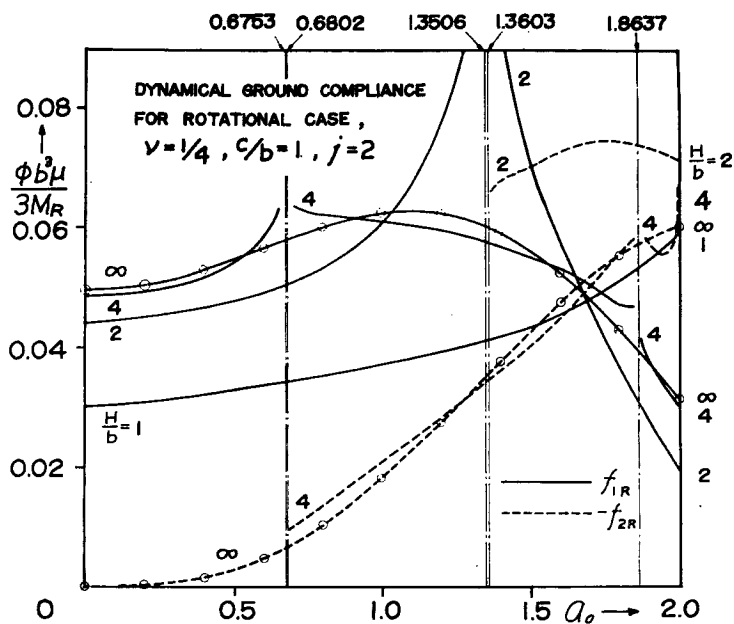
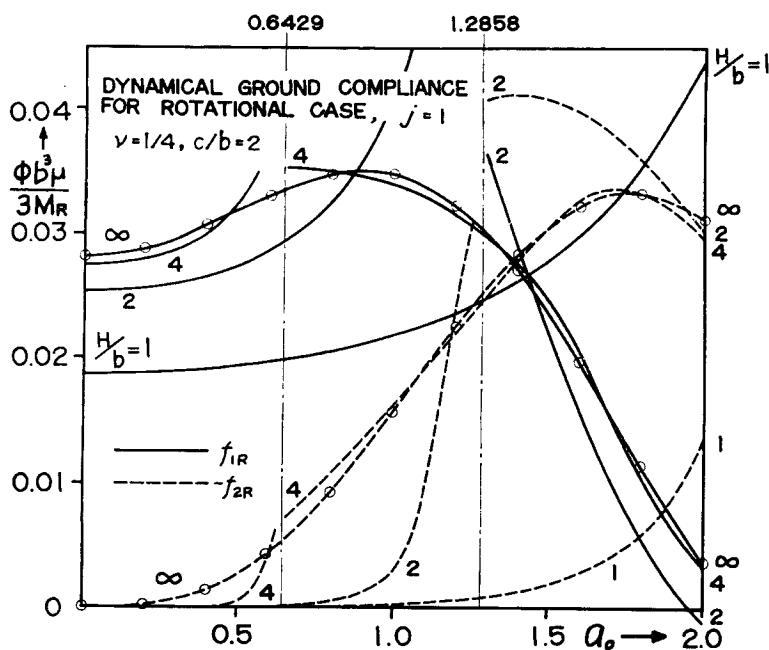
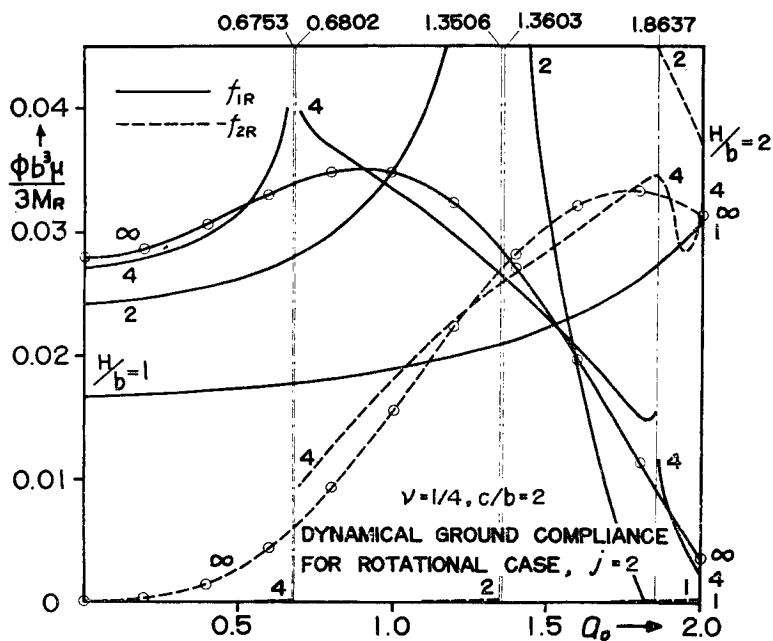


Fig. 15 Dynamical Ground Compliance for vertical translation,  $\nu=1/4$ ,  $c/b=2$ ,  $j=2$ .

Fig. 16 Dynamical Ground Compliance for rotation,  $\nu=1/4, c/b=1, j=1$ .Fig. 17 Dynamical Ground Compliance for rotation,  $\nu=1/4, c/b=1, j=2$ .


 Fig. 18 Dynamical Ground Compliance for rotation,  $\nu=1/4$ ,  $c/b=2$ ,  $j=1$ .

 Fig. 19 Dynamical Ground Compliance for rotation,  $\nu=1/4$ ,  $c/b=2$ ,  $j=2$ .

動数が大きくなって新しい mode の free wave が出現したことによるものであろう。

4. 基礎巾に比べて表層の層厚が大きくなると半無限地盤の状態へ近づくが、基礎下の載荷面に一様な垂直応力の分布を仮定し、基盤の存在の影響を直接的な形で受けると考えられる垂直加振の場合よりも、回転軸からの距離に比例した三角型の垂直応力の分布を仮定し、基盤の存在の与える効果が全体として打消し合う結果になると考えられる回転加振の場合の方が、早く収束する。回転加振のときには、回転軸に直角な基礎半巾に対する層厚の比が4程度で、低振動数域で減衰が極めて少ないことを除き、共振点の近傍以外ではほぼ半無限地盤の場合と一致することが認められるが、垂直加振のときには、もっと表層の深いさらに大きな比の値を考えないと半無限地盤の状態へは収束しない。

5. 表層と地盤との間の境界条件の及ぼす影響については、完全に密着している状態よりも拘束の弱い水平面内のすべりを許す場合の方が加力方向の静的変位は大きく、言い換えると地盤の静的剛性は小さくなる。そして動的な場合も含めて、層厚の増加による半無限地盤の状態への収束は早い。しかし、全般的には、共振振動数の現われる位置がやや異なることを除けば、互いに非常によく似た傾向を示しており、基盤と表層の間の境界条件の相異が及ぼす影響は少ないと考えられる。これは、垂直および回転加振の場合とはともに垂直方向の振動が卓越し、その方向には基盤と表層が密着しているという境界条件を設定しているからで、水平方向の振動が卓越する水平加振のときにはその方向の境界条件が極端に異なるから、相当違った結果が得られるものと予想される。

6. Statical Ground Compliance の値に及ぼす基礎の断面形状の影響は、半無限地盤についてみられた性状とほとんど変わらないことが指摘できる。また Dynamical Ground Compliance については、細長い断面形のものになると、層厚の増加による半無限地盤の状態への収束がわずかに遅くなる程度で、その全般的傾向はほとんど変わらないと見做してよい。

7. 基礎巾に対する層厚の比がある程度大きくなると、層を成す地盤に対する Dynamical Ground Compliance が、共振振動数のごく近傍と最初の共振点に到るまでの低振動数域とを除けば、半無限地盤の場合とはほぼ一致することは、このような地盤については、低振動数域で減衰が極めて小さいことおよび層厚に応じた数種の共振振動数が存在することを考慮に入れておけば、半無限地盤と見做して扱える可能性を示している。このような扱いのできる下限の比  $H/b$  の値については、回転加振の場合には、層厚の増加による半無限地盤の状態への収束が早いので、数値解の性状から判断して  $H/b=4$  すなわち基礎巾に対する層厚の比を2程度としてよいであろう。一方、垂直加振の場合には収束が遅いが、 $H/b$  の比が大きい動的な場合の数値解が計算されていないので、Statical Ground Compliance の数値解から判断すれば、 $H/b=10$  すなわち基礎巾に対する層厚の比が5程度と考えて工学的には差支えないのではなかろうか。

## 5. む す び

前報では、半無限弾性体とみなしうような構造物の周辺地盤の動特性を明らかにする試みを行ったが、本報では、成層構造をもつ地盤を解析する第一段階として、その Dynamical Ground Compliance を弾性波動論から求めるという前報と同じ手法を適用して、剛な基盤上に一様な厚さの弾性体の表層がのっているような地盤の動特性の解明を試みた。その結果、

- (1) 層厚に等しい長さをもつ3次元の棒の固有振動数に一致する場合を含んだ、層厚と地盤常数の関数である三種の共振振動数が存在すること。
  - (2) 低振動数域で波動の逸散による地盤のみかけの減衰作用が極めて小さいこと。  
など半無限地盤のときとは異なる特性を明らかにすることができ、さらに、
  - (3) 基礎巾との相対的な関係で層厚がある程度大きくなると、上記の二つの特性を考慮に入れておけば半無限地盤として扱えること。
- を示した。

既往の研究で部分的に解析されている円形基礎との比較については、基礎下の応力分布の仮定のとり方が本報とは異なるので数値的な比較はできないが、解析範囲内での全般的な傾向はここで扱った正方形基礎の場合とよく似ていると言うことができる。

本報では、問題の扱いを簡単にすることと最も基本的な地盤のモデルの動特性を明らかにするという目的から、地盤は dissipative な減衰機構を含んでいないという仮定をおいているので、共振点における変位振巾は無限大に発散する。dissipative な減衰機構をもつ地盤を対象に選ぶこと、あるいは基盤に有限な剛性を与えることは、この変位振巾を有限にする。このような成層地盤の動特性を解明する研究は、より現実に近い地盤モデルを想定するという意味においても、また地盤の伝達関数を表わす Dynamical Ground Compliance を上部構造物系の伝達特性に接続し、地盤の影響をとり入れた構造物の耐震性を明らかにしていく研究に成果を反映させていくという意味からも、今後の重要な課題であると考えられる。

なお、以上の計算には京都大学の digital 電子計算機“KDC-II”および東京大学大型計算機センターの digital 電子計算機“HITAC 5020”を使用した。

最後に、本稿の作成にあたり多大の協力を得た研究室の諸兄に深く感謝の意を表します。

#### 参 考 文 献

- 1) Arnold, R.N., Bycroft, G.N. and Warburton, G.B.: Forced Vibrations of a Body on an Infinite Elastic Solid, Journal of Applied Mechanics, Vol.22, Sept., 1955, pp.391—400.
- 2) Bycroft, G.N.: Forced Vibrations of a Rigid Circular Plate on a Semi-Infinite Elastic Space and on an Elastic Stratum, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol.248, Series A, 1956, pp.327—368.
- 3) Warburton G.B.: Forced Vibration of a Body on an Elastic Stratum, Journal of Applied Mechanics, Vol.24, 1957, pp.55—58.
- 4) Kobori T., Minai R. and Suzuki T. : Dynamical Ground Compliance of Rectangular Foundation on an Elastic Stratum, Proceedings of Japan Earthquake Engineering Symposium 1966, 1966, pp.261—266.
- 5) Ewing, W.M., Jardensky, W.S. and Press, F.: Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1957.
- 6) 吉田耕作他：応用数学便覧，丸善，1954.