

長方形基礎の Dynamical Ground Compliance (その 1)

—半無限弾性地盤の場合—

小堀 鐸 二・南井良一郎・鈴木 有・日下部 馨

DYNAMICAL GROUND COMPLIANCE OF RECTANGULAR FOUNDATION ON A SEMI-INFINITE ELASTIC MEDIUM (PART 1)

By *Takuji* KOBORI, *Ryoichiro* MINAI, *Tamotsu* SUZUKI
and *Kaoru* KUSAKABE

Synopsis

It is the purpose of this paper to study the properties of "Dynamical Ground Compliance" of a semi-infinite elastic medium. Representing its Compliance as the ratio of the displacement of a rectangular foundation to a harmonic disturbing force acting on the foundation, it corresponds to the transfer function of the elastic ground. The analytical results show that Dynamical Ground Compliance is expressed by the complex number, the imaginary part of which is concerned with the phenomenon of the energy dispersion caused by the wave propagation outside the foundation, and that it depends on the ground constants, the shape and dimension of the foundation area, and the frequency of a disturbing force.

1. ま え が き

構造物の震害と地盤との相関関係が大きいことは、過去の地震による被害調査の中にも数多くの例がみられ、また既に多くの研究者によっても指摘されてきたところではあるが、基礎地盤の性状と構造物の地震応答の間の相互関係については十分には解明されておらず、未開拓の分野が極めて多いというのが現状であろう。構造物に及ぼす地盤の動的な効果を明らかにし、地盤の影響をとり入れた構造物の耐震性を追求していくためには、まず地盤の動特性を正しく解明し、その成果をとり入れて基礎地盤—構造物という連成系を対象とした振動解析を行なわねばならないと考える。

地盤の動特性を理論面から明らかにするための研究として、地盤を連続体と想定し、主として地震学者の手によってうちたてられてきた弾性波動論に基づいて解析を進めようという試みがある。

1904年、H. Lamb が水平な境界面をもつ半無限弾性体の表面に harmonic に振動する鉛直集中荷重を加えたときに生じる弾性波動の生成伝播に関して画期的な研究¹⁾を発表した後、弾性波伝播に関する理論的研究は多くの地震学者によって秀れた研究がなされてきた。このような一連の研究は、主として地震波の伝播機構の解明を目的としたもので、一般に震源から離れた地点の挙動を問題にしているのであるが、我々の関心はもっぱら荷重点（一種の震源）およびその近傍における挙動にあるわけである。この点に着目して地盤

上に構造物がのることを想定し、工学の分野における問題として扱ったのは E. Reissner はが恐らく最初の人であろう。彼は等質等方な半無限弾性地盤上の円形基礎に鉛直方向の harmonic な加振力が作用する場合(垂直振動)の基礎の変位応答を表わす解を求め⁸⁾、次いで基礎の中心を通る鉛直軸まわりの捩れ振動の場合を扱った⁹⁾。この種の問題は、表面における境界条件が変位と応力の2種の組合わせて規定される所謂混合境界値問題となるため、その解を得るのは容易ではなく、とりわけ動的な場合は非常に難しいとされている。この困難を避けるために、彼は基礎下の振動方向の応力分布として、垂直振動においては一様な垂直応力を、捩れ振動においては回転軸からの距離に比例した三角型の剪断応力の分布をそれぞれ仮定し、Fourier-Bessel 展開によって境界条件を応力で統一して表現するという手法をとった。なお、後続のほとんどすべての研究者はこの手法を踏襲している。彼の扱った捩れ振動の研究は H.F. Sagoci により受継がれて、混合境界値問題としての厳密な解が誘導されている^{4),5)}。また、垂直振動を扱った研究は T.Y. Sung に受継がれたが、彼は基礎下の応力分布として、一様分布の他に放物線型分布、静的載荷時に剛体の基礎下に生じる圧力分布(Boussinesq 分布)の三種の仮定を採用して詳細な検討を加え、応力分布の仮定のおき方が解にかなり大きな影響を与えることを指摘した⁶⁾。同じころ P.M. Quinlan は Sung と同様な問題を数学的にさらに詳しく解析している⁷⁾。一方 I. Toriumi は、円形基礎の垂直振動の他に水平振動と基礎底面の直径を回転軸とする回転振動の問題を、並進振動では一様分布、回転振動では三角型の応力分布の仮定のもとに解析している¹⁰⁻¹²⁾。また、R.N. Arnold・G.N. Bycroft・G.B. Warburton は Toriumi とは独立に、彼の扱った円形基礎の三種の振動にさらに捩れ振動の場合を加えて、すべて Boussinesq 分布という仮定のもとに解析を行っている^{8),9)}。

上述の諸研究はほぼ同一の系列に属するものであるが、H. Tajimi は地盤の振動アドミッタンスを求めるという立場から、まず、半無限弾性体の表面に作用する点加振によって表面上の任意点におこる変位の近似式を静的な場合の解を拡張した形で表現し、これを載荷面積にわたって積分するという手法によって、円形基礎および長方形基礎の垂直振動、水平振動および回転振動における動的変位を、主として Boussinesq 型の応力分布の仮定を置いて求めている¹³⁾⁻¹⁵⁾。既往の研究では変位応答を表わす解が最終的には数値解として与えられるので、これを地盤を含めた構造物系に適用するときには定常振動の場合しか扱えなかったが、近似的にでもともかく地盤の振動アドミッタンスを一般式で表現し、非定常振動への適用を可能としたところにこの研究の特徴がある。

なお、この種の問題を厳密な形で混合境界値問題として扱うと連立積分方程式を解くことに帰すが、これを級数展開の方法によって近似的に解析することを試みた A.O. Awojobi and P. Grootenhuis の最近の研究がある¹⁶⁾。

一般に構造物の基礎の形は長方形断面が多く円形のはほとんどみられないにもかかわらず、Reissner に始まる一連の研究が円形基礎を扱っているのは、数理的扱いが円形という条件によりある程度単純化されるからで、長方形の場合には理論解の誘導および数値計算ともに非常に複雑になるのであるが、最近の digital 電子計算機の著しい発達で長方形基礎の場合の解析を可能にしつつある。

本研究は、3次元の拡がりをもつ等質等方な半無限弾性地盤上の剛体長方形基礎に垂直、水平、回転およびねじれ方向の加振力が作用するとき、基礎自重の影響を入れない場合の基礎の変位応答を表わす解を三重 Fourier 変換を導入して誘導し、その解より導いた“Dynamical Ground Compliance”という概念によって、このような地盤の動特性を表現しようとするものである。そして、無限積分を含む二重積分で表示されるその解析的表現を求め、数値解を計算してこれがもつ特性を明らかにしていく。ここに Dynamical Ground Compliance とは、時間に関して Fourier 変換された領域においてとった加振方向の基礎の変位と加振力との比(Stiffness の逆数)のことを言い、“構造物の周辺地盤という意味での半無限弾性地盤の伝達関数”に相当する。したがって、これを地盤の等価バネ剛性として上部構造物系の伝達特性に接続すれば、任意の地動に対する半無限弾性地盤上の構造物系の非定常な地震応答を求めることが原理的には可能になるわけである。Dynamical Ground Compliance の表現の中で加振力の振動数を零とおいた極限值を“Static Gro-

und Compliance”と名付け、これについても検討を加える。以下においてはこの両者を合わせて“Ground Compliance”と呼ぶことにする。

2. 基礎方程式と解の誘導

地盤を等質等方性の3次元半無限弾性体として、その上に Fig. 1 に示すような断面をもつ剛体長方形基礎がのる場合について考える。この基礎に垂直, 水平, 回転および捩れ方向の加振力が作用したときの振動問題を扱う。ただし, 以下の解析において基礎自重は考慮に入れない。なお座標軸については, 基礎底面の中心に原点をとり, 長方形基礎の稜に平行に x 軸および y 軸を, また鉛直下方に z 軸をとる。

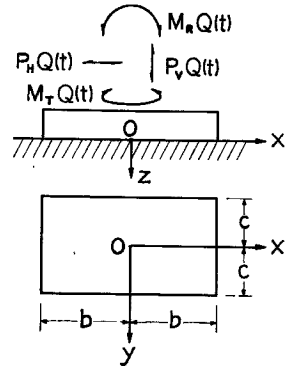


Fig. 1 Formulation of problem.

直交座標 x, y, z に関する等質等方な弾性体の運動方程式は変位ベクトル $\{u, v, w\}$ に対して,

$$(\lambda + \mu) \left\{ \frac{\partial \Delta}{\partial x}, \frac{\partial \Delta}{\partial y}, \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right\} + \mu \nabla^2 \{u, v, w\} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u, v, w\} \quad (2.1)$$

ここに,

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; \text{dilatation, } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \text{Laplace 演算子} \\ \lambda, \mu; &\text{ Lamé の定数, } \rho; \text{ 地盤の密度, } t; \text{ 時間} \end{aligned} \right. \quad (2.2)$$

上式から変位成分 u, v, w を消去すると, dilatation Δ に関する波動方程式が得られる。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Delta = 0 \quad (2.3)$$

ここに,

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \text{ 地盤内を伝播する疎密波の速度} \quad (2.4)$$

(2.3) 式を解くために, x, y および t に関する Δ の三重 Fourier 変換を導入する。

$$\Delta(x, y, z, t) \mapsto \tilde{\Delta}(\beta, \gamma, z, \omega), \text{ あるいは } \mathcal{F}^3[\Delta] = \tilde{\Delta} \quad (2.5)$$

ここに,

$$\mathcal{F}^3[\Delta] = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x, y, z, t) e^{-i(\beta x + \gamma y + \omega t)} dx dy dt \quad (2.6)$$

その逆変換は次式で定義される。

$$\mathcal{F}^{-3}[\tilde{\Delta}] = \Delta \quad (2.7)$$

ここに,

$$\mathcal{F}^{-3}[\tilde{\Delta}] = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Delta}(\beta, \gamma, z, \omega) e^{+i(\omega \beta + \gamma y + \omega t)} d\beta d\gamma d\omega \quad (2.8)$$

Fourier 変換の性質

$$\mathcal{F}^3 \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \Delta \right] = \{i\beta, i\gamma, i\omega\} \tilde{\Delta}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (2.9)$$

を用いると (2.3) 式の三重 Fourier 変換は,

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \{(\beta^2 + \gamma^2) - h^2\} \right] \tilde{\Delta} = 0 \quad (2.10)$$

となってその解は次式で与えられる。

$$\bar{J} = Ae^{-\alpha_1 z} + A'e^{+\alpha_1 z} \dots\dots\dots(2.11)$$

ここに,

$$\alpha_1^2 = \beta^2 + \gamma^2 - h^2, \quad h^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} \dots\dots\dots(2.12)$$

上式において右辺の第二項は z の増加とともに指数関数的に増大するから、物理的条件に適合するようにこの項を除く。言い換えると、 $A' = 0$ とおくことにより深さ z 方向の無限遠における境界条件を満足させるわけである。したがって (2.10) 式の解は、

$$\bar{J} = Ae^{-\alpha_1 z} \dots\dots\dots(2.13)$$

ここで、変位成分 u, v, w の三重 Fourier 変換を導入する。

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) \supset \tilde{u}(\beta, \gamma, z, \omega), & \mathcal{F}^3[u] = \tilde{u} \\ v(x, y, z, t) \supset \tilde{v}(\beta, \gamma, z, \omega), & \mathcal{F}^3[v] = \tilde{v} \\ w(x, y, z, t) \supset \tilde{w}(\beta, \gamma, z, \omega), & \mathcal{F}^3[w] = \tilde{w} \end{cases} \dots\dots\dots(2.14)$$

(2.13) 式および (2.14) 式を適用すると、(2.1) 式の三重 Fourier 変換は、

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \alpha_2^2\right) \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\} = \{-i\beta, -i\gamma, \alpha_1\} \left(\frac{\kappa^2}{h^2} - 1\right) Ae^{-\alpha_1 z} \dots\dots\dots(2.15)$$

ここに、

$$\begin{cases} \alpha_2^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \kappa^2, & \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}, & \frac{\kappa^2}{h^2} - 1 = \frac{c_1^2}{c_2^2} - 1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \\ c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; & \text{地盤内を伝播する剪断波の速度} \end{cases} \dots\dots\dots(2.16)$$

(2.15) 式の解は次式で与えられる。

$$\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\} = \{-i\beta, -i\gamma, \alpha_1\} \frac{A}{h^2} e^{-\alpha_1 z} + \{B, C, D\} e^{-\alpha_2 z} \dots\dots\dots(2.17)$$

上式で $e^{+\alpha_2 z}$ の項をおとしているのは (2.13) 式の場合と同じ理由による。dilatation と変位成分との関係 (2.2) 式の三重 Fourier 変換は、(2.9) 式の性質を用いて、

$$\bar{J} = i\beta u + i\gamma v + \frac{d\tilde{w}}{dz} \dots\dots\dots(2.18)$$

dilatation の解 (2.13) 式および変位成分の解 (2.17) 式を代入すれば、

$$(i\beta B + i\gamma C - \alpha_2 D) e^{-\alpha_2 z} = 0 \dots\dots\dots(2.19)$$

これは z に関する恒等式であるから、

$$D = \frac{i}{\alpha_2} (\beta B + \gamma C) \dots\dots\dots(2.20)$$

この関係を (2.17) 式に代入して逆変換を行なえば、変位成分の解が次式のように求められる。

$$\{u, v, w\} = \mathcal{F}^{-3} \left[\{-i\beta, -i\gamma, \alpha_1\} \frac{A}{h^2} e^{-\alpha_1 z} + \left\{ B, C, \frac{i}{\alpha_2} (\beta B + \gamma C) \right\} e^{-\alpha_2 z} \right] \dots\dots\dots(2.21)$$

ここに、 A, B, C は境界条件から定められる未定常数である。

一方、応力成分の解は (2.21) 式を用いて、

$$\begin{aligned} \tau_{zz} &= \mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \mu \mathcal{F}^{-3} \left[i\beta \tilde{w} + \frac{d\tilde{u}}{dz} \right] \\ &= -\mu \mathcal{F}^{-3} \left[-\frac{2i\alpha_1\beta}{h^2} Ae^{-\alpha_1 z} + \frac{1}{\alpha_2} \{(\beta^2 + \alpha_2^2)B + \beta\gamma C\} e^{-\alpha_2 z} \right] \dots\dots\dots(2.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \mathcal{F}^{-3} \left[i\gamma \tilde{w} + \frac{d\tilde{v}}{dz} \right] \\ &= -\mu \mathcal{F}^{-3} \left[-\frac{2i\alpha_1\gamma}{h^2} Ae^{-\alpha_1 z} + \frac{1}{\alpha_2} \{\beta\gamma B + (\gamma^2 + \alpha_2^2)C\} e^{-\alpha_2 z} \right] \dots\dots\dots(2.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \lambda A + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = \mathcal{F}^{-3} \left[\lambda \tilde{A} + 2\mu \frac{d\tilde{w}}{dz} \right] \\ &= -\mu \mathcal{F}^{-3} \left[(2\alpha_2^2 + \kappa^2) \frac{A}{h^2} e^{-\alpha_1 z} + 2i(\beta B + \gamma C) e^{-\alpha_2 z} \right] \dots\dots\dots(2.24) \end{aligned}$$

境界条件の計算に用いる必要から $z=0$ 平面上での応力成分を求めておく。

$$\tau_{xz}|_{z=0} = -\mu \mathcal{F}^{-3} \left[-\frac{2i\alpha_1\beta}{h^2} A + \frac{1}{\alpha_2} \{(\beta^2 + \alpha_2^2) B + \beta\gamma C\} \right] \dots\dots\dots(2.25)$$

$$\tau_{yz}|_{z=0} = -\mu \mathcal{F}^{-3} \left[-\frac{2i\alpha_1\gamma}{h^2} A + \frac{1}{\alpha_2} \{\beta\gamma B + (\gamma^2 + \alpha_2^2) C\} \right] \dots\dots\dots(2.26)$$

$$\sigma_z|_{z=0} = -\mu \mathcal{F}^{-3} \left[\frac{2\alpha_2^2 + \kappa^2}{h^2} A + 2i(\beta B + \gamma C) \right] \dots\dots\dots(2.27)$$

3. Ground Compliance の解析的表現

3. 1. 境界条件の導入

半無限地盤の表面における境界条件は、厳密には基礎下の載荷面においては変位によりその他の部分では応力によって定められるが、この扱いをすれば問題は連立方程式を解く所謂混合境界値問題となって、動的な場合の解を得ることは極めて困難になる。ここでは既往論文と同じように基礎下の応力分布を適当に仮定し、表面における境界条件を応力で統一して表示する手法をとる。円形基礎の問題ではこの目的のために表面における応力の Fourier-Bessel 展開が必要であったが、ここでは Fourier 変換がその役割を果してくれる。

表面 $z=0$ における応力を $q_i(x, y, t)$ [I は加振力の型を示し, V, H, R, T により垂直・水平・回転・振れの各場合を表記する] で表わすと、その三重 Fourier 変換は、

$$\mathcal{F}^3[q_i(x, y, t)] = \bar{q}_i(\beta, \gamma, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q_i(x, y, t) e^{-i(\beta x + \gamma y + \omega t)} dx dy dt \dots(3.1)$$

ここで、応力 $q_i(x, y, t)$ の time factor が分離できると仮定すれば、

$$q_i(x, y, t) = q_i(x, y) \cdot Q(t) \dots\dots\dots(3.2)$$

$Q(t)$ の時間 t に関する Fourier 変換を $\bar{Q}(\omega)$ で表わすと、

$$\bar{Q}(\omega) = \mathcal{F}_t[Q(t)] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) e^{-i\omega t} dt \dots\dots\dots(3.3)$$

したがって、 $q_i(x, y, t)$ の三重 Fourier 変換は次式のようなになる。

$$\bar{q}_i(\beta, \gamma, \omega) = \frac{\bar{Q}(\omega)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q_i(x, y) e^{-i(\beta x + \gamma y)} dx dy \dots\dots\dots(3.4)$$

加振力の型に対応する地表面での境界条件を次のように仮定する。

(1) 垂直加振の場合 (z 方向)

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & (|x| > b, |y| > c) \\ -q_{0V} \cdot Q(t) & (|x| \leq b, |y| \leq c) \end{cases}, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \dots\dots\dots(3.5)$$

その三重 Fourier 変換は (3.4) 式を適用して、

$$\bar{\sigma}_z = -\frac{q_{0V}}{2\pi} \bar{Q}(\omega) \int_{-b}^b e^{-i\beta x} dx \int_{-c}^c e^{-i\gamma y} dy = -\frac{4q_{0V}}{2\pi} \left(\frac{\sin \beta b \cdot \sin \gamma c}{\beta \gamma} \right) \bar{Q}(\omega), \quad \bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{yz} = 0 \dots\dots\dots(3.5)'$$

(2) 水平加振の場合 (x 方向)

$$\tau_{xz} = \begin{cases} 0 & (|x| > b, |y| > c) \\ -q_{0H} \cdot Q(t) & (|x| \leq b, |y| \leq c) \end{cases}, \quad \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \dots\dots\dots(3.6)$$

すなわち、

$$\bar{\tau}_{xz} = -\frac{4q_{0H}}{2\pi} \left(\frac{\sin \beta b \cdot \sin \gamma c}{\beta \gamma} \right) \bar{Q}(\omega), \quad \bar{\sigma}_z = \bar{\tau}_{yz} = 0 \dots\dots\dots(3.6)'$$

(3) 回転加振の場合 (回転軸; y 軸)

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & (|x| > b, |y| > c) \\ -q_{0R} \cdot \frac{x}{b} \cdot Q(t) & (|x| \leq b, |y| \leq c) \end{cases}, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \dots\dots\dots(3.7)$$

すなわち,

$$\bar{\sigma}_z = i \frac{4q_{0R}}{2\pi} \cdot \frac{\sin \gamma c}{\beta \gamma} \left(\frac{\sin \beta b}{\beta b} - \cos \beta b \right) \bar{Q}(\omega), \quad \bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{yz} = 0 \dots\dots\dots(3.7)'$$

(4) 捩れ加振の場合 (回転軸; z 軸)

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \begin{cases} 0 & (|x| > b, |y| > c) \\ q_{0T} \cdot \frac{y}{b} \cdot Q(t), \quad \tau_{yz} = \begin{cases} 0 & (|x| > b, |y| > c) \\ -q_{0T} \cdot \frac{x}{b} \cdot Q(t) & (|x| \leq b, |y| \leq c) \end{cases} \end{cases} \\ \sigma_z = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(3.8)$$

すなわち,

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{xz} = -i \frac{4q_{0T}}{2\pi} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin \beta b}{\beta \gamma} \left(\frac{\sin \gamma c}{\gamma c} - \cos \gamma c \right) \bar{Q}(\omega) \\ \bar{\tau}_{yz} = \frac{4q_{0T}}{2\pi} \cdot \frac{\sin \gamma c}{\beta \gamma} \left(\frac{\sin \beta b}{\beta b} - \cos \beta b \right) \bar{Q}(\omega), \quad \bar{\sigma}_z = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(3.8)'$$

ここに, $q_{0i} [i = V, H, R, T]$ は正の常数である。すなわち, 基礎下の応力分布について, 垂直および水平加振の場合は加振方向の応力を一様分布と仮定し, 回転加振では垂直応力を, 捩れ加振では径方向と直角な方向の剪断応力を, それぞれ原点からの距離に比例する三角型の分布と仮定しているわけである。なお, 各場合の加振力の振巾は次式で表わされる。

$$P_V = 4bcq_{0V}, \quad P_H = 4bcq_{0H}, \quad M_R = \frac{4}{3}b^2cq_{0R}, \quad M_T = \frac{4}{3}c(b^2 + c^2)q_{0T} \dots\dots\dots(3.9)$$

3. 2. 振動数方程式とその解

半無限地盤の表面 $z=0$ 上の応力 $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ をすべて零とおけば, その三重 Fourier 変換も零になるから, 表面上の応力成分の解 (2.25)~(2.27) 式より,

$$\begin{cases} -\frac{2i\alpha_1\beta}{h^2}A + \frac{1}{\alpha_2}\{(\beta^2 + \alpha_2^2)B + \beta\gamma C\} = 0 \\ -\frac{2i\alpha_1\gamma}{h^2}A + \frac{1}{\alpha_2}\{\beta\gamma B + (\gamma^2 + \alpha_2^2)C\} = 0 \\ \frac{2\alpha_2^2 + \kappa^2}{h^2}A + 2i(\beta B + \gamma C) = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(3.10)$$

A, B, C がともに零ではないという条件から, その係数のつくる行列式を零とおいて,

$$F(\beta, \gamma) = \{2(\beta^2 + \gamma^2) - \kappa^2\}^2 - 4\alpha_1\alpha_2(\beta^2 + \gamma^2) = 0 \dots\dots\dots(3.11)$$

ここで,

$$\xi^2 = \beta^2 + \gamma^2, \quad \xi; \text{ wave number, } \xi = \frac{\zeta}{\kappa} = \frac{c_2\zeta}{\omega} = \frac{c_2}{c_p}, \quad c_p = \frac{\omega}{\xi}; \text{ phase velocity } \dots\dots\dots(3.12)$$

$$n^2 = \frac{h^2}{\kappa^2} = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \quad \nu; \text{ 地盤の Poisson 比 } \dots\dots\dots(3.13)$$

なる変数変換と無次元量を導入すれば (3.11) 式は,

$$F(\xi) \equiv (2\xi^2 - 1)^2 - 4\xi^2\sqrt{\xi^2 - n^2}\sqrt{\xi^2 - 1} = 0 \dots\dots\dots(3.14)$$

(3.11) 式または (3.14) 式はこの場合の振動数方程式で、 $F(\beta, \gamma)$ または $F(\xi)$ は半無限体の振動問題に現われる Rayleigh function と呼ばれるものである。(3.14) 式の解 ξ_0 (Rayleigh pole) は剪断波の速度に対する Rayleigh 波の速度の比の逆数を表わし、地盤の Poisson 比 ν のみの関数となる。一例を示すと、

$$\left\{ \begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2} (\nu^2=0, \lambda=\infty); & \xi_0 &= 1.04678, c_p=0.955311c_2 \\ \nu &= \frac{1}{3} (\nu^2=\frac{1}{4}, \lambda=2\mu); & \xi_0 &= 1.07236, c_p=0.932523c_2 \\ \nu &= \frac{1}{4} (\nu^2=\frac{1}{3}, \lambda=\mu); & \xi_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{3}}=1.08766, c_p=0.919405c_2 \\ \nu &= 0 (\nu^2=\frac{1}{2}, \lambda=0); & \xi_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}=1.14412, c_p=0.874034c_2 \end{aligned} \right. \dots\dots\dots(3.15)$$

3. 3. 地盤の表面における変位成分の解

(1) 垂直加振

境界条件 (3.5)' 式を表面における応力成分の解 (2.25)~(2.27) 式に代入すると、

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{2i\alpha_1\beta}{h^2}A + \frac{\beta^2 + \alpha_2^2}{\alpha_2}B + \frac{\beta\gamma}{\alpha_2}C &= 0 \\ -\frac{2i\alpha_1\gamma}{h^2}A + \frac{\beta\gamma}{\alpha_2}B + \frac{\gamma^2 + \alpha_2^2}{\alpha_2}C &= 0 \\ \frac{2\alpha_2^2 + \kappa^2}{h^2}A + 2i\beta B + 2i\gamma C &= \frac{4q_0\nu}{2\pi\mu} \left(\frac{\sin \beta b \cdot \sin \gamma c}{\beta\gamma} \right) \bar{Q}(\omega) \equiv K_V \end{aligned} \right. \dots\dots\dots(3.16)$$

これを解いて A, B, C を求めれば、

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{h^2(2\alpha_2^2 + \kappa^2)}{F(\beta, \gamma)} K_V \\ B &= i \frac{2\alpha_1\alpha_2\beta}{F(\beta, \gamma)} K_V, \quad [F(\beta, \gamma); (3.11) \text{ 式}] \\ C &= i \frac{2\alpha_1\alpha_2\gamma}{F(\beta, \gamma)} K_V \end{aligned} \right. \dots\dots\dots(3.17)$$

これを変位成分の解 (2.21) 式に代入し、表面 $z=0$ における変位成分の解を求めると、

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \mathcal{F}^{-3} \left[-i \frac{\beta(2\alpha_2^2 + \kappa^2 - 2\alpha_1\alpha_2)}{F(\beta, \gamma)} K_V \right] \\ v &= \mathcal{F}^{-3} \left[-i \frac{\gamma(2\alpha_2^2 + \kappa^2 - 2\alpha_1\alpha_2)}{F(\beta, \gamma)} K_V \right] \\ w &= \mathcal{F}^{-3} \left[-\frac{\alpha_1\kappa^2}{F(\beta, \gamma)} K_V \right] \end{aligned} \right. \dots\dots\dots(3.18)$$

(3.9) 式の関係により一定応力 $q_0\nu$ を加振力の振巾に変えて、三重 Fourier 逆変換の定義 (2.8) 式を適用すれば、

$$\begin{aligned} u &= -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} i \frac{P_V}{2\pi\mu bc} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(2\alpha_2^2 + \kappa^2 - 2\alpha_1\alpha_2)}{F(\beta, \gamma)} S(\beta, \gamma) \bar{Q}(\omega) e^{+i(\omega\beta + \nu\gamma + t\omega)} d\beta d\gamma d\omega \\ &= \frac{P_V}{\pi^2\mu bc} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\beta(2\alpha_2^2 + \kappa^2 - 2\alpha_1\alpha_2)}{F(\beta, \gamma)} S(\beta, \gamma) \sin x\beta \cdot \cos y\gamma \\ &\quad \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \dots\dots\dots(3.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{P_V}{\pi^2\mu bc} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\gamma(2\alpha_2^2 + \kappa^2 - 2\alpha_1\alpha_2)}{F(\beta, \gamma)} S(\beta, \gamma) \cos x\beta \cdot \sin y\gamma \\ &\quad \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \dots\dots\dots(3.20) \end{aligned}$$

$$w = -\frac{P_V}{\pi^2 \mu b c} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\alpha_1 \kappa^2}{F(\beta, \gamma)} S(\beta, \gamma) \cos x\beta \cdot \cos y\gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \cdots (3.21)$$

ここに,

$$S(\beta, \gamma) = \frac{\sin \beta b \cdot \sin \gamma c}{\beta \gamma} \cdots \cdots (3.22)$$

(2) 水平加振

境界条件 (3.6)' 式を表面における応力成分の解 (2.25)~(2.27) 式に代入し, 未定常数 A, B, C を求める,

$$\begin{cases} A = -i \frac{2\beta \alpha_2 h^2}{F(\beta, \gamma)} K_H \\ B = \frac{(2\alpha_2^2 + \kappa^2)(\gamma^2 + \alpha_2^2) - 4\alpha_1 \alpha_2 \gamma^2}{\alpha_2 F(\beta, \gamma)} K_H \\ C = -\frac{\beta \gamma (2\alpha_2^2 + \kappa^2 - 4\alpha_1 \alpha_2)}{\alpha_2 F(\beta, \gamma)} K_H \end{cases} \cdots \cdots (3.23)$$

ここに,

$$K_H = \frac{4q_0 H}{2\pi \mu} S(\beta, \gamma) \bar{Q}(\omega) \cdots \cdots (3.24)$$

これを (2.21) 式に代入すると, 表面における変位成分の解は,

$$\begin{cases} u = \mathcal{F}^{-3} \left[\frac{\gamma^2 F(\beta, \gamma) - \beta^2 \kappa^2 \alpha_2^2}{(\beta^2 + \gamma^2) \alpha_2 F(\beta, \gamma)} K_H \right] \\ v = \mathcal{F}^{-3} \left[\frac{\beta \gamma \{F(\beta, \gamma) - \kappa^2 \alpha_2^2\}}{(\beta^2 + \gamma^2) \alpha_2 F(\beta, \gamma)} K_H \right] \\ w = \mathcal{F}^{-3} \left[\frac{i \beta \{F(\beta, \gamma) + \kappa^2 (2\alpha_2^2 + \kappa^2)\}}{2(\beta^2 + \gamma^2) \alpha_2 F(\beta, \gamma)} K_H \right] \end{cases} \cdots \cdots (3.25)$$

すなわち,

$$u = -\frac{P_H}{\pi^2 \mu b c} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\gamma^2 F(\beta, \gamma) - \beta^2 \kappa^2 \alpha_2^2}{(\beta^2 + \gamma^2) \alpha_2 F(\beta, \gamma)} S(\beta, \gamma) \cos x\beta \cdot \cos y\gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \cdots \cdots (3.26)$$

$$v = -\frac{P_H}{\pi^2 \mu b c} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\beta \gamma \{F(\beta, \gamma) - \kappa^2 \alpha_2^2\}}{(\beta^2 + \gamma^2) \alpha_2 F(\beta, \gamma)} S(\beta, \gamma) \sin x\beta \cdot \sin y\gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \cdots \cdots (3.27)$$

$$w = -\frac{P_H}{\pi^2 \mu b c} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\beta \{F(\beta, \gamma) + \kappa^2 (2\alpha_2^2 + \kappa^2)\}}{2(\beta^2 + \gamma^2) \alpha_2 F(\beta, \gamma)} S(\beta, \gamma) \sin x\beta \cdot \cos y\gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \cdots \cdots (7.28)$$

(3) 回転加振

垂直加振の場合の K_V のところに

$$K_R = -i \frac{4q_0 R}{2\pi \mu} \cdot \frac{S(\beta, \gamma)}{\sin \beta b} N(\beta b) \bar{Q}(\omega) \cdots \cdots (3.29)$$

ここに,

$$N(X) = \frac{\sin X}{X} - \cos X \cdots \cdots (3.30)$$

を代入すれば, (3.16)~(3.18) 式がそのまま成り立つ。

したがって表面における変位成分の解は,

$$u = \frac{3M_R}{\pi^2 \mu b^2 c} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\beta (2\alpha_2^2 + \kappa^2 - 2\alpha_1 \alpha_2)}{F(\beta, \gamma)} \cdot \frac{S(\beta, \gamma)}{\sin \beta b} N(\beta b) \cos x\beta \cdot \cos y\gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \cdots \cdots (3.31)$$

$$v = -\frac{3M_T}{\pi^2 \mu b^2 c} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\gamma(2\alpha_2^2 + \kappa^2 - 2\alpha_1\alpha_2)}{F(\beta, \gamma)} \cdot \frac{S(\beta, \gamma)}{\sin \beta b} N(\beta b) \sin x\beta \cdot \sin y\gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \quad \dots\dots\dots(3.32)$$

$$w = -\frac{3M_T}{\pi^2 \mu b^2 c} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\alpha_1 \kappa^2}{F(\beta, \gamma)} \cdot \frac{S(\beta, \gamma)}{\sin \beta b} N(\beta b) \sin x\beta \cdot \cos y\gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \quad \dots\dots\dots(3.33)$$

(4) 振れ加振

境界条件 (3.8)' 式と (2.25)~(2.27) 式より未定常数 A, B, C を求めれば,

$$\begin{cases} A = -i \frac{2h^2 \alpha_2 (\beta K_{1T} + \gamma K_{2T})}{F(\beta, \gamma)} \\ B = \frac{\{(2\alpha_2^2 + \kappa^2)(\gamma^2 + \alpha_2^2) - 4\alpha_1 \alpha_2 \gamma^2\} K_{1T} - \beta \gamma \{(2\alpha_2^2 + \kappa^2) - 4\alpha_1 \alpha_2\} K_{2T}}{\alpha_2 F(\beta, \gamma)} \quad \dots\dots\dots(3.34) \\ C = \frac{-\beta \gamma \{(2\alpha_2^2 + \kappa^2) - 4\alpha_1 \alpha_2\} K_{1T} + \{(2\alpha_2^2 + \kappa^2)(\beta^2 + \alpha_2^2) - 4\alpha_1 \alpha_2 \beta^2\} K_{2T}}{\alpha_2 F(\beta, \gamma)} \end{cases}$$

ここに,

$$K_{1T} = i \frac{4q_0 T}{2\pi \mu} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{S(\beta, \gamma)}{\sin \gamma c} N(\gamma c) \bar{Q}(\omega), \quad K_{2T} = -i \frac{4q_0 T}{2\pi \mu} \cdot \frac{S(\beta, \gamma)}{\sin \beta b} N(\beta b) \bar{Q}(\omega) \quad (3.35)$$

これより表面における変位成分の解は,

$$\begin{cases} u = \mathcal{F}^{-3} \left[\frac{4\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \kappa^2}{\alpha_2 F(\beta, \gamma)} \gamma (\gamma K_{1T} - \beta K_{2T}) - \frac{\kappa^2 \alpha_2}{F(\beta, \gamma)} K_{1T} \right] \\ v = \mathcal{F}^{-3} \left[-\frac{4\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \kappa^2}{\alpha_2 F(\beta, \gamma)} \beta (\gamma K_{1T} - \beta K_{2T}) - \frac{\kappa^2 \alpha_2}{F(\beta, \gamma)} K_{2T} \right] \quad \dots\dots\dots(3.36) \\ w = \mathcal{F}^{-3} \left[i \frac{2\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \kappa^2}{F(\beta, \gamma)} (\beta K_{1T} + \gamma K_{2T}) \right] \end{cases}$$

すなわち,

$$u = -\frac{3M_T}{\pi^2 \mu (b^2 + c^2) c} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\frac{4\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \kappa^2}{\alpha_2 F(\beta, \gamma)} (\gamma K'_{1T} + \beta K'_{2T}) - \frac{\kappa^2 \alpha_2}{F(\beta, \gamma)} K'_{1T} \right] \cos x\beta \cdot \sin y\gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \quad \dots\dots(3.37)$$

$$v = \frac{3M_T}{\pi^2 \mu (b^2 + c^2) c} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\frac{4\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \kappa^2}{\alpha_2 F(\beta, \gamma)} (\gamma K'_{1T} + \beta K'_{2T}) - \frac{\kappa^2 \alpha_2}{F(\beta, \gamma)} K'_{2T} \right] \sin x\beta \cdot \cos y\gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \quad \dots\dots\dots(3.38)$$

$$w = \frac{3M_T}{\pi^2 \mu (b^2 + c^2) c} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \kappa^2}{F(\beta, \gamma)} (\beta K'_{1T} - \gamma K'_{2T}) \cdot \sin x\beta \sin y\gamma \cdot \bar{Q}(\omega) e^{+it\omega} d\beta d\gamma d\omega \quad \dots\dots\dots(3.39)$$

ここに,

$$K'_{1T} = \frac{c}{b} \cdot \frac{S(\beta, \gamma)}{\sin \gamma c} N(\gamma c), \quad K'_{2T} = \frac{S(\beta, \gamma)}{\sin \beta b} N(\beta b) \quad \dots\dots\dots(3.35)'$$

3. 4. Dynamical Ground Compliance の定義とその解析的表現

前節で得られた表面における変位成分の解は次のような一般形式で表わすことができる。

$$\bar{U}(\omega) = P_i \bar{Q}(\omega) \cdot \bar{J}_i(\omega), \quad U(t) = P_i Q(t) \cdot J_i(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} P_i Q(\tau) \cdot J_i(t - \tau) d\tau \quad (3.40)$$

ここに,

$$\begin{cases} \bar{U}(\omega) = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\} = \mathcal{F}_t[\{u, v, w\}] = \mathcal{F}_t[U(t)] \\ \bar{J}_i(\omega) = \mathcal{F}_t[J_i(t)], \quad [i = V, H, R, T] \end{cases} \quad \dots\dots\dots(3.41)$$

$\bar{J}_i(\omega)$ は時間 t に関する入力 Fourier 変換 $P_i Q(\omega)$ と出力 Fourier 変換 $\bar{U}(\omega)$ との比になっているから、この系の伝達関数である。したがって、time factor を

$$P_i Q(t) = \delta(t), \quad \delta(t); \text{Dirac の delta 関数} \dots\dots\dots(3.42)$$

とおけば (3.40) 式より、

$$U(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot J_i(t-\tau) d\tau = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} J_i(t) \dots\dots\dots(3.43)$$

これがこの系の impulsive response になる。

一方 time factor を

$$Q(t) = e^{i\omega t} \dots\dots\dots(3.44)$$

とおけばその Fourier 変換は、

$$\bar{Q}(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega' - \omega)t} dt = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} 2\pi \delta(\omega' - \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \delta(\omega' - \omega) \dots\dots\dots(3.45)$$

となるから $\bar{U}(\omega)$ の逆変換を求めれば、

$$U(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} P_i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \delta(\omega' - \omega) \bar{J}_i(\omega) e^{+it\omega} d\omega = P_i e^{it\omega} \bar{J}_i(\omega') \dots\dots\dots(3.46)$$

言い換えると、 $\bar{J}_i(\omega)$ は time factor を $Q(t) = e^{i\omega t}$ とおいたときの加振力 $P_i e^{i\omega t}$ に対する変位 $U(t)$ の比である。そこで、自重を無視した長方形基礎に種々の加振力が作用したときの半無限弾性地盤の動特性を概括的に表現するために、加振方向の基礎の変位成分に関する $\bar{J}_i(\omega)$ の成分を求めて、これを弾性地盤上の長方形基礎に関する “Dynamical Ground Compliance” と定義する。これは剛性 (Stiffness) の逆数の元をもち、弾性地盤の伝達関数を表わしており、これを知れば (3.40) 式より任意の非定常な加振力 $P_i Q(t)$ に対する加振方向の変位応答を求めることができる。

加振方向の基礎の変位として次に示す載荷面の地盤の変位を代表的に採用する。

$$\begin{cases} (1) \text{ 垂直加振} & w_0 = w |_{x=y=z=0} \\ (2) \text{ 水平加振} & u_0 = u |_{x=y=z=0} \\ (3) \text{ 回転加振} & \phi = w |_{x=b, y=z=0/b} \\ (4) \text{ 振れ加振} & \psi = v |_{x=b, y=z=0/b} \end{cases} \dots\dots\dots(3.47)$$

すなわち、垂直および水平加振については基礎中心の加振方向の変位を、回転加振では回転軸に平行な辺の midpoint の垂直変位を軸からその点までの距離で除した平均回転角を、そして振れ加振では、回転加振の場合と同じ点の y 方向の変位を軸からその点までの距離で除した平均振れ角を、それぞれ採用したわけである。

前節で得られた表面における変位成分の解を表わす各式から導いた Dynamical Ground Compliance の解析的表現は次のようになる。

(1) 垂直加振

$$\frac{w_0}{P_V e^{i\omega t}} = \frac{-1}{\pi^2 \mu b^3 c} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha_1 \kappa^2}{F(\beta, \gamma)} S(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \dots\dots\dots(3.48)$$

(2) 水平加振

$$\frac{u_0}{P_H e^{i\omega t}} = \frac{1}{\pi^2 \mu b^3 c} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma^2 F(\beta, \gamma) - \kappa^2 \alpha_2^2 \beta^2}{(\beta^2 + \gamma^2) \alpha_2 F(\beta, \gamma)} S(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \dots\dots\dots(3.49)$$

(3) 回転加振

$$\frac{\phi}{M_R e^{i\omega t}} = \frac{-3}{\pi^2 \mu b^3 c} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha_1 \kappa^2}{F(\beta, \gamma)} N(\beta b) \cdot S(\beta, \gamma) d\beta d\gamma \dots\dots\dots(3.50)$$

(4) 振れ加振

$$\frac{\psi}{M_T e^{i\omega t}} = \frac{3}{\pi^2 \mu (b^2 + c^2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\alpha_2 F(\beta, \gamma)} [\beta^2 \{4\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \kappa^2\} \cdot \{T_1(\beta, \gamma) + T_2(\beta, \gamma)\} - \kappa^2 \alpha_2^2 T_1(\beta, \gamma)] d\beta d\gamma \dots\dots\dots(3.51)$$

ここに,

$$T_1(\beta, \gamma) = \left(\frac{\sin \beta b}{\beta b}\right)^2 N(\gamma c), \quad T_2(\beta, \gamma) = \left(\frac{\sin \beta b}{\beta b}\right) \left(\frac{\sin \gamma c}{\gamma c}\right) N(\beta b) \dots \dots \dots (3.52)$$

以上の表現には二重無限積分が含まれているが,

$$\beta = \zeta \cos \theta, \quad \gamma = \zeta \sin \theta, \quad \beta^2 + \gamma^2 = \zeta^2 \dots \dots \dots (3.53)$$

なる変数変換によって一方の無限積分を有限積分になおすことができる。その結果は,

(1) 垂直加振

$$\frac{w_0}{P_V e^{i\omega t}} = \frac{-1}{\pi^2 \mu b c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \left[\frac{\kappa^2 \sqrt{\zeta^2 - n^2 \kappa^2}}{\zeta F(\zeta)} S(\zeta, \theta) d\zeta d\theta \dots \dots \dots (3.54)$$

(2) 水平加振

$$\frac{u_0}{P_H e^{i\omega t}} = \frac{1}{\pi^2 \mu b c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin^2 \theta}{\zeta \sqrt{\zeta^2 - \kappa^2}} - \frac{\kappa^2 \sqrt{\zeta^2 - \kappa^2}}{\zeta F(\zeta)} \cos^2 \theta \right] S(\zeta, \theta) d\zeta d\theta \dots \dots \dots (3.55)$$

(3) 回転加振

$$\frac{\phi}{M_R e^{i\omega t}} = \frac{-3}{\pi^2 \mu b^3 c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\kappa^2 \sqrt{\zeta^2 - n^2 \kappa^2}}{\zeta F(\zeta)} N(b \zeta \cos \theta) S(\zeta, \theta) d\zeta d\theta \dots \dots \dots (3.56)$$

(4) 捩れ加振

$$\frac{\psi}{M_T e^{i\omega t}} = \frac{3}{\pi^2 \mu (b^2 + c^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \left[\frac{4\zeta^3 (\sqrt{\zeta^2 - \kappa^2} - \sqrt{\zeta^2 - n^2 \kappa^2})}{F(\zeta)} + \frac{\kappa^2 \zeta^3}{\sqrt{\zeta^2 - \kappa^2} F(\zeta)} \right] \\ \cdot \cos^2 \theta \cdot \{T_1(\zeta, \theta) + T_2(\zeta, \theta)\} - \frac{\kappa^2 \zeta \sqrt{\zeta^2 - \kappa^2}}{F(\zeta)} T_1(\zeta, \theta) \Big] d\zeta d\theta \dots \dots \dots (3.57)$$

ここに,

$$\left\{ \begin{aligned} F(\zeta) &= (2\zeta^2 - \kappa^2)^2 - 4\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - n^2 \kappa^2} \sqrt{\zeta^2 - \kappa^2} \\ S(\zeta, \theta) &= \frac{\sin(b \zeta \cos \theta) \cdot \sin(c \zeta \sin \theta)}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \\ T_1(\zeta, \theta) &= \left\{ \frac{\sin(b \zeta \cos \theta)}{b \zeta \cos \theta} \right\}^2 N(c \zeta \sin \theta) \dots \dots \dots (3.58) \\ T_2(\zeta, \theta) &= \left\{ \frac{\sin(b \zeta \cos \theta)}{b \zeta \cos \theta} \right\} \left\{ \frac{\sin(c \zeta \sin \theta)}{c \zeta \sin \theta} \right\} N(b \zeta \cos \theta) \\ n^2 &: (3.13) \text{ 式} \end{aligned} \right.$$

さらに, 解析に便利なように次の変数変換

$$\xi = \zeta / \kappa \dots \dots \dots (3.59)$$

を導入し, 式全体の無次元化を行なうと,

(1) 垂直加振

$$\frac{w_0}{P_V e^{i\omega t}} \cdot b \mu = \frac{-1}{\pi^2 a_0 \frac{c}{b}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\xi^2 - n^2}}{\xi F(\xi)} S(\xi, \theta) d\xi d\theta \dots \dots \dots (3.60)$$

(2) 水平加振

$$\frac{u_0}{P_H e^{i\omega t}} \cdot b \mu = \frac{1}{\pi^2 a_0 \frac{c}{b}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin^2 \theta}{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi F(\xi)} \cos^2 \theta \right] S(\xi, \theta) d\xi d\theta \dots \dots \dots (3.61)$$

(3) 回転加振

$$\frac{\phi}{M_{\kappa} e^{i\omega t}} \cdot \frac{b^3 \mu}{3} = \frac{-1}{\pi^2 a_0 \frac{c}{b}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\xi^2 - n^2}}{\xi F(\xi)} N(a_0 \xi \cos \theta) \cdot S(\xi, \theta) d\xi d\theta \dots\dots\dots(3.62)$$

(4) 揺れ加振

$$\frac{\psi}{M_{\tau} e^{i\omega t}} \cdot \frac{b^3 \mu}{3} = \frac{a_0}{\pi^2 \left[1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2\right]} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} [M_1(\xi, \theta) + M_2(\xi, \theta) + M_3(\xi, \theta)] d\xi d\theta \dots\dots\dots(3.63)$$

ここに,

$$\left\{ \begin{aligned} S(\xi, \theta) &= \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta) \cdot \sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\cos \theta \cdot \sin \theta}, \quad [F(\xi); (3.14) \text{ 式}] \\ M_1(\xi, \theta) &= \frac{4\xi^3 (\sqrt{\xi^2 - 1} - \sqrt{\xi^2 - n^2})}{F(\xi)} \cos^2 \theta \{T_1(\xi, \theta) + T_2(\xi, \theta)\} \\ M_2(\xi, \theta) &= \frac{\xi^3}{\sqrt{\xi^2 - 1} F(\xi)} \{\cos^2 \theta T_1(\xi, \theta) - \sin^2 \theta T_2(\xi, \theta)\} \\ M_3(\xi, \theta) &= \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1} F(\xi)} T_2(\xi, \theta) \dots\dots\dots(3.64) \\ T_1(\xi, \theta) &= \left\{ \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} \right\}^2 N\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right) \\ T_2(\xi, \theta) &= \left\{ \frac{\sin(a_0 \xi \cos \theta)}{a_0 \xi \cos \theta} \right\} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta\right)}{\frac{c}{b} a_0 \xi \sin \theta} \right\} N(a_0 \xi \cos \theta) \\ a_0 = \kappa b &= \frac{\omega}{c_2} b = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} b \end{aligned} \right.$$

3. 5. Statical Ground Compliance の定義とその解析的表現

前節で得られた Dynamical Ground Compliance の解析的表現の各式において、加振力の振動数 $\omega \rightarrow 0$ の極限值を “Statical Ground Compliance” と定義する。前節の最終的な解析的表現 (3.60)~(3.63) 式は積分変数 $\xi = \zeta/\kappa = \zeta \cdot c_2/\omega$ の分母に ω を含むから、極限值を求める計算には不適当であるが、(3.59) 式の変数変換以前に戻って (3.54)~(3.57) 式を用いれば $\omega \rightarrow 0$ の極限值を計算することができる。

(1) 垂直加振

(3.54) 式から明らかなように、 $\omega \rightarrow 0$ (i.e. $\kappa \rightarrow 0$) のときには被積分関数の κ を含む部分は不定形になる。すなわち、

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\kappa^2 \sqrt{\xi^2 - n^2 \kappa^2}}{\xi F(\xi)} = \frac{0}{0}$$

そこで、分母分子を κ に関して別々に微分して $\kappa \rightarrow 0$ とおく、不定形の極限值を求めるときによく用いられる “L'Hospital の定理” を適用すると、極限値は、

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\kappa^2 \sqrt{\xi^2 - n^2 \kappa^2}}{\xi F(\xi, \kappa)} = \frac{-1}{2(1-n^2)\xi^2} \dots\dots\dots(3.65)$$

これをもとの式に代入すると、

$$\frac{w_0}{P_V} \cdot b \mu = \frac{1}{\pi^2 c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2(1-n^2)} \left\{ \frac{\sin(b \xi \cos \theta) \cdot \sin(c \xi \sin \theta)}{\xi^2 \cos \theta \cdot \sin \theta} \right\} d\xi d\theta \dots\dots\dots(3.66)$$

一方、定積分表³²⁾によれば、

$$\int_0^\infty \sin qx \cdot \sin px \frac{dx}{x^2} = \begin{cases} \frac{1}{2}q\pi & (p \geq q) \\ \frac{1}{2}p\pi & (p \leq q) \end{cases} \dots\dots\dots(3.67)$$

これを (3.66) 式に適用すれば、

$$\begin{aligned} f_{SV} &= \frac{w_0}{P_V} \cdot b\mu = \frac{1}{4\pi(1-n^2)} \frac{c}{b} \left[\frac{c}{b} \int_0^{\theta_1} \frac{d\theta}{\cos \theta} + \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \theta} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi(1-n^2)} \frac{c}{b} \left[\frac{c}{b} \log \left| \frac{1+\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right| + \log \left| \frac{1-\cos \theta_1}{\sin \theta_1} \right| \right] \dots\dots\dots(3.68) \end{aligned}$$

ここに、

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{b}{c} \dots\dots\dots(3.69)$$

(2) 水平加振

(3.55) 式から上述の (1) の場合と同じように $\omega \rightarrow 0$ の極限值を求めると、

$$\begin{aligned} f_{SH} &= \frac{u_0}{P_H} \cdot b\mu = \frac{1}{\pi^2 c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[\sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{2(1-n^2)} \right] \left\{ \frac{\sin(b\xi \cos \theta) \cdot \sin(c\xi \sin \theta)}{\xi^2 \cos \theta \cdot \sin \theta} \right\} d\xi d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{b}{c} \left[\frac{c}{b} \int_0^{\theta_1} \left\{ \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1-2n^2}{2(1-n^2)} \cos \theta \right\} d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2(1-n^2)} \cdot \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1-2n^2}{2(1-n^2)} \sin \theta \right\} d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{b}{c} \left[\frac{1-2n^2}{2(1-n^2)} \left(\cos \theta_1 - \frac{c}{b} \sin \theta_1 \right) + \frac{c}{b} \log \left| \frac{1+\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right| \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2(1-n^2)} \log \left| \frac{1-\cos \theta_1}{\sin \theta_1} \right| \right] \dots\dots\dots(3.70) \end{aligned}$$

(3) 回転加振

(3.56) 式から $\omega \rightarrow 0$ の極限值を求めれば、

$$\begin{aligned} f_{SR} &= \frac{\phi}{M_R} \cdot \frac{b^3}{3} = \frac{1}{\pi^2 c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{2(1-n^2)} \left\{ \frac{\sin(b\xi \cos \theta) \cdot \sin(c\xi \sin \theta)}{\xi^2 \cos \theta \cdot \sin \theta} \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{\sin(b\xi \cos \theta)}{b\xi \cos \theta} - \cos(b\xi \cos \theta) \right\} d\xi d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi^2(1-n^2)c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[\frac{\sin^2(b\xi \cos \theta) \cdot \sin(c\xi \sin \theta)}{\xi^3 \cos \theta \cdot \sin \theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin(2b\xi \cos \theta) \cdot \sin(c\xi \sin \theta)}{2\xi^3 \cos \theta \cdot \sin \theta} \right] d\xi d\theta \dots\dots(3.71) \end{aligned}$$

定積分表³²⁾によれば、

$$\int_0^\infty \sin^2 qx \cdot \sin px \frac{dx}{x^3} = \begin{cases} \frac{1}{2}q^2\pi & (p \geq 2q) \\ \frac{1}{8}(4pq - p^2)\pi & (p \leq 2q) \end{cases} \dots\dots\dots(3.72)$$

これを (3.71) 式に適用すると、

$$f_{SR} = \frac{1}{2\pi^2(1-n^2)} \cdot \frac{\pi}{4} \int_0^{\theta_2} \left[\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right] d\theta$$

$$= \frac{1}{16\pi(1-n^2)} \left[2 \log \left| \frac{1+\sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right| + \frac{c}{b} \left(1 - \frac{1}{\cos \theta_2} \right) \right] \dots\dots\dots(3.73)$$

ここに,

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(2 \frac{b}{c} \right) \dots\dots\dots(3.74)$$

(4) 振れ加振

(3.57) 式より極限值を求め, (3.72) 式および次の積分公式

$$\int_0^\infty \sin^2 qx \cdot \cos px \frac{dx}{x^2} = \begin{cases} 0 & (p \geq 2q) \\ \frac{\pi}{4} (2q - p) & (p \leq 2q) \end{cases} \dots\dots\dots(3.75)$$

を適用すると,

$$f_{ST} = \frac{\psi}{M_T} \cdot \frac{b^3 \mu}{3} = \frac{b}{\pi^2 \left\{ 1 + \left(\frac{c}{b} \right)^2 \right\}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[\cos^2 \theta \{ T_1(\zeta, \theta) + T_2(\zeta, \theta) \} \right. \\ \left. - \frac{1}{2(1-n^2)} \{ \cos^2 \theta T_1(\zeta, \theta) - \sin^2 \theta T_2(\zeta, \theta) \} \right] d\zeta d\theta$$

$$= \frac{1}{\left\{ 1 + \left(\frac{c}{b} \right)^2 \right\} \frac{c}{b}} \left[\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{c}{b} \int_0^{\theta_2} \cos \theta d\theta \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin \theta} - \sin \theta \right) d\theta + \frac{1}{2(1-n^2)} \cdot \frac{1}{2\pi} \right. \\ \left. \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{b} \int_0^{\theta_2} \left(\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta \right) d\theta + \int_{\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \theta - \frac{1}{\sin \theta} \right) d\theta \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{c}{b} \right)^2 \int_0^{\theta_2} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi \left\{ 1 + \left(\frac{c}{b} \right)^2 \right\} \frac{c}{b}} \left[\frac{c}{b} \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_2 - 2 \log \left| \frac{1 - \cos \theta_2}{\sin \theta_2} \right| \right. \\ \left. + \frac{1}{2(1-n^2)} \left\{ 2 \left(\log \left| \frac{1 - \cos \theta_2}{\sin \theta_2} \right| + \cos \theta_2 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c}{b} \left\{ \log \left| \frac{1 + \sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right| - \sin \theta_2 \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{b} \right)^2 \left(\frac{1}{\cos \theta_2} - 1 \right) \right\} \right] \dots\dots\dots(3.76)$$

4. Ground Compliance の数値解とその特性

4. 1. 数値積分の方法

無限積分を含む二重積分で表現される Dynamical Ground Compliance から analytic な解を得ることはほとんど不可能なので, その特性を明らかにするためには数値積分によって数値解を誘導するという方法をとらざるをえない。ここでは代表的に水平加振の場合について数値積分の方法を詳述する。他の三つの場合はこれと同じ方法がそのまま適用できるので省略する。

(3.61) 式から ξ に関する積分をとり出しこれを J で表わすと, J は二つの積分 J_1 および J_2 の差になっている。

$$J = J_1 \sin^2 \theta - J_2 \cos^2 \theta \dots\dots\dots(4.1)$$

ここに、

$$\begin{cases} J_1 = \int_0^\infty \frac{1}{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}} S(\xi, \theta) d\xi \\ J_2 = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi F(\xi)} S(\xi, \theta) d\xi \end{cases} \dots\dots\dots (4.2)$$

そこで、まず θ を固定して ξ に関する積分 J_1 および J_2 を計算し、その後 θ に関する積分を行えばよい。この二つの積分は数個の特異点をもつために複素平面に拡張し、以下に述べるような積分路をとって計算を行う。

< J_1 の積分>

J_1 は $\xi \geq 0$ に対して二つの特異点、

$\xi=0$ (極) および $\xi=1$ (分岐点、極)

をもっている。複素平面 $\xi+i\eta$ を採用して積分を考えると、これらの特異点はすべて正の実軸上にあり、しかも複素平面上で他に特異点をもたないから、Fig. 2 に示すような積分路をとれば“Cauchy の定理”によって、

$$\Gamma_1 + \Gamma_3 = 0 \dots\dots\dots (4.3)$$

そして、 $\xi=0$ まわりの円弧 ϵ に沿う積分は $\xi = \epsilon e^{i\varphi}$ とおいて (4.2) 式に代入し $\epsilon \rightarrow 0$ とすれば、簡単な計算によって零に収束することがわかるので、

$$J_1 = \Gamma_3 + \Gamma_2 = -\Gamma_1 + \Gamma_2 \dots\dots\dots (4.4)$$

ここに、 $-\Gamma_1$ は複素数、また Γ_2 は実数として結果が得られるので次のようにおく。

$$-\Gamma_1 = R_1 + iI_1, \quad \Gamma_2 = R_2 \text{ (無限積分)} \dots\dots\dots (4.5)$$

なお、 Γ_3 を直接計算せずに $-\Gamma_1$ を計算する理由は、極が同時に分岐点になっているときには、その点をはさんで Cauchy の主値を求める適当な数値積分の一般的な方法がないからである。

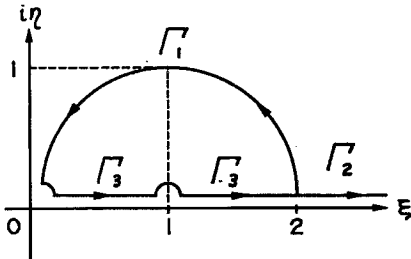


Fig. 2 Contour of integral J_1 .

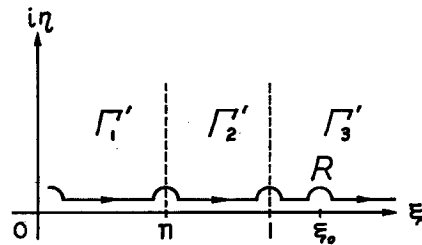


Fig. 3 Contour of integral J_2 .

< J_2 の積分>

J_2 は $\xi \geq 0$ に対して四つの特異点、

$\xi=n$, $\xi=1$ (分岐点), $\xi=0$, $\xi=\xi_0$ (極), ξ_0 ; Rayleigh pole

をもっている。そこで、 J_1 のときと同じく複素平面 $\xi+i\eta$ を採用し、正の実軸上に存在するこれらの特異点をさけて Fig. 3 に示すような積分路をとると、 $\xi=0$, n および 1 まわりの円弧 ϵ に沿う積分は $\epsilon \rightarrow 0$ のとき零に収束して J_2 には影響を与えないことがわかる。言い換えると、分岐点 $\xi=n$ および $\xi=1$ 上を通る実軸上の積分路をとっても同じ結果が得られるわけである。積分区間を図のように三つに分けると J_2 は、

$$J_2 = \Gamma'_1 + \Gamma'_2 + \Gamma'_3 + R \dots\dots\dots (4.6)$$

で表示される。ここに、 Γ'_3 は $\xi=\xi_0$ をはさむ Cauchy の主値を、 R はこの点まわりの円弧 ϵ に沿う積

分, すなわち Rayleigh pole における留数の $-\pi i$ 倍を表わしている。この円弧を第1象限にとる理由は、地盤に減衰項を入れると Rayleigh pole が第4象限に入り、減衰項を小さくしていくと pole は次第に実軸に近づいて、零の極限をとったときちょうど実軸上にあるため、積分路と pole との交錯を避けるという意味からである。 $\xi = \xi_0$ の極をはさむ Cauchy の主値を求める数値積分には、“被積分関数を偶関数と奇関数部分に分け、極を原点に移し、原点に関して対称な領域でその奇関数部分を消去し、残る偶関数部分について計算する” という “I.M. Longman の方法”²⁸⁾ を用いる。結果は Γ_1' および R は虚数、 Γ_2' は複素数、 Γ_3' は実数として得られるので次のようにおく。

$$\Gamma_1' = iI_1', \quad \Gamma_2' = R_1' + iI_2', \quad \Gamma_3' = R_2' + R_3' \text{ (無限積分)}, \quad R = iI_3' \dots\dots\dots(4.7)$$

ここに、 R_2' は “I.M. Longman の方法” を適用する関係で区間 $[1, 2\xi_0 - 1]$ の積分を、 R_3' は区間 $[2\xi_0 - 1, \infty)$ の積分を表わしている。なお、 R_2 および R_3' の無限積分の評価については、被積分関数に含まれる周期成分 $S(\xi, \theta)$ の一周期毎に積分値の増分を求め、そのときまでの積分値の総和に対する比が許容値 (0.5%) 内に収まればそこで計算を打切るという方法をとった。

以上のような操作による最終結果としての数値積分表示式を記すと、

$$\begin{aligned} \frac{u}{P_H} \cdot b\mu &= f_{1H} + i f_{2H} \\ f_{1H} &= \frac{1}{\pi^2 a_0 \frac{c}{b}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(R_1 + R_2) \sin^2 \theta - (R_1' + R_2' + R_3') \cos^2 \theta] d\theta \\ f_{2H} &= \frac{1}{\pi^2 a_0 \frac{c}{b}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [I_1 \sin^2 \theta - (I_1' + I_2' + I_3') \cos^2 \theta] d\theta \end{aligned} \dots\dots\dots(4.8)$$

$$\begin{aligned} \circ R_1 &= \int_0^\pi \frac{Pm - Ql}{P^2 + Q^2} d\varphi, \quad I_1 = - \int_0^\pi \frac{Pl + Qm}{P^2 + Q^2} d\varphi \\ &\left\{ \begin{aligned} P &= (1 + \cos \varphi) \bar{p} + \sin \varphi \cdot \bar{q}, \quad Q = (1 + \cos \varphi) \bar{q} - \sin \varphi \cdot \bar{p}, \\ \bar{p} &= \left[\frac{1}{2} (p + \sqrt{p^2 + q^2}) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{q} = \left[\frac{1}{2} (-p + \sqrt{p^2 + q^2}) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ p &= 2 \cos \varphi (1 + \cos \varphi) - 1, \quad q = 2 \sin \varphi (1 + \cos \varphi), \\ l &= (\sin A_1 \cdot \sin B_1 \cdot \cosh A_2 \cdot \cosh B_2 - \cos A_1 \cdot \cos B_1 \cdot \sinh A_2 \cdot \sinh B_2) / \sin \theta \cdot \cos \theta, \\ m &= (\sin A_1 \cdot \cos B_1 \cdot \cosh A_2 \cdot \sinh B_2 + \cos A_1 \cdot \sin B_1 \cdot \sinh A_2 \cdot \cosh B_2) / \sin \theta \cdot \cos \theta, \\ A_1 &= a_0 \cos \theta \cdot (1 + \cos \varphi), \quad A_2 = a_0 \cos \theta \cdot \sin \varphi, \\ B_1 &= \frac{c}{b} a_0 \sin \theta \cdot (1 + \cos \varphi), \quad B_2 = \frac{c}{b} a_0 \sin \theta \cdot \sin \varphi, \end{aligned} \right. \\ \circ R_2 &= R_{20} + \sum_{k=1}^K R_{2k} = \int_2^{10} \frac{1}{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}} S(\xi, \theta) d\xi + \sum_{k=1}^K \left[\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{1}{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}} S(\xi, \theta) d\xi \right] \\ &\left\{ \begin{aligned} \xi_k &= 10 + (k-1) \Delta \xi, \quad \Delta \xi = \text{minimum} \left(\frac{2\pi}{a_0 \cos \theta}, \frac{2\pi}{\frac{c}{b} a_0 \sin \theta} \right), \\ K &; \{ |R_{2k} / \sum_{k=0}^K R_{2k}| < \text{許容誤差} \} \text{ を満足する } K \end{aligned} \right. \\ \circ R_1' &= -4 \int_n^1 \frac{\xi (1 - \xi^2) \sqrt{\xi^2 - n^2}}{G(\xi)} S(\xi, \theta) d\xi \\ G(\xi) &= (2\xi^2 - 1)^4 - 16\xi^4 (\xi^2 - n^2) (\xi^2 - 1) \\ \circ I_1' &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^n \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi F(\xi)} S(\xi, \theta) d\xi, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\text{integrand}] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}(\xi) &= (2\xi^2 - 1)^2 + 4\xi^2 \sqrt{n^2 - \xi^2} \sqrt{1 - \xi^2} \\ \circ R_2' &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\xi_0 - 1} \left[\frac{\sqrt{(\xi_0 + \xi)^2 - 1}}{(\xi_0 + \xi)F(\xi_0 + \xi)} S(\xi_0 + \xi, \theta) + \frac{\sqrt{(\xi_0 - \xi)^2 - 1}}{(\xi_0 - \xi)F(\xi_0 - \xi)} S(\xi_0 - \xi, \theta) \right] d\xi \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\text{integrand}] &= \frac{2 \left(\frac{dH}{d\xi} \right)_{\xi_0} \left(\frac{dF}{d\xi} \right)_{\xi_0} - H(\xi_0) \left(\frac{d^2 F}{d\xi^2} \right)_{\xi_0}}{\left(\frac{dF}{d\xi} \right)_{\xi_0}^2}, \quad H(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} S(\xi, \theta) \\ \circ I_2' &= \int_n^1 \frac{(2\xi^2 - 1)^2 \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi G(\xi)} S(\xi, \theta) d\xi \\ \circ R_3' &= R_{30} + \sum_{k=1}^K R_{3k} = \int_{2\xi_0 - 1}^{10} \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi F(\xi)} S(\xi, \theta) d\xi + \sum_{k=1}^K \left[\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi F(\xi)} S(\xi, \theta) d\xi \right] \\ &\quad [\xi_k \text{ および } K \text{ については } R_2 \text{ の場合と同じ}] \\ \circ I_3' &= -\pi \frac{\sqrt{\xi_0^2 - 1}}{\xi_0} S(\xi_0, \theta) \left(\frac{dF}{d\xi} \right)_{\xi_0} \end{aligned} \quad \text{以上 (4.9)}$$

4. 2. 減衰機構について

前節の解析から明らかなように、Dynamical Ground Compliance の表現は実積分ではあるが結果は複素数となる。言うまでもなく虚数部は減衰に関係する量である。この問題の仮定では地盤には減衰項を入れていないにもかかわらず虚数部が現われてきたことは、半無限弾性地盤の表面にある震源から波動が逸散していく現象による所謂エネルギー減衰を示している。この虚数部は、積分の Cauchy の主値によるものと、Rayleigh pole ξ_0 まわりの留数項によるものとの二つの部分から構成されている。

既に述べたように、Rayleigh function は正の実軸上に一個の零点をもつから、積分には Rayleigh pole と呼ばれる特異点が存在する。そのため、この種の improper な積分の評価は一般に複素平面に拡張して行われる。そこで、複素平面上での Rayleigh pole の扱い方、すなわち Cauchy の主値のみをとるかさらに留数項を付加えるかという点、またこのような数学上の扱いが実際の物理現象とどのように対応しているのかという点が問題になってくる。

この点に関しては従来二つの考え方があった。普通この種の問題では、扱いを簡単にするために地盤には減衰項を入れていないが、これを考慮に入れると極が第4象限に入り、減衰項を小さくしていくと極は次第に実軸に近づいて、零の極限をとったときちょうど実軸上になる。極は本来第4象限にあるものであって積分には無関係、したがって Cauchy の主値のみをとる、とするのが第一の考え方である。第二の考え方は大部分の研究者がとっているもので、Rayleigh pole は“Rayleigh's free wave”の存在条件を与えるものであり、留数項を加えることは任意常数を適当に選んで“Rayleigh's free wave solution”を重ね合わせることに対応する。その結果、合成波は“divergent wave”すなわち震源から逸散されるだけで無限遠からの反射波を含まない波動のみから成立つ。言い換えると、Cauchy の主値に留数項を加えた結果得られた解は、径方向の無限遠における境界条件を満足し物理的な意味をもつことになる、とするものである。この操作は、簡単な振動系の強制振動の解を求めるときに、定常状態の解に自由振動の解を重ね合わせることによく似ている。なお、深さ方向の無限遠における境界条件については、深さの増加とともに指数関数的に増大する解を除き、逆に減少して零に収束する解のみを採用することによって満足させていることは、すでに2.において述べたとおりである。

本研究においては、積分値の評価のさいに積分路のとり方に関して数学的に不連続な取扱いをすることは許されないという点をも考慮に入れて、Cauchy の主値に留数項を付加える第二の立場をとっている。この扱いの正当性を裏付ける一つの事実をあげておくと、数値的に得られた Dynamical Ground Compliance から弾性地盤の伝達関数の近似的表現を求めするために、物理的実現可能 (physical realizability) の条件に基礎をおいた安定な系の伝達関数の実数部と虚数部の間に存在する関係を用いて、数値解の実数部から

Statical Ground Compliance.

Table 1 Vertical Translation.

c/b	$\nu=0$		$\nu=1/4$		$\nu=1/3$		$\nu=1/2$	
	f_{SV}	\bar{f}_{SV}	f_{SV}	\bar{f}_{SV}	f_{SV}	\bar{f}_{SV}	f_{SV}	\bar{f}_{SV}
1/10	0.6361	0.2011	0.4771	0.1509	0.4240	0.1341	0.3180	0.1006
1/9	0.6193	0.2064	0.4645	0.1548	0.4129	0.1376	0.3097	0.1032
1/8	0.6006	0.2124	0.4505	0.1593	0.4004	0.1416	0.3003	0.1062
1/7	0.5794	0.2190	0.4345	0.1643	0.3863	0.1460	0.2897	0.1095
1/6	0.5550	0.2266	0.4163	0.1699	0.3700	0.1511	0.2775	0.1133
1/5	0.5261	0.2353	0.3946	0.1765	0.3508	0.1569	0.2631	0.1177
1/4	0.4909	0.2455	0.3682	0.1841	0.3273	0.1634	0.2455	0.1227
1/3	0.4458	0.2574	0.3343	0.1930	0.2972	0.1716	0.2228	0.1287
1/2	0.3829	0.2708	0.2872	0.2031	0.2553	0.1805	0.1915	0.1354
1.0	0.2805	0.2805	0.2104	0.2104	0.1870	0.1870	0.1403	0.1403
2.0	0.1915	0.2708	0.1436	0.2031	0.1276	0.1805	0.0967	0.1354
3.0	0.1486	0.2574	0.1114	0.1930	0.0991	0.1716	0.0743	0.1287
4.0	0.1227	0.2455	0.0921	0.1841	0.0818	0.1636	0.0614	0.1227
5.0	0.1052	0.2353	0.0789	0.1765	0.0702	0.1569	0.0526	0.1177
6.0	0.0925	0.2266	0.0694	0.1699	0.0617	0.1511	0.0463	0.1133
7.0	0.0828	0.2190	0.0621	0.1643	0.0552	0.1460	0.0414	0.1095
8.0	0.0751	0.2124	0.0563	0.1593	0.0501	0.1416	0.0375	0.1062
9.0	0.0688	0.2064	0.0516	0.1548	0.0459	0.1376	0.0344	0.1032
10.0	0.0636	0.2011	0.0477	0.1509	0.0424	0.1341	0.0318	0.1006

Table 2 Horizontal Translation.

c/b	$\nu=0$		$\nu=1/4$		$\nu=1/3$		$\nu=1/2$	
	f_{SH}	\bar{f}_{SH}	f_{SH}	\bar{f}_{SH}	f_{SH}	\bar{f}_{SH}	f_{SH}	\bar{f}_{SH}
1/10	0.6361	0.2011	0.5963	0.1886	0.5831	0.1844	0.5566	0.1760
1/9	0.6193	0.2064	0.5796	0.1932	0.5664	0.1888	0.5399	0.1760
1/8	0.6006	0.2124	0.5609	0.1983	0.5477	0.1936	0.5213	0.1843
1/7	0.5794	0.2190	0.5398	0.2040	0.5266	0.1990	0.5001	0.1890
1/6	0.5550	0.2266	0.5154	0.2104	0.5022	0.2050	0.4758	0.1942
1/5	0.5261	0.2353	0.4866	0.2176	0.4734	0.2117	0.4471	0.1999
1/4	0.4909	0.2455	0.4515	0.2258	0.4384	0.2192	0.4122	0.2061
1/3	0.4458	0.2574	0.4067	0.2348	0.3936	0.2273	0.3676	0.2122
1/2	0.3829	0.2708	0.3446	0.2437	0.3319	0.2347	0.3063	0.2166
1.0	0.2805	0.2805	0.2454	0.2455	0.2338	0.2338	0.2104	0.2104
2.0	0.1915	0.2708	0.1627	0.2302	0.1532	0.2166	0.1340	0.1895
3.0	0.1486	0.2574	0.1245	0.2156	0.1164	0.2017	0.1004	0.1738
4.0	0.1227	0.2546	0.1019	0.2038	0.0999	0.1899	0.0811	0.1621
5.0	0.1052	0.2353	0.0868	0.1942	0.0807	0.1804	0.0682	0.1530
6.0	0.0925	0.2266	0.0760	0.1861	0.0705	0.1726	0.0595	0.1456
7.0	0.0828	0.2190	0.0677	0.1792	0.0627	0.1660	0.0527	0.1395
8.0	0.0751	0.2124	0.0613	0.1732	0.0567	0.1603	0.0475	0.1342
9.0	0.0688	0.2064	0.0560	0.1681	0.0518	0.1553	0.0432	0.1297
10.0	0.0636	0.2011	0.0517	0.1634	0.0477	0.1508	0.0397	0.1257

Statical Ground Compliance.

Table 3 Rotation. ($\times 10^{-1}$)

c/b	$\nu=0$		$\nu=1/4$		$\nu=1/3$		$\nu=1/2$	
	f_{SR}	\bar{f}_{SR}	f_{SR}	\bar{f}_{SR}	f_{SR}	\bar{f}_{SR}	f_{SR}	\bar{f}_{SR}
1/10	2.1790	0.0690	1.6343	0.0517	1.4527	0.0460	1.0895	0.0345
1/9	2.0995	0.0778	1.5746	0.0583	1.3997	0.0518	1.0497	0.0389
1/8	2.0111	0.0889	1.5083	0.0667	1.3408	0.0593	1.0056	0.0444
1/7	1.9117	0.1032	1.4338	0.0774	1.2745	0.0688	0.9559	0.0516
1/6	1.7982	0.1224	1.3486	0.0918	1.1988	0.0816	0.8991	0.0612
1/5	1.6657	0.1490	1.2493	0.1117	1.1105	0.0993	0.8329	0.0745
1/4	1.5070	0.1884	1.1302	0.1413	1.0046	0.1256	0.7535	0.0942
1/3	1.3088	0.2519	0.9816	0.1889	0.8725	0.1679	0.6544	0.1259
1/2	1.0456	0.3697	0.7842	0.2773	0.6971	0.2464	0.5228	0.1848
1.0	0.6570	0.6570	0.4927	0.4927	0.4380	0.4380	0.3285	0.3285
2.0	0.3717	1.0515	0.2788	0.7886	0.2478	0.7010	0.1859	0.5257
3.0	0.2565	1.3330	0.1924	0.9997	0.1710	0.8887	0.1283	0.6665
4.0	0.1951	1.5606	0.1463	1.1765	0.1301	1.0404	0.0975	0.7803
5.0	0.1591	1.7567	0.1178	1.3176	0.1048	1.1711	0.0785	0.8784
6.0	0.1314	1.9318	0.0986	1.4488	0.0876	1.2878	0.0657	0.9659
7.0	0.1129	2.0914	0.0847	1.5586	0.0753	1.3943	0.0565	1.0457
8.0	0.0990	2.2393	0.0742	1.6795	0.0660	1.4929	0.0495	1.1196
9.0	0.0881	2.3776	0.0660	1.7832	0.0587	1.5851	0.0440	1.1888
10.0	0.0793	2.5082	0.0595	1.8811	0.0529	1.6721	0.0397	1.2541

Table 4 Tortion. ($\times 10^{-1}$)

c/b	$\nu=0$		$\nu=1/4$		$\nu=1/3$		$\nu=1/2$	
	f_{ST}	\bar{f}_{ST}	f_{ST}	\bar{f}_{ST}	f_{ST}	\bar{f}_{ST}	f_{ST}	\bar{f}_{ST}
1/10	2.1575	0.1364	1.8150	0.1148	1.7008	0.1076	1.4725	0.0931
1/9	2.0739	0.1536	1.7518	0.1298	1.6445	0.1218	1.4298	0.1059
1/8	1.9802	0.1750	1.6809	0.1486	1.5881	0.1398	1.3816	0.1221
1/7	1.8735	0.2023	1.5999	0.1728	1.5087	0.1629	1.3264	0.1432
1/6	1.2258	0.2381	1.5055	0.2049	1.4242	0.1938	1.2615	0.1717
1/5	1.6017	0.2865	1.3922	0.2491	1.3224	0.2366	1.1828	0.2116
1/4	1.4183	0.3546	1.2505	0.3126	1.1945	0.2986	1.0827	0.2707
1/3	1.1779	0.4534	1.0617	0.3982	1.0229	0.3937	0.9454	0.3639
1/2	0.8365	0.5915	0.7849	0.5550	0.7677	0.5429	0.7333	0.5185
1.0	0.3285	0.6570	0.3421	0.6842	0.3466	0.6933	0.3557	0.7114
2.0	0.0744	0.4206	0.0908	0.5138	0.0963	0.5449	0.1073	0.6071
3.0	0.0257	0.2666	0.0351	0.3646	0.0382	0.3973	0.0445	0.4627
4.0	0.0115	0.1836	0.0171	0.2729	0.0189	0.3026	0.0226	0.3621
5.0	0.0060	0.1351	0.0096	0.2141	0.0108	0.2404	0.0131	0.2930
6.0	0.0036	0.1044	0.0059	0.1741	0.0067	0.1973	0.0083	0.2438
7.0	0.0023	0.0837	0.0039	0.1455	0.0045	0.1661	0.0056	0.2074
8.0	0.0015	0.0689	0.0027	0.1242	0.0032	0.1426	0.0040	0.1795
9.0	0.0011	0.0580	0.0020	0.1078	0.0023	0.1244	0.0029	0.1576
10.0	0.0008	0.0497	0.0015	0.0949	0.0017	0.1099	0.0022	0.1401

Statical Ground Compliance, constant cross-sectional area of foundation.

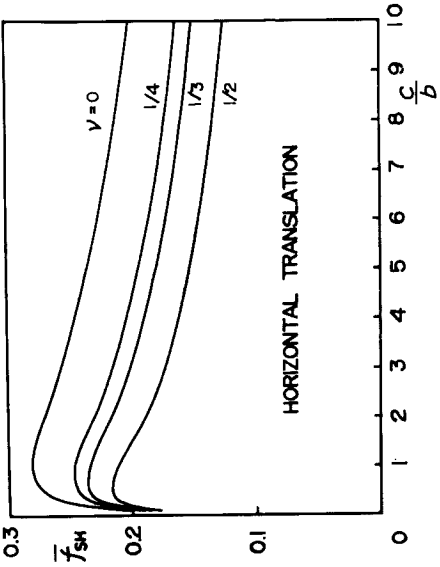


Fig. 5 Horizontal translation.

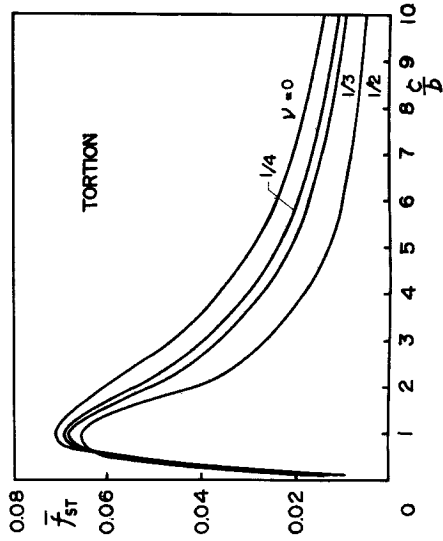


Fig. 7 Tortion.

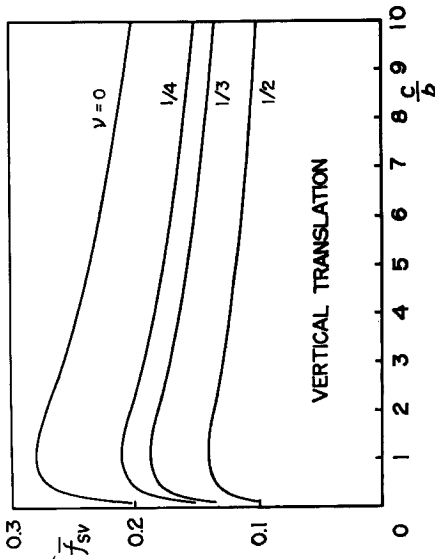


Fig. 4 Vertical translation.

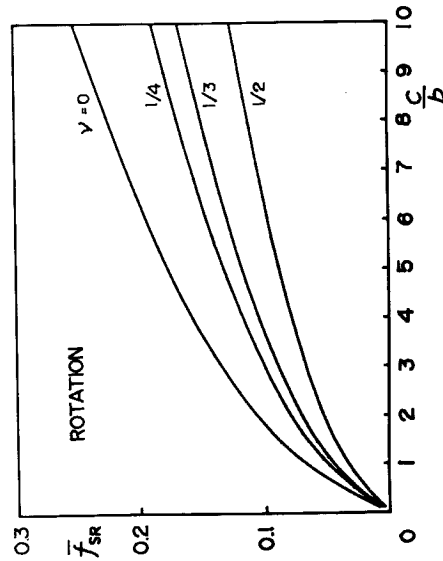


Fig. 6 Rotation.

simulate された近似伝達関数を求めたとき、その虚数部が留数項を含んだ数値解の虚数部と極めてよく一致しているということである。^{22), 28)}

結局、虚数部を構成する二つの要素のうち、Rayleigh pole に関する留数項は Rayleigh 波 (表面波) によるエネルギー減衰を、Cauchy の主値からくるものは深さ方向への波動の逸散によるエネルギー減衰をそれぞれ意味しているわけである。

4. 3. 数値計算および結果

4. 3. 1. Statical Ground Compliance

3. 5. で得られた解析的表現 (3.68), (3.70), (3.73) および (3.76) 式に基づいた数値計算結果を、いくつかの地盤のポアソン比および基礎の形状を示す辺長比 c/b に対して、Table 1 (垂直加振), Table 2 (水平加振), Table 3 (回転加振) および Table 4 (捩れ加振) に示す。各 Poisson 比に対して、左側の列には基礎半巾 b を一定にしてもう一方の基礎半巾 c を変えた場合の解 $f_{si}[l=V, H, R, T]$ が、また右側の列には基礎断面積を一定にして断面の形状を変えた場合の解 \bar{f}_{si} , すなわち、

$$\bar{f}_{SV} = \frac{w_0}{P_V} \cdot d\mu, \quad \bar{f}_{SH} = \frac{u_0}{P_H} \cdot d\mu, \quad \bar{f}_{SR} = \frac{\phi}{M_R} \cdot \frac{d^3\mu}{3}, \quad \bar{f}_{ST} = \frac{\psi}{M_T} \cdot \frac{d^3\mu}{3}, \quad d = \sqrt{bc} \dots (4.10)$$

が示されている。なお後者の場合をグラフにして表わしたのが Fig. 4~Fig. 7 である。

4. 3. 2. Dynamical Ground Compliance

3. 4. で得られた解析的表現 (3.60)~(3.63) 式に基づいて、積分計算には Simpson 3/8 則を用い、計算誤差が 0.5% 以内に収まるように設定して、digital 電子計算機により求めた結果を Table 5 (垂直加振, 水平加振) および Table 6 (回転加振, 捩れ加振) に示す。ここに、地盤の Poisson 比は $\nu=1/4$ ($n^2=1/3$, $\lambda=\mu$) と仮定し、いくつかの基礎断面辺長比 c/b と加振力の振動数に関する無次元量 a_0 に対して、基礎半巾 b を一定にし c を変えた場合が計算されている。結果は複素数で得られるから、その実数部を f_{1i} , 虚数部を f_{2i} , 虚数部中に占める Rayleigh pole まわりの留断項を $R_i[l=V, H, R, T]$ で表わしている。次に、Fig. 8~Fig. 11 は基礎断面積一定の関係を保ちながら断面形状を変えた場合 (パラメータには頭に一をつけて表示する) の解

$$\begin{cases} \frac{w_0}{P_V e^{i\omega t}} \cdot d\mu = \bar{f}_{1V} + i\bar{f}_{2V}, & \frac{u_0}{P_H e^{i\omega t}} \cdot d\mu = \bar{f}_{1H} + i\bar{f}_{2H}, \\ \frac{\phi}{M_R e^{i\omega t}} \cdot \frac{d^3\mu}{3} = \bar{f}_{1R} + i\bar{f}_{2R}, & \frac{\psi}{M_T e^{i\omega t}} \cdot \frac{d^3\mu}{3} = \bar{f}_{1T} + i\bar{f}_{2T}, \end{cases} \dots (4.11)$$

を、 $a_0 = \omega\sqrt{\rho/\mu}d$ を横軸にとって示したものである。

Statical Ground Compliance の逆数はそのままの形で静的な場合の地盤のバネ剛性に対応づけられ、その特性を容易に理解することができるが、他方、Dynamical Ground Compliance はそのままの形では物理的な特性を把握しにくい。そこで、従来一般に地盤を spring と dash-pot から成る系に置換する方法がよく行われているので、Dynamical Ground Compliance をこのような系の特性におきかえて、その等価係数を振動数の関数として求めてみる。置換系の伝達関数は $1/(\kappa_e + ia_0c_e)$ の形で表現されるから、等価バネ剛性 κ_e および等価粘性減衰係数 c_e は、

$$\text{Dynamical Ground Compliance} = f_{1i} + if_{2i} = \frac{1}{\kappa_e + ia_0c_e} \dots (4.12)$$

$$\kappa_e = \frac{f_{1i}}{f_{1i}^2 + f_{2i}^2}, \quad c_e = \frac{-f_{2i}}{a_0(f_{1i}^2 + f_{2i}^2)} \dots (4.13)$$

で表わされる。Fig. 12~Fig. 15 は、横軸に振動数パラメータ $a_0 (= \omega d/c_2)$ をとって、 $\bar{f}_{1i} + i\bar{f}_{2i}$ と a_0 の値から上式によって計算された、基礎断面積を一定にして断面形状を変えた場合の $\bar{\kappa}_e$ および \bar{c}_e を示したものである。

Table 5 Dynamical Ground Compliance for vertical and horizontal translation, $\nu=1/4$.

c/b	a_0	vertical translation			horizontal translation		
		f_{1V}	f_{2V}	R_V	f_{1H}	f_{2H}	R_H
1	0	0.2104	0	0	0.2455	0	0
	0.2	0.2087	-0.0294	-0.0198	0.2425	-0.0262	-0.0046
	0.4	0.1995	-0.0577	-0.0387	0.2371	-0.0514	-0.0090
	0.6	0.1865	-0.0838	-0.0557	0.2282	-0.0754	-0.0129
	0.8	0.1693	-0.1068	-0.0702	0.2162	-0.0980	-0.0163
	1.0	0.1479	-0.1258	-0.0814	0.2014	-0.1173	-0.0189
	1.2	0.1244	-0.1403	-0.0890	0.1810	-0.1335	-0.0206
	1.4	0.0994	-0.1499	-0.0925	0.1615	-0.1465	-0.0215
	1.6	0.0735	-0.1545	-0.0921	0.1404	-0.1566	-0.0214
	1.8	0.0480	-0.1541	-0.0877	0.1188	-0.1629	-0.0204
	2.0	0.0240	-0.1490	-0.0799	0.0974	-0.1657	-0.0185
2	0	0.1436	0	0	0.1627	0	0
	0.2	0.1395	-0.0291	-0.0196	0.1597	-0.0258	-0.0046
	0.4	0.1273	-0.0555	-0.0369	0.1504	-0.0499	-0.0088
	0.6	0.1099	-0.0768	-0.0499	0.1359	-0.0705	-0.0127
	0.8	0.0860	-0.0913	-0.0575	0.1178	-0.0864	-0.0148
	1.0	0.0612	-0.0983	-0.0591	0.0923	-0.0969	-0.0162
	1.2	0.0372	-0.0980	-0.0549	0.0761	-0.1018	-0.0165
	1.4	0.0165	-0.0914	-0.0462	0.0562	-0.1014	-0.0158
	1.6	0.0001	-0.0803	-0.0345	0.0387	-0.0966	-0.0142
	1.8	-0.0108	-0.0668	-0.0217	0.0246	-0.0886	-0.0119
	2.0	-0.0161	-0.0529	-0.0097	0.0144	-0.0788	-0.0093
	2.2	-0.0168	-0.0405	-0.0000	0.0082	-0.0684	-0.0071
	2.4	-0.0142	-0.0309	0.0065	0.0060	-0.0588	-0.0040
	2.6	-0.0098	-0.0246	0.0094	0.0055	-0.0508	-0.0016
	2.8	-0.0053	-0.0215	0.0093	0.0073	-0.0451	0.0003
	3.0	-0.0018	-0.0210	0.0068	0.0097	-0.0417	0.0017
3.2	-0.0001	-0.0220	0.0033	0.0120	-0.0405	0.0028	
3.4	-0.0004	-0.0233	0.0002	0.0133	-0.0410	0.0034	
3.6	-0.0024	-0.0269	-0.0024	0.0132	-0.0424	0.0038	
3.8	-0.0054	-0.0231	-0.0029	0.0128	-0.0439	0.0040	
4.0	-0.0083	-0.0406	-0.0014	0.0089	-0.0452	0.0041	
4	0	0.0921	0	0	0.1019	0	0
	0.2	0.0848	-0.0280	-0.0187	0.0962	-0.0251	-0.0045
	0.4	0.0655	-0.0476	-0.0304	0.0810	-0.0443	-0.0080
	0.6	0.0430	-0.0545	-0.0319	0.0612	-0.0541	-0.0100
	0.8	0.0242	-0.0503	-0.0252	0.0429	-0.0543	-0.0103
	1.0	0.0141	-0.0409	-0.0158	0.0298	-0.0582	-0.0095
	1.2	0.0124	-0.0331	-0.0095	0.0233	-0.0404	-0.0081
	1.4	0.0125	-0.0306	-0.0089	0.0226	-0.0349	-0.0067
	1.6	0.0117	-0.0320	-0.0122	0.0234	-0.0335	-0.0056
	1.8	0.0069	-0.0341	-0.0153	0.0229	-0.0353	-0.0048
2.0	-0.0003	-0.0331	-0.0150	0.0195	-0.0379	-0.0041	

Table 6 Dynamical Ground Compliance for rotation and torsion, $\nu=1/4$.

c/b	a_0	rotation $\times 10^{-1}$			torsion $\times 10^{-1}$		
		f_{1R}	f_{2R}	R_R	f_{1T}	f_{2T}	R_T
1	0	0.4927	0	0	0.6892	0	0
	0.2	0.5038	-0.0019	-0.0016	0.6994	-0.0014	0.0000
	0.4	0.5292	-0.0145	-0.0120	0.7191	-0.0110	0.0000
	0.6	0.5654	-0.0464	-0.0383	0.7548	-0.0356	0.0000
	0.8	0.6012	-0.1020	-0.0837	0.7945	-0.0799	0.0000
	1.0	0.6236	-0.1806	-0.1468	0.8297	-0.1454	0.0000
	1.2	0.6240	-0.2764	-0.2219	0.8519	-0.2302	0.0001
	1.4	0.5934	-0.3794	-0.2996	0.8534	-0.3293	0.0004
	1.6	0.5281	-0.4765	-0.3685	0.8291	-0.4350	0.0008
	1.8	0.4330	-0.5553	-0.4173	0.7769	-0.5380	0.0017
2.0	0.3164	-0.6047	-0.4371	0.6979	-0.6288	0.0032	
2	0	0.2788	0	0	0.0908	0	0
	0.2	0.2865	-0.0019	-0.0015	0.0927	-0.0002	0.0001
	0.4	0.3063	-0.0142	-0.0117	0.0977	-0.0019	0.0008
	0.6	0.3305	-0.0441	-0.0363	0.1045	-0.0062	0.0026
	0.8	0.3484	-0.0932	-0.0758	0.1112	-0.0138	0.0054
	1.0	0.3477	-0.1566	-0.1255	0.1155	-0.0249	0.0091
	1.2	0.3223	-0.2243	-0.1759	0.1155	-0.0391	0.0131
	1.4	0.2706	-0.2835	-0.2157	0.1097	-0.0552	0.0165
	1.6	0.1974	-0.3224	-0.2349	0.0976	-0.0716	0.0187
	1.8	0.1144	-0.3329	-0.2273	0.0797	-0.0863	0.0191
	2.0	0.0349	-0.3131	-0.1941	0.0574	-0.0975	0.0176
	2.2	-0.0283	-0.2677	-0.1376	0.0330	-0.1036	0.0143
	2.4	-0.0665	-0.2066	-0.0721	0.0091	-0.1036	0.0097
	2.6	-0.0763	-0.1426	-0.0091	-0.0118	-0.0974	0.0048
	2.8	-0.0612	-0.0879	0.0400	-0.0277	-0.0858	0.0031
	3.0	-0.0293	-0.0515	0.0674	-0.0373	-0.0702	-0.0031
3.2	0.0087	-0.0372	0.0707	-0.0403	-0.0528	-0.0051	
3.4	0.0419	-0.0431	0.0531	-0.0375	-0.0358	-0.0055	
3.6	0.0627	-0.0630	0.0224	-0.0305	-0.0209	-0.0045	
3.8	0.0674	-0.0884	0.0121	-0.0251	-0.0066	-0.0026	
4.0	0.0571	-0.1105	0.0411	-0.0218	-0.0180	-0.0003	
4	0	0.1463	0	0	0.0171	0	0
	0.2	0.1520	-0.0018	-0.0015	0.0177	0.0002	0.0000
	0.4	0.1643	-0.0130	-0.0107	0.0194	0.0011	-0.0003
	0.6	0.1733	-0.0364	-0.0294	0.0209	0.0029	-0.0013
	0.8	0.1721	-0.0667	-0.0525	0.0214	0.0049	-0.0036
	1.0	0.1573	-0.0949	-0.0718	0.0198	0.0060	-0.0075
	1.2	0.1346	-0.1147	-0.0823	0.0158	0.0055	-0.0120
	1.4	0.1111	-0.1259	-0.0851	0.0102	0.0037	-0.0159
	1.6	0.0901	-0.1328	-0.0862	0.0045	0.0014	-0.0174
	1.8	0.0681	-0.1385	-0.0869	0.0002	-0.0002	-0.0159
2.0	0.0422	-0.1413	-0.0857	-0.0016	-0.0004	-0.0122	

Dynamical Ground Compliance,
constant cross-sectional area of foundation, $\nu=1/4$.

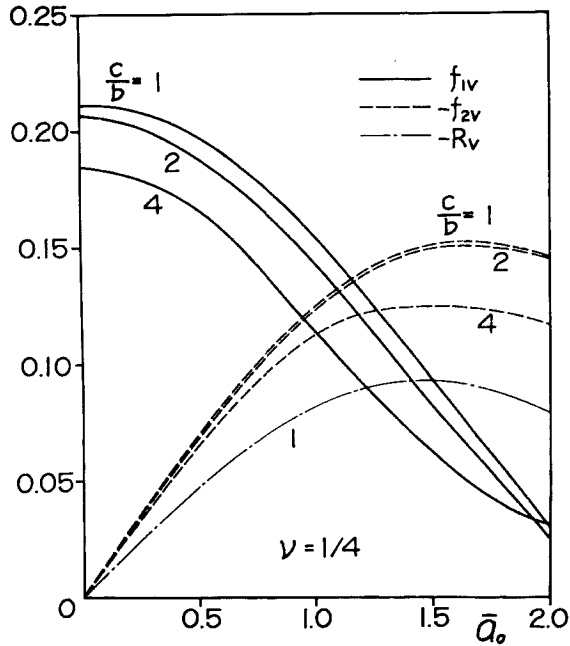


Fig. 8 Vertical translation.

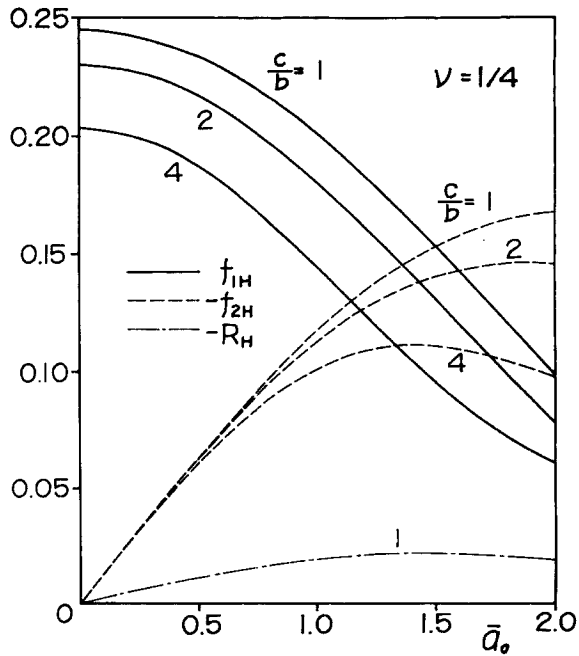


Fig. 9 Horizontal translation.

Dynamical Ground Compliance,
constant cross-sectional area of foundation, $\nu=1/4$.

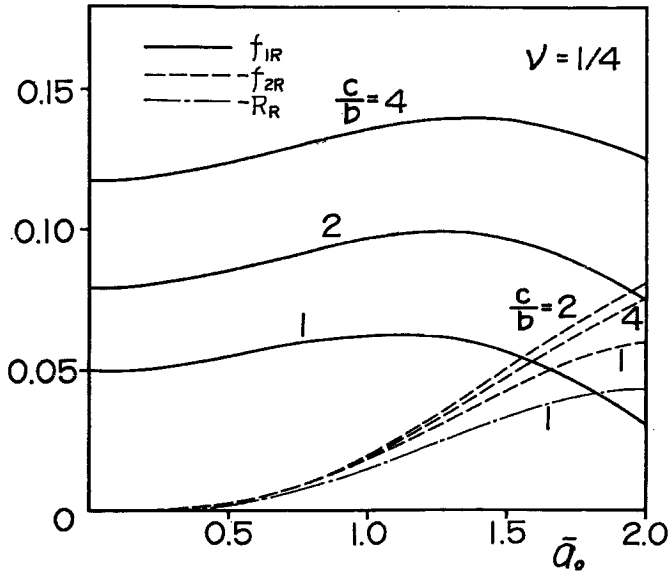


Fig. 10 Rotation.

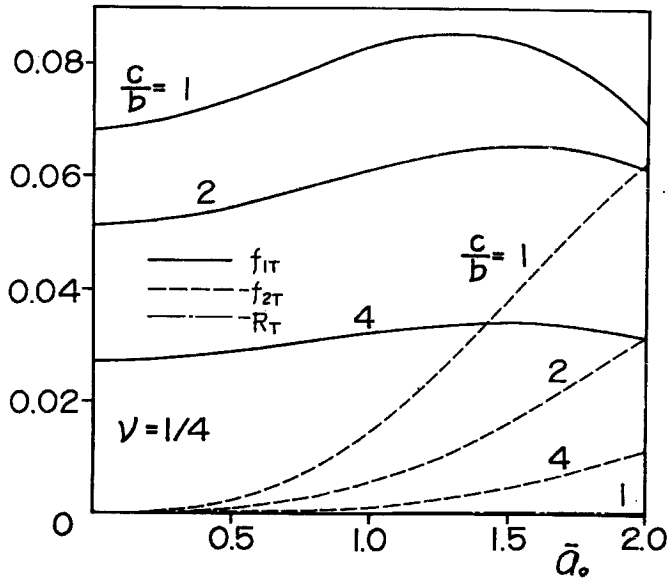


Fig. 11 Tortion.

Equivalent coefficients of spring and dash-pot system.

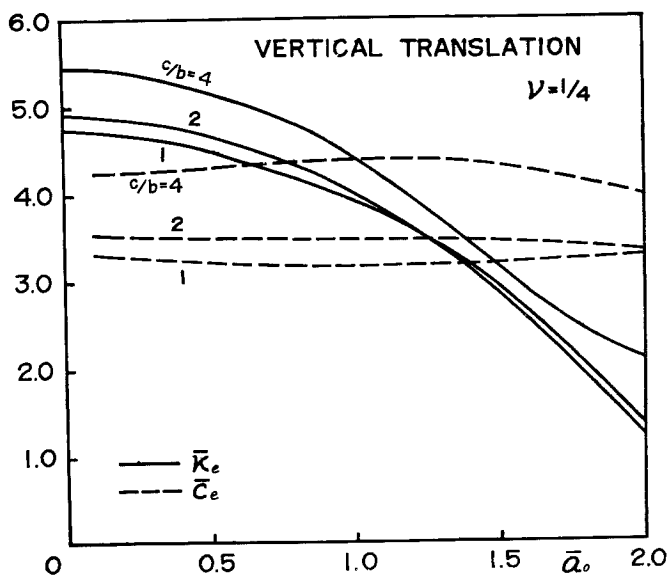


Fig. 12 Vertical translation.

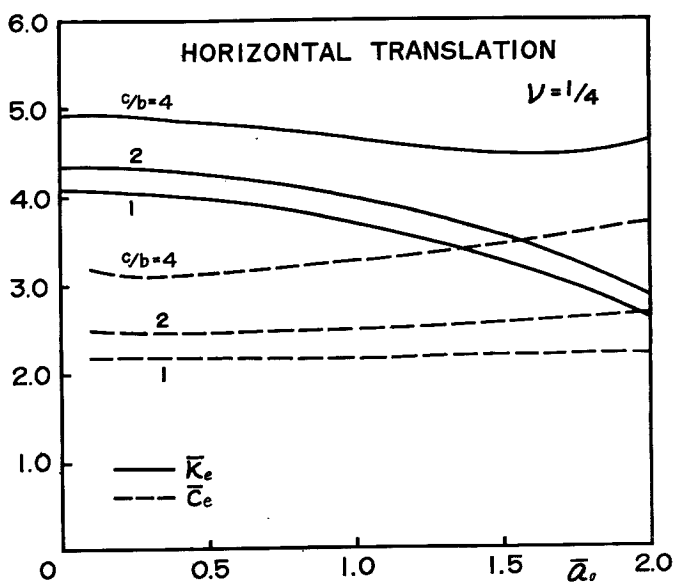


Fig. 13 Horizontal translation.

Equivalent coefficients of spring and dash-pot system.

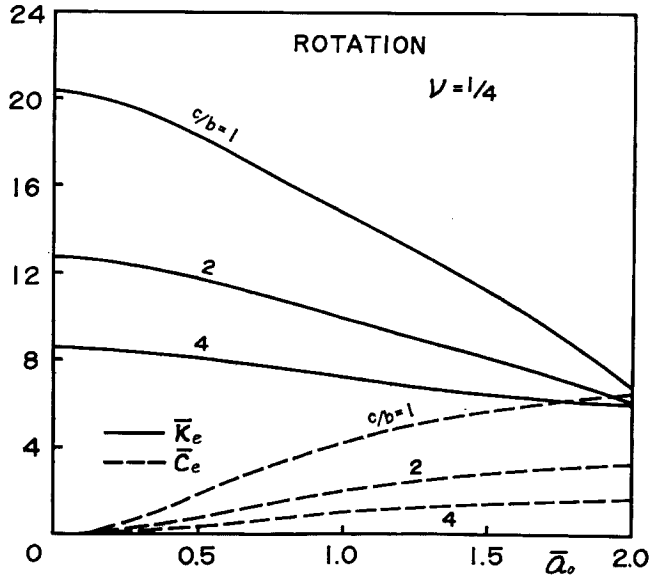


Fig. 14 Rotation.

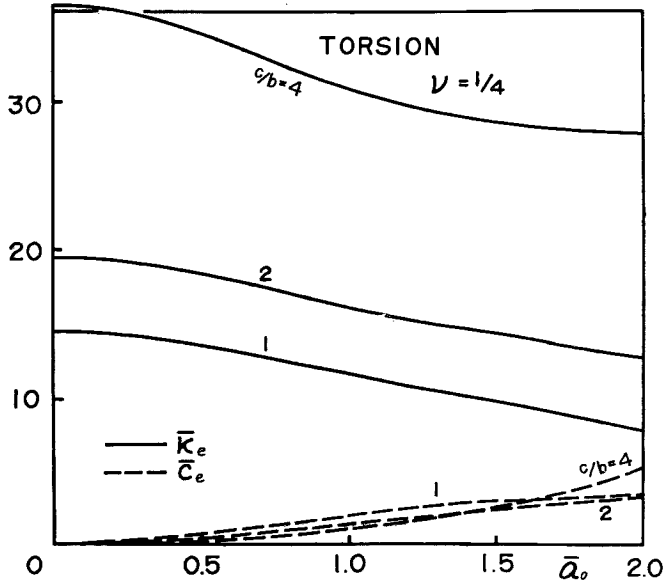


Fig. 15 Tortion.

Effect of Poisson's ratio of ground on dynamical properties of ground.

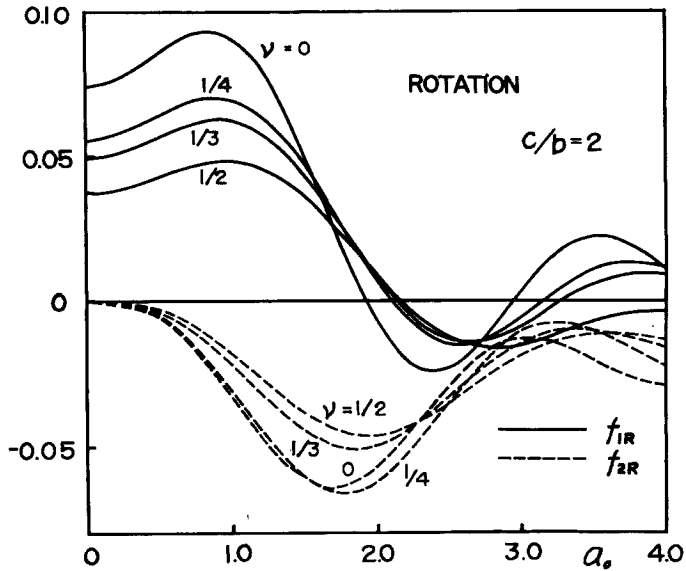


Fig. 16 Dynamical Ground Compliance for rotation, $c/b=2$.

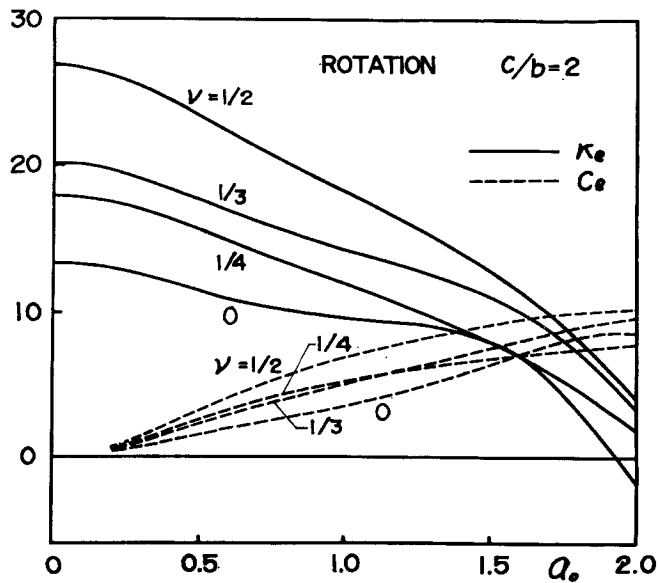


Fig. 17 Equivalent coefficients of spring and dash-pot system, $c/b=2$.

地盤の Poisson 比の及ぼす影響をみるために、一例として、基礎断面辺長比 $c/b=2$ で回転加振の場合の Dynamical Ground Compliance を Fig. 16 に、また同じ場合の置換系の等価係数を Fig. 17 に示した。

4. 3. 3. 解析結果の考察

1. Dynamical Ground Compliance は剛性 (Stiffness) の逆数の元をもち、構造物の周辺地盤という意味での半無限弾性地盤の動特性を概括的に表現する重要な値 (線型伝達関数) で、入力振動数および基礎の形状と寸法の関数であり、また地盤の弾性常数 (剛性率, Poisson 比) と密度にも関係する。とくに入力振動数の関数になるという結果は、mass や spring あるいは dash-pot 等で構成されている従来の簡単な地盤モデルに与えられていた諸特性に比べると大きな特色をもっている。

2. 地盤という媒質自身が dissipative な減衰機構をもっていなくても、表面にある震源から波動が逸散していく dispersive なエネルギー減衰によって、地盤はみかけ上減衰作用を示す。

3. Fig. 8 と Fig. 9 および Fig. 10 と Fig. 11 を比較するとわかるように、各々二つの Dynamical Ground Compliance の全般的傾向はよく似ている。垂直加振と水平加振の場合とはともに並進振動であり、また回転加振と捩れ加振の場合とはともに回転振動であって、各々二つの振動現象の間に物理現象として本質的な差がないこと、そして、振動方向の基礎下の応力分布として、前者にあってはともに一様分布を、また後者においてはともに回転軸からの距離に比例した三角型の分布を仮定したことによるものであろう。しかし、虚数部の構成はかなり異なっていることが認められる。

4. 留数項 R_i は Rayleigh 波に関係する項で表面波によるエネルギー減衰を表わしており、虚数部 f_{2i} 中に占める R_i の割合は Rayleigh 波の起り易さを示す一つの尺度と考えられる。この比率が水平加振より垂直加振の場合に大きいことは、Rayleigh 波の振巾分布が水平より垂直方向の方がかなり大きい (例えば地盤の Poisson 比 $\nu=1/4$ のとき約 1.47 倍) ことに関連があるものと思われる。また垂直振動の成分が卓越すると予想される回転加振の場合にとりわけ大きいことは、三角型という基礎下の応力分布の仮定の寄与するところが大きいと考えられるが、水平軸まわりの回転振動では、地盤の下方への波よりも表面波となって逸散するエネルギーが多いことを示している。捩れ加振の場合は、正方形断面の基礎に近づくにしたがって Rayleigh 波の占める割合は極めて小さくなる。その一つの極限である円形基礎においては Rayleigh 波は全く存在しない。なお、この場合に虚数部と留数項の符号がしばしば逆になるという結果が得られているのは、Dynamical Ground Compliance を規定している点の位置するところの特殊性によるものであろう。

5. Dynamical Ground Compliance を置換系の特性におきかえて換算した等価係数についてみると、バネの剛性は加振型の種類にかかわらず振動数の増加とともにいくぶん低下していく傾向にある。一方粘性減衰係数は、垂直および水平加振の並進振動の場合には、解析の対象とした振動数域でほぼ振動数に無関係に一定値をとるという傾向が認められるが、回転および捩れ加振の回転振動の場合には振動数の増加とともに増大し、低振動数域で非常に小さいという特徴をもっている。地盤を簡単なモデルに抽象するさいに、バネの剛性や仮性質量、減衰係数などを入力振動数に無関係な一定値にとるという、従来一般によく行われてきた解析方法の欠陥を示唆しているわけである。しかし、通常の構造物、地盤および地震波では一般に a_0 の値は小さくて $0 < a_0 < 2$ の帯域に入る場合が多く、バネの剛性については a_0 が 0.5 程度より小さければほぼ一定値とみなして、Statical Ground Compliance の逆数値を採用しても工学的には差支えないのではなかろうか。また、並進振動の場合の減衰係数は $0 < a_0 < 2$ の帯域では振動数には独立な一定値として扱うことができよう。そして、基礎の形状と寸法および地盤常数によって、等価バネ剛性と等価粘性減衰係数の値を与えることが可能である。

6. 基礎の断面形状の及ぼす影響については、断面積一定の関係を保ちながら比較すれば、垂直および水平加振の場合、ともに (ただし水平加振の場合は加振方向と直角な方向に) 細長い断面形のものほど地盤

の剛性も減衰性も大きく現われる。回転加振の場合は、回転軸の方向に細長いものほど逆に剛性も減衰性も小さく現われて回転変形を生じ易くなるわけである。捩れ加振の場合は、減衰性には断面形状による差はさほどみられないが、剛性は細長い断面形のものではかなり大きくなっている。一方、Statical Ground Compliance には、この値が最大値をとる辺長比が $c/b=1$ のときあるいはその近傍に存在する。言い換えると、基礎断面が正方形（垂直および捩れ加振のとき）あるいはそれに近い形状のとき（水平加振のとき）地盤の静的な剛性が最小になることがわかる。ただし回転加振の場合には、回転軸方向に細長くなるにしたがって地盤の剛性が次第に小さくなっていくことは動的な場合と同様である。

7. 地盤の Poisson 比 ν はそのとりうる全領域 $0 \sim 1/2$ にわたって変化させると、Ground Compliance の値および置換系の等価係数の値を相当大きく変えるパラメータではあるが、 $\nu=0$ や $\nu=1/2$ という極端な場合を除けば、Poisson 比の多少の差はこれらの値にそれほど大きな変動を与えるものではなく、また、地盤の動特性の全般的な性状を変えるほどの影響力をもつものではない。

5. む す び

半無限弾性体とみなしうるような構造物の周辺地盤の動特性を、弾性波動論から導いた“Ground Compliance”という概念で概括的に表わし、その解析的表現を求め、数値解を計算してこれがもつ特性を明らかにすることを試みた。結果は波動の逸散による地盤のみかけの減衰作用を含んだ複素数として得られ、地盤常数、基礎の形状と寸法および振動数の関数になり、4. 3. 3. にまとめて記したような諸特性を有することがわかった。

既往の研究で扱われてきた円形基礎の場合の解析結果と比較すると、円形と正方形の場合を断面積一定の関係で換算すれば、垂直・水平・回転・捩れの各加振型に対する Ground Compliance の値がほぼ一致するという結果が得られた。

Ground Compliance はこのような地盤の伝達関数であり、また剛性 (stiffness) の逆数の元をもっているため、その逆数値を地盤の等価バネ剛性として上部構造物系の伝達関数に接続すれば、周辺地盤が半無限弾性体とみなしうるような地盤上の構造物の連成系としての地震応答解析を、任意の非定常な地震外乱に対して行うことが原理的には可能である。とくに、地盤上の種々の構造物モデルの線型定常応答を求める問題は、Ground Compliance の数値解を直接利用して解析することができ、これらの構造物系の基本的な動特性 (伝達特性) を明らかにすることができる。無限積分を含む improper な三重積分で表示される Ground Compliance の解析的表現を、直接的に構造物系に接続して一般的な解析的表現を与え、応答量を数値的に得ることは、たとえ高性能の digital 電子計算機を利用したとしても、莫大な演算時間を必要とし非常に能率が悪い。そこで、数値的に得られた Ground Compliance を適当な関数形で近似し、その伝達関数としての近似的表現を analog 電子計算機における等価演算回路に、あるいは digital 電子計算機の program 上に simulate すれば、基礎周辺地盤の弾塑性性状をも含めた構造物系の非線型・非定常な地震応答を求める問題を扱うことができる。上述のような、地盤上の構造物系の地震応答解析に Ground Compliance を応用する問題は現実的にその処理が可能であり、すでにいくつかの構造物モデルについて詳細な方法と解析結果が報告されている。

このように Ground Compliance は、構造物の耐震性を追求していく上で弾性地盤に関する問題の基礎資料というべき性格をもっており、いろいろな問題に発展できるから、半無限弾性地盤の他にも、層を成す地盤、dissipative な減衰機構をもつ地盤あるいは地下構造物を含む地盤等についても、その動特性を Ground Compliance の形で求めて性状を明らかにし、種々の地盤の動特性に関する資料の集積をはかることは、今後の重要な研究課題であると考えられる。層を成す地盤を対象とする研究の第一段階として、剛な基盤上に弾性体の表層がのる場合の解析を次報において試みる。

なお数値計算には、京都大学の digital 電子計算機“KDC-I”および“KDC-II”ならびに UNICON SYSTEM による日本 IBM データセンターの digital 電子計算機“IBM 7090”を使用した。

最後に、本稿の作成にあたり多大の協力を得た研究室の諸兄に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Lamb, H.: On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 203, Series A, 1904, pp. 1—42.
- 2) Reissner, E.: Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraums, Ingenieur-Archiv, Vol. VII, 1936, pp. 381—396.
- 3) Reissner, E.: Freie und erzwungene Torsionsschwingungen des elastischen Halbraumes, Ingenieur-Archiv, Vol. VIII, 1937, pp. 229—245.
- 4) Reissner, E. and Sagoci, H.F.: Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space. I, Journal of Applied Physics, Vol. 15, 1944, pp. 652—654.
- 5) Sagoci, H.F.: Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space. II, Journal of Applied Physics, Vol. 15, 1944, pp. 655—662.
- 6) Sung, T.Y.: Vibrations in Semi-Infinite Solids due to Periodic Surface Loading, ASTM Symposium on Dynamic Testing of Solids, ASTM Special Technical Publication, No. 156, 1953, pp. 35—63.
- 7) Quinlan, P.M.: The Elastic Theory of Soil Dynamics, ASTM Symposium on Dynamic Testing of Solids, ASTM Special Technical Publication, No. 156, 1953, pp. 3—34.
- 8) Arnold, R.N., Bycroft, G.N. and Warburton, G.B.: Forced Vibrations of a Body on an Infinite Elastic Solid, Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, Sept., 1955, pp. 391—400.
- 9) Bycroft, G.N.: Forced Vibrations of a Rigid Circular Plate on a Semi-Infinite Elastic Space and on an Elastic Stratum, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 248, Series A, 1956, pp. 327—368.
- 10) Toriumi, I.: Vibrations in Foundations of Machines, Technology Reports of the Osaka University, Vol. 5, No. 146, 1955, pp. 103—126.
- 11) 鳥海 勲：弾性地盤上の機械基礎強制振動の計算，地震（地震学会），第2輯，第7巻，第4号，1955，pp. 216—225.
- 12) Toriumi, I., Sato, Y. and Yamaguchi, R.: Vibrations in Foundation, Structure and its Vicinity on the Elastic Ground, Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering, 1960, pp. 1413—1429.
- 13) 田治見宏：地下逸散減衰に関する理論計算(1)，日本建築学会論文報告集，第55号，昭32. 2，pp. 12—21.
- 14) Tajimi, H.: Dissipation Dampings of Vibrational Systems on the Elastic Ground, Proceedings of the Seventh Japan National Congress for Applied Mechanics, 1958, pp. 351—354.
- 15) 田治見宏：耐震理論に関する基礎的研究，東京大学生産技術研究所報告，第8巻，第9号，1959，pp. 170—215.
- 16) Awojobi, A.O. and Grootenhuis, P.: Vibration of Rigid Bodies on Semi-Infinite Elastic Media, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol. 287, No. 1408, 1965, pp. 27—63.
- 17) Thomson, W.T. and Kobori, T.: Dynamical Compliance of Rectangular Foundation on

- an Infinite Half-Space, Department of Engineering Report No. 62—9, University of California, 1962, pp. 1—33.
- 18) Kobori, T.: Dynamical Response of Rectangular Foundations on an Elastic-Space, 地震工学国内シンポジウム講演集, 1962, pp. 81—86.
 - 19) Thomson, W.T. and Kobori, T.: Dynamical Compliance of Rectangular Foundations on an Elastic Half-Space, Journal of Applied Mechanics, Vol. 30, Series E, No. 4, 1963, pp. 579—584.
 - 20) 小堀鐸二, 井上 豊, 鈴木 有: 弾性地盤上の矩形基礎の Ground Compliance, 日本建築学会論文報告集, 第89号, 昭38. 9, p. 194.
 - 21) 小堀鐸二, 南井良一郎, 鈴木 有: 弾性基礎地盤の動的応答, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 昭39. 2, pp. 1—7.
 - 22) 小堀鐸二, 南井良一郎, 井上 豊: 矩形基礎の Ground Compliance とその Simulation について, 京都大学防災研究所年報, 第7号, 昭和39. 3, pp. 164—178.
 - 23) 小堀鐸二, 南井良一郎, 井上 豊, 鈴木有: 基礎地盤の Dynamical Compliance の Simulation について, 日本建築学会論文報告集, 第103号, 昭39.10, p. 100.
 - 24) 小堀鐸二, 南井良一郎, 鈴木 有, 日下部馨: 矩形基礎のロッキングを含む振動について, 日本建築学会近畿支部研究報告集, 昭40.5, pp. 137—140.
 - 25) 小堀鐸二, 南井良一郎, 鈴木 有, 日下部 馨: 弾性地盤上の矩形基礎の Ground Compliance (ロッキングの場合), 日本建築学会論文報告集, 号外, 昭40.9, p. 123.
 - 26) 小堀鐸二, 南井良一郎, 鈴木 有, 日下部 馨: 弾性地盤上の矩形基礎の Ground Compliance (ねじれ振動の場合), 日本建築学会論文報告集, 号外, 昭41.10, p. 134.
 - 27) 小堀鐸二, 南井良一郎, 鈴木 有, 日下部 馨: 長方形基礎の動的コンプライアンス, 第16回応用力学連合講演会論文抄録集, 第IV部, 昭41.10, pp. 11—12.
 - 28) Longman, I.M.: On the Numerical Evaluation of Cauchy Principal Values of Integrals, Mathematical Tables and Other Aids to Computation, Vol. 12, No. 63, 1958, pp. 205—207.
 - 29) Sneddon, I.N.: Fourier Transforms, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1951.
 - 30) Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F.G.: Tables of Integral Transforms, Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.
 - 31) Ewing, W.M., Jardentsky, W.S. and Press, F.: Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1957.
 - 32) D. Bierens de Haan: Nouvelles Tables D'intégrales Définies, P. Engels, Libraire Éditeur, 1867.