

クノイド波に関する研究（第3報）

— 波形，波速および波長に関する実験 —

岩 垣 雄 一・細 見 昌 彦

STUDIES ON CNOIDAL WAVES (THIRD REPORT)

—EXPERIMENTS ON THE WAVE PROFILE, WAVE VELOCITY
AND WAVE LENGTH—

By *Yuichi IWAGAKI* and *Masahiko HOSOMI*

Synopsis

In the first and second reports, the graphs and the method to compute the wave profile and to find easily the wave velocity and wave length from a given wave period, still water depth and wave height for practical use were presented based on Laitone's cnoidal wave theory.

This paper deals with the measurements of the wave profile, wave velocity and wave length in the case of small water depth-wave length ratio and the comparisons of the experimental results of them with those of cnoidal waves of the second approximation, Stokes waves of the third order approximation and small amplitude waves.

1. ま え が き

第1報¹⁾では，1961年に摂動法によって求めたクノイド波に対する Laitone の理論解²⁾を用い，波形勾配と水深・波高比とを与えて，クノイド波の波形を簡単に求める図表を作成し，第2報³⁾では，同じく Laitone の理論解を使って，通常の波の計算に利用されるように，波の周期と水深および波高を与えて，クノイド波の波速や波長を求める図表を作った。

この論文は，第3報として，Stokes の波の理論は適用できず，クノイド波の理論を用いなければならないといわれている水深・波長比の小さい場合の実験を行ない，波形，波速，波長および波の谷から静水面までの高さを測定して，Skjelbreia⁴⁾が求めた Stokes 波の 3rd order のものや，上述の図表によって求められる Laitone のクノイド波ならびに Airy の微小振幅波のものと，どの程度の適合性があるかを調べようとしたものである。

2. 実験装置および実験方法

(1) 実験装置

実験は宇治川水理実験所にある幅 50 cm，深さ 65 cm，長さ 63 m の波浪実験用長水槽を用いて行なった。波起機は，Fig. 1 に示すようなピストン式のものであって，モーターの回転により，台車が水槽の枠上に取り付けられたレールの上を往復運動するようになっている。また，きれいな波を得るために，波起機の前方に，テトラポッドの模型とアルミ箔の細長いくずによって作ったフィルターを設置した。なお水槽の両端には，フィルターと同様な波消しを置いた。

(2) 実験方法

実験はすべて、周期 T と水深 h を固定し、すなわち $T\sqrt{g/h}$ によってあらわされる無次元量を一定とし、波高 H を変化させて行なった。ここに、 g は重力加速度である。波高は、波起機のストロークの長さを 2~22 cm まで、ほぼ 2 cm ごとに变えることにより变化させた。また水深はある間隔はなして設置した二つの波高計の近くの点において、ポイントゲージにより測定して平均をとり、周期は波起機の往復運動の 50 回の平均をとって求めた。実験を行なった水深と波の条件は Table 1 に示すようである。

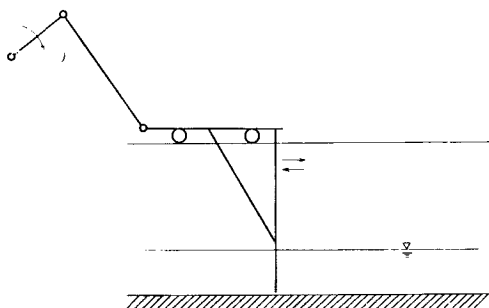


Fig. 1 Piston type wave generator.

Table 1 Conditions of waves and water depths

$T\sqrt{g/h}$	Wave period $T(\text{sec})$	Water depth $h(\text{cm})$	Wave height $H(\text{cm})$		
			for wave velo.	for wave length	for wave profile
15	1.97	16.9	1.35~5.54	1.44~5.14	5.78
20	2.80	19.2	1.45~6.53	1.35~5.44	5.72
30	3.35	12.2	0.74~3.64	0.88~3.54	3.77

a) 波速 波起機から約 30m はなれた位置に、301.5 cm の間隔で二つの電気抵抗式波高計を設置し、ペン書きオシログラフによって水位の時間的变化を記録させた。そして両者の水位記録から対応する各波の峯の間の距離を 0.5 mm の精度で読みとり、これを紙送り速度 (40 mm/sec で $1/\sqrt{5}$ sec のタイムマークによりこれを較正) で割って波が二つの波高計の間を進む時間を求め、さらにこの時間で距離 301.5 cm を除し波速 c を算出した。

b) 波長 波起機から約 30m はなれた位置に一つの波高計を固定し、他の波高計をあらかじめ算出した波長の概略値に対応する位置に離して設置しておき、これを 1.0 cm ずつ前後に移動させ、相隣れる波の峯の位置が、ちょうど二つの波高計間の距離に一致する点をペン書きオシログラフによる水位記録から 0.5 mm の精度で求め、このときの距離をもって波長とみなした。この場合の紙送り速度は 20 mm/sec とした。なお、波速、波長いずれを測定する場合にも、波起機の始動後の数波と、水槽の端から反射して返ってくる波は除外した。

c) 波形 ある瞬間における実際の波形は波長がかなり長いので測定が非常に困難であるから、ここでは実験波をパーマメント型の変形しない波とみなし、水位の時間的变化をもって波形とした。この場合、波速の測定の際に得られた記録から一つの波を選んで使用した。

3. 実験結果と理論値との比較

(1) 実験結果

Table 2 は実験によって求めた波高 H 、波速 c および波長 L の値を示したもので、この表には波形 (水位変化の記録) から読みとった波の谷から静水面までの高さ δ の値も一緒に示してある。波高は 3 桁まで示

してあるが、記録紙上の波高や線の太さなどを考えると、最大2%程度の読み取り誤差が含まれている可能性があり、波速は同じく記録紙上の相対する波の峯間の距離の測定から最大約0.5%、波長は同様にして最大約1%程度の誤差が入っていると考えられる。また、 δ の読み取り誤差は波高の誤差の2～5倍程度であろう。

(2) 理論値との比較

a) 波速 第2報の Fig. 3 において、横軸の $T\sqrt{g/h}$ の値を一定とすれば、 $c/\sqrt{gh}$ と h/H との関係が求められる。Fig. 2(a), (b)および(c)は、それぞれ $T\sqrt{g/h}$ の値が 15, 20 および 30 の場合について、

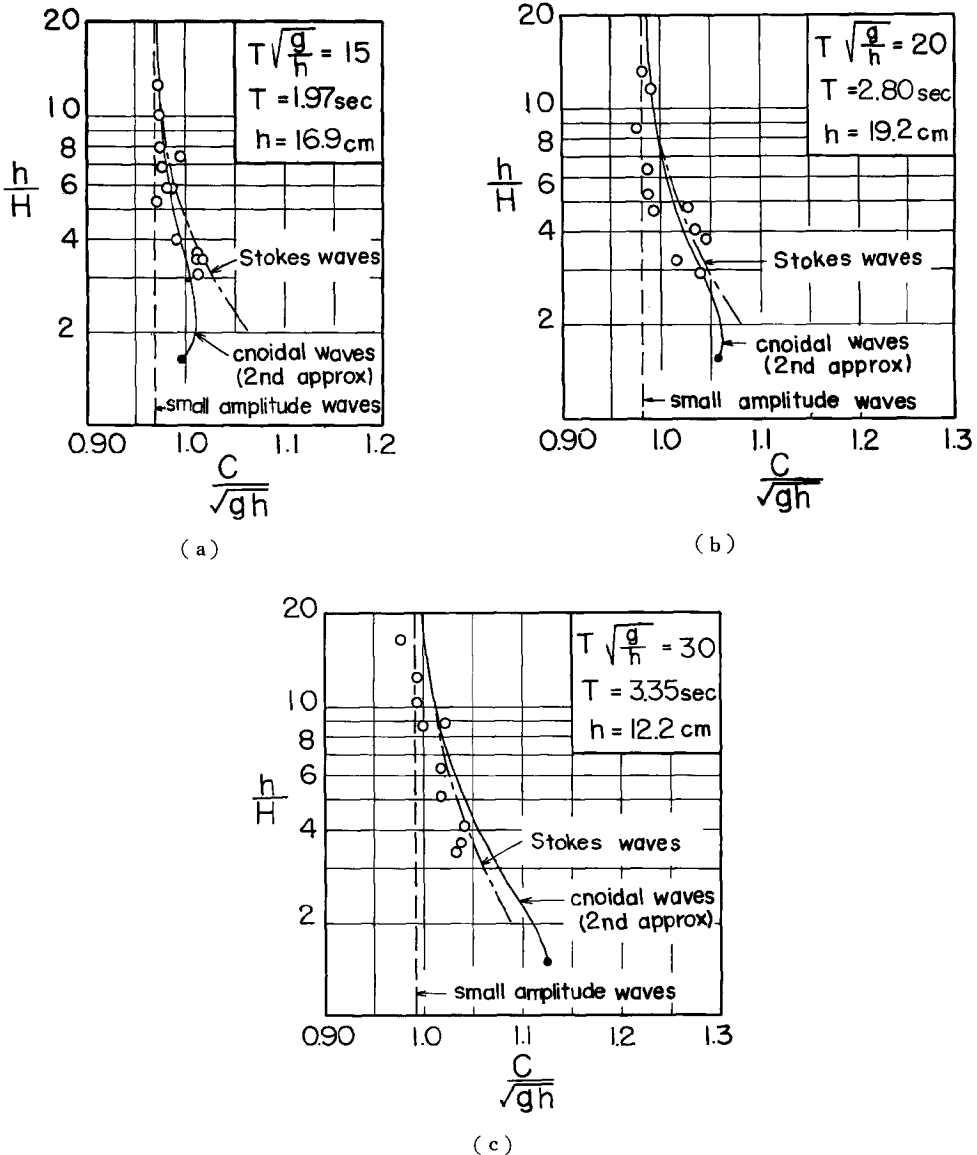


Fig. 2 Comparisons of wave velocity.

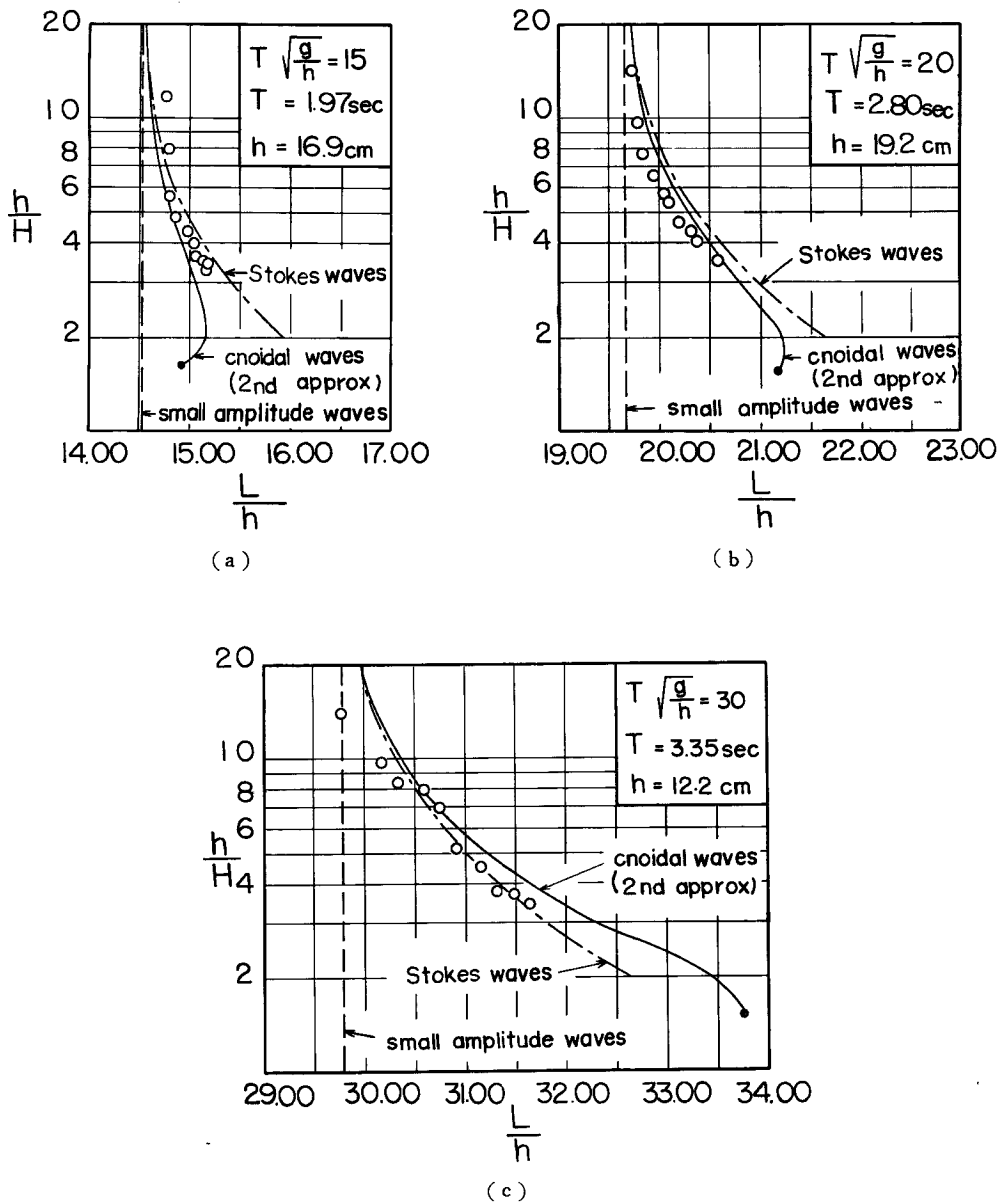


Fig. 3 Comparisons of wave length.

$c/\sqrt{gh}$ と h/H との関係を点描し、また上述の方法によりクノイド波の波速の第2近似を求め比較したもので、同時に微小振幅波の波速

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{L}{2\pi h} \tanh \frac{2\pi h}{L}} \dots\dots\dots (1)$$

および、Stokes 波の波速⁴⁾

Table 2 Experimental data of wave velocity, wave length and height from wave trough to still water level.

$T\sqrt{g/h}$	$H(\text{cm})$	c (cm/sec)	$H(\text{cm})$	$L(\text{cm})$	$H(\text{cm})$	$\delta(\text{cm})$
15	5.54	130.4	5.14	257	5.93	1.41
	4.95	131.1	4.95	257	5.81	1.79
	4.93	130.4	4.85	256	5.29	1.82
	4.70	130.4	4.66	255	5.01	1.31
	4.29	127.7	4.26	255	4.57	1.48
	3.23	125.0	3.88	254	4.34	1.25
	2.89	127.0	3.51	252	3.45	1.08
	2.89	126.4	3.01	251	2.95	1.12
	2.49	125.7	2.12	250	2.40	0.86
	2.30	128.3	1.44	250	1.55	0.64
	2.14	125.5	—	—	—	—
	1.69	125.5	—	—	—	—
1.35	125.3	—	—	—	—	
20	6.49	142.6	5.44	395	6.11	1.56
	5.90	139.4	4.74	391	5.73	1.36
	5.06	143.5	4.41	390	5.53	1.33
	4.69	142.0	4.12	388	4.76	1.25
	4.10	136.3	3.57	386	4.13	1.33
	3.97	141.1	3.36	385	3.80	0.81
	3.60	135.5	2.94	383	3.57	0.99
	3.00	135.5	2.49	381	2.96	0.81
	2.22	134.0	1.99	380	2.29	0.71
	1.66	136.0	1.35	379	1.43	0.59
	1.46	134.8	—	—	—	—
30	3.63	112.7	3.54	386	3.49	0.70
	3.38	113.3	3.31	384	3.28	0.69
	2.96	113.8	3.23	382	2.90	0.52
	2.38	111.2	2.69	380	2.40	0.63
	1.93	111.2	2.36	377	2.18	0.55
	1.41	109.3	1.76	375	1.49	0.42
	1.38	111.7	1.54	373	1.30	0.44
	1.18	108.7	1.46	370	1.22	0.41
	0.98	108.7	1.26	368	0.97	0.37
	0.74	106.7	0.88	363	—	—

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \left[\frac{L}{2\pi h} \tanh \frac{2\pi h}{L} \left\{ 1 + \left(\frac{2\pi a}{L} \right)^2 \frac{\cosh 8\pi h/L + 8}{8(\sinh 2\pi h/L)^4} \right\} \right]^{1/2}, \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{с с с, } H=2a+2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 a^3 \frac{3}{16} \frac{8(\cosh 2\pi h/L)^6+1}{(\sinh 2\pi h/L)^6} \dots\dots\dots (3)$$

をも、それぞれ破線および鎖線によって示してある。これらの図から、いずれの場合も、 h/H の値が小さくなると、実験値は微小振幅波の値より離れて大きくなるのがわかるが、 $T\sqrt{g/h}=15$ および 20 の場合は実験値が散乱し、かつクノイド波の曲線と Stokes 波のそれとが接近していて、どちらによく合うのか不明である。 $T\sqrt{g/h}=30$ の場合は、実験値はクノイド波の値より若干小さく、むしろ Stokes 波の方に合う傾向をもっている。このことは、Taylor⁵⁾ の実験でも見出される。しかし、その差は 1~2% であるから、クノイド波の第 3 近似をとれば、実験値に近づくかも知れない。

b) 波長 Fig. 3 (a), (b) および (c) は、波速の場合と同様、それぞれ $T\sqrt{g/h}$ の値が 15, 20 およ

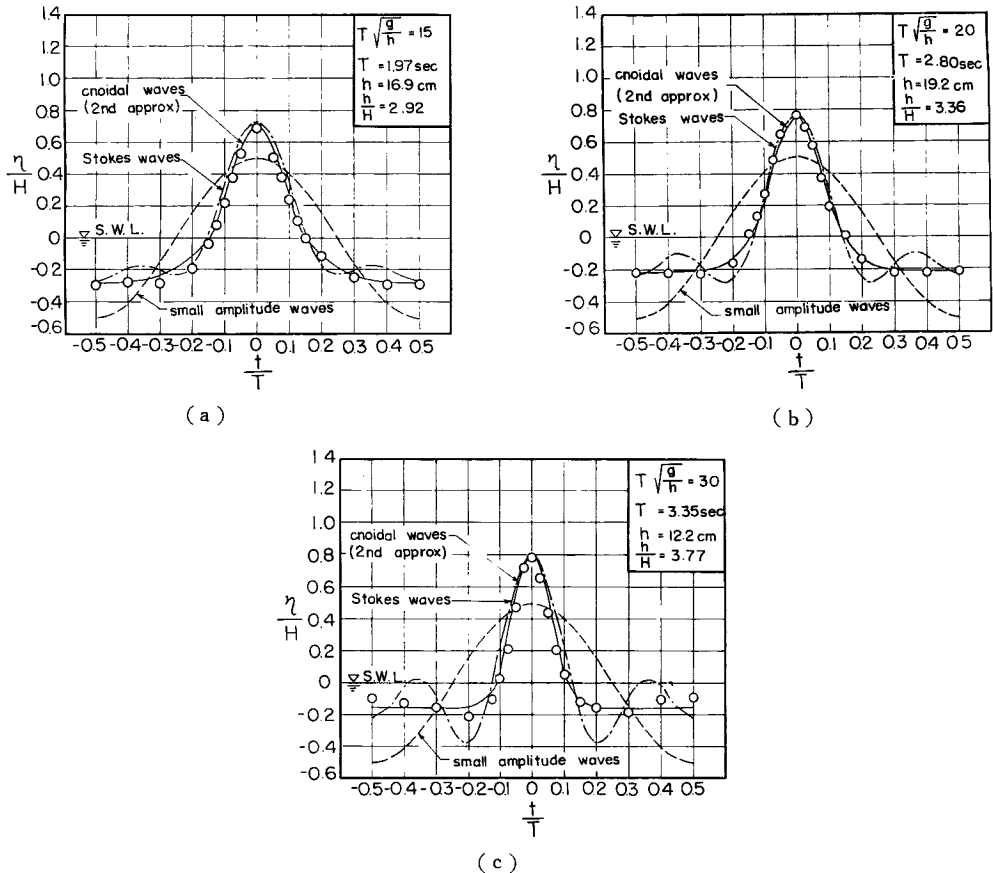


Fig. 4 Comparisons of wave profile.

び 30 のときの、 L/h と h/H との関係を点描し、第 2 報の Fig. 4 から求められるクノイド波の波長と、微小振幅波の波長

$$T\sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{\frac{2\pi L}{h}} / \sqrt{\tanh \frac{2\pi h}{L}} \dots\dots\dots (4)$$

および Stokes 波の波長

$$T\sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{\frac{2\pi L}{h}} / \sqrt{\tanh \frac{2\pi h}{L} \left\{ 1 + \left(\frac{2\pi a}{L} \right)^2 \frac{\cosh 8\pi h/L + 8}{8(\sinh 2\pi h/L)^4} \right\}} \dots\dots\dots (5)$$

を示して、実験値と比較したものである。これらの図から次のことがわかる。すなわち、 $T\sqrt{g/h}=15$ の場

合には、実験値はクノイド波の理論値より若干大きく、Stokes波の曲線とのほぼ中間に点描されているが、その差は約1%程度である。 $T\sqrt{g/h}=20$ の場合の実験値は、逆にクノイド波の理論値よりわずかに小さいが、その差は0.5~1%程度で実験誤差の範囲に入ると考えられる。 $T\sqrt{g/h}=30$ の場合も、実験値はクノイド波の理論値より1%程度小さく、むしろStokes波の方によく合っている。しかし、その差は実験の精度に近く、また後述するように、 $T\sqrt{g/h}=30$ の場合には波形が十分きれいでなかったため、波速の実験の場合をも含めて、クノイド波の第2近似の適用性を正確に検討したとはいえない。

c) 波形 Fig. 4 (a), (b) および (c) は、 $T\sqrt{g/h}$ の値が 15, 20 および 30 の各場合より、波形（水位変化）の記録を 1 例ずつ選んで読みとり点描し、クノイド波、微小振幅波（正弦波）および Stokes 波の波形と比較したもので、縦軸は静水面からの水位上昇量を η とし、それを波高 H で割って無次元化し、横軸は波の峯を基準として、時間 t を周期 T で割ったもので示してある。

これらの図を見ると、 $T\sqrt{g/h}=15$ および 20 の場合は、実験値はクノイド波の波形と非常によく一致している。Stokes 波の波形（水位変化）は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\eta}{L} &= A_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + A_2 \cos \frac{4\pi}{T} t + A_3 \cos \frac{6\pi}{T} t, \\ A_1 &= \frac{a}{L}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \frac{\pi a^2}{L^2} \frac{\cosh 2\pi h/L (\cosh 4\pi h/L + 2)}{(\sinh 2\pi h/L)^3}, \\ A_3 &= \frac{3}{16} \pi^2 \left(\frac{a}{L} \right)^3 \frac{8(\cosh 2\pi h/L)^6 + 1}{(\sinh 2\pi h/L)^6}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

によって求められるが（第1報では静水面の座標軸からの距離 δ を考慮したが、Skjelbreia の Stokes 波ではこれを考慮する必要がないので、第1報の (41) 式の δ と (43) 式は削除すべきである）、すでに第1報で指摘したように、倍振動および3倍振動の効果が著しくなって、とくに谷の部分で実験値と合わなくなる。 $T\sqrt{g/h}=30$ の場合の実験波形は、谷の部分にもう一つ低い波が現れ、理論波形とその部分は一致していない。これは波起機を改良し、きれいな波が起るようになれば、理論波形の適用性がさらに確かめられうと思われる。こうした波形のきたなさが、波速や波長の実験値にもある程度影響している可能性もある。

Fig. 5 は首藤⁶⁾による Stokes 波の波形式の収束限界と、**Fig. 4** で取りあげた三つの波の H/L および h/L の値からそれらの位置（×印）を示したもので、いずれも収束範囲内に入っているが、 $T\sqrt{g/h}=30$ の場合の波形からみて、首藤の収束限界は Skjelbreia の Stokes 波に対しては少しゆるすぎるように思われる。

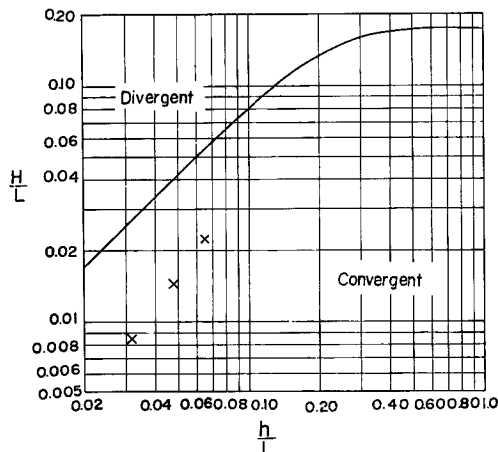
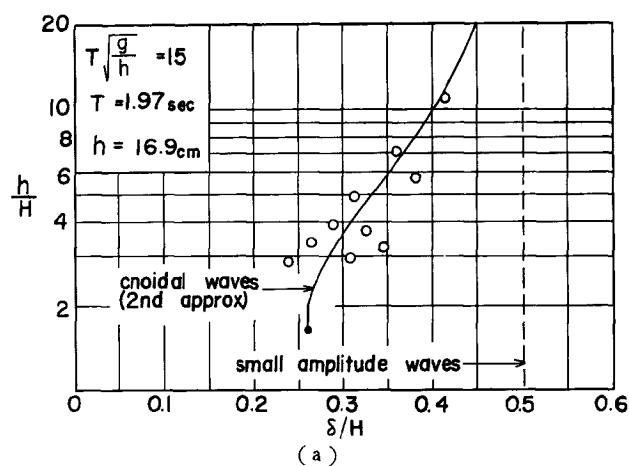
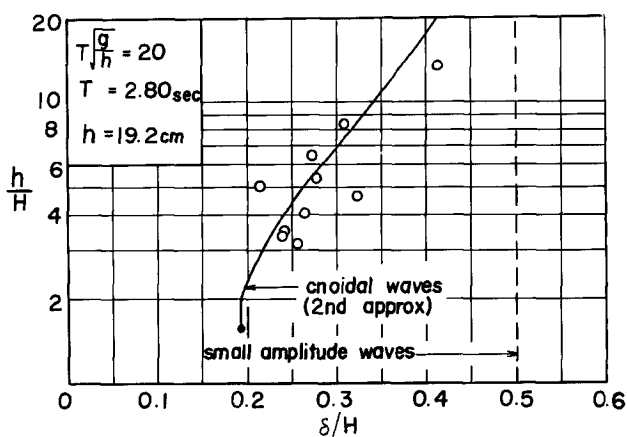


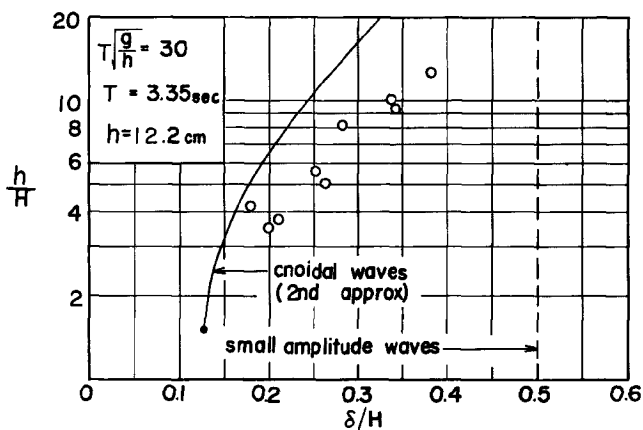
Fig. 5 Limit of convergence for series of Stokes wave profile (after Shuto).



(a)



(b)



(c)

Fig. 6 Comparisons of height from wave trough to still water level.

d) 波の谷から静水面までの高さ Fig. 6 (a), (b) および (c) は波の谷から静水面までの高さ δ を波形記録から読みとり点描した結果であり、図中のクノイド波の曲線は、第1報の Fig. 4 と第2報の Fig. 2 を用いて求めたものである。微小振幅波の場合は、図の破線で示したように δ/H の値が 0.5 となる。 $T\sqrt{g/h}=15$ と 20 の場合には、実験値が散乱しているが、ほぼクノイド波の理論値と一致している。しかし、 $T\sqrt{g/h}=30$ の場合は、実験値の方が全体として大きく、このことは、Fig. 4 (c) においてよくわかるように、水位の最も低いところを谷とみなして、そこから静水面までの高さを δ としたからであって、波形の谷の部分のきたなさが原因となっている。したがって、きれいな波が起こるように波起機を改良して測定すれば、実験値はクノイド波の理論値とよく一致するであろうことが期待される。また Fig. 6 において Stokes 波の曲線が記入されていないのは、前述したように倍振動および3倍振動の影響が大きくなって、谷の部分で波形が波うつため、 δ の定義が明確でなくなり無意味となるからである。

4. 結 語

以上、この論文では、水深・波長比の小さい場合の波について、波速、波長、波形（水位変化）および波の谷から静水面までの高さを測定し、第1報および第2報において作成した図表によるクノイド波の第2近似値や Stokes 波の 3rd order の値および微小振幅波の値と比較した。その結果、波速および波長はクノイド波および Stokes 波の両者ともほぼ一致するが、それらのどちらが適合性がよいかは明確でないこと、波形はクノイド波の方がよく一致すること、波の谷から静水面までの高さは、 $T\sqrt{g/h}=30$ の場合には波形が十分きれいでないので明かでないが、 $T\sqrt{g/h}=15$ および 20 の場合はクノイド波とはほぼ一致すること、などがわかった。しかし、水深・波高比の小さい場合の実験資料がないので、全般にわたってのクノイド波理論の適合性を十分検討することができなかった。今後はこうした実験資料を得ること、さらに波形のきれいな波を起こしうよう波起機を改良することによって、クノイド波理論の適用性を調べていきたいと考えている。

最後に、実験に当って協力して頂いた海岸災害研究室の方々に謝意を表するとともに、この研究は文部省特定研究費による研究の一部であることを付記する。

参 考 文 献

- 1) 岩垣雄一：クノイド波に関する研究（第1報）——波形こう配および波形について——，京大防災研究所年報第7号，昭39.3，pp.373~386.
- 2) Laitone, E.V. : The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 9, 1961, pp.430~444.
- 3) 岩垣雄一：クノイド波に関する研究（第2報）——波速および波長について——，京大防災研究所年報第8号，昭40.3，pp.343~351.
- 4) Skjelbreia, L. : Gravity Waves, Stokes' Third Order Approximation, Tables of Functions, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1959, pp.1~337.
- 5) Wiegel, R.L. : A Presentation of Cnoidal Wave Theory for Practical Application, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 7, No. 2, Feb.1960, pp.273~286.
- 6) 首藤伸夫：有限振幅波について——高次の級数解，その収束性および近似式の誤差について——，土木研究所報告，107号の4，昭35.9，pp.35~41.