

確率統計的方法による多自由度弾性 構造物の動力学特性の検出法

小堀 鐸二・南井良一郎・竹内 吉弘

STATISTICAL METHOD OF DETERMINING DYNAMIC CHARACTERISTICS OF MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM SYSTEMS

by *Takuji* KOBORI, *Ryoichiro* MINAI

and *Yoshihiro* TAKEUCHI

Synopsis

This paper presents two kinds of statistical methods of determining the linear dynamical characteristics of multi-degree-of-freedom systems. The first method is the extension of the Wiener-Levinson formula of a single-input and -output system to a multi-input and -output system. The optimum transfer matrix of the system is determined by the least mean square error criterion together with the physically realizable condition. The second method is derived from the relationship between the input and output spectral density matrix by only considering about the physically realizable condition. In both methods, the same number of independent stationary processes as the number of inputs to the system is necessary to determine completely the transfer matrix of the system. Moreover, the method of determining the unknown parameters by the least mean square error criterion is discussed on the case where the functional form of the transfer characteristics is presumable except a set of unknown parameters.

On the other hand, it is shown, as an example, that the dynamical characteristics of a single-degree-of-freedom system can be numerically determined with good accuracy by applying the above mentioned statistical methods on the random responses of this system calculated by means of an analog computer.

1. ま え が き

構造物の動的解析あるいは動的設計の問題において、設計され実在する構造物の動力学特性を検出して動的解析あるいは動的設計の妥当性を検証することが、少くともそれ等の経験の浅い現段階では必要である。実在構造物の動力学特性を検出する方法としては勿論、起振器等を用いる振動実験によるのが最も信頼の置ける方法であるが、一方、自然風、自然地震、あるいは地盤の常時微動等による構造物の応答を計測してその結果を確率統計的に処理して構造物の動力学特性を検出しようとする試みがある。その簡便さの故に最近行なわれている。これに関連する問題として制御工学の分野の最適設計の問題で確率統計的に既知な入力に対して出力の確率統計的性質を予め規定し、それを実現する線形系の最適伝達関数を求めることが、1入力の場合

に関する限り、定常確率過程の場合は勿論、非定常確率過程の場合にも既に解かれている¹⁻³⁾。この結果は構造工学の分野における確率統計的な入、出力の計測結果から、計測系の特性と雑音、すなわち不必要情報を除去し、構造物—基礎地盤系の動力学特性を検出する問題、あるいはまた確率統計的構造設計の問題に応用可能である。例えば前者の問題に対しては、入、出力の確率統計的性質を知って物理的実現可能な条件の許で、最もあり得るという意味で最適伝達関数を決定することになる。しかしながらこの場合、例えば計測の問題では総合伝達特性ではなく連成構造物系各部の動力学特性を多点同時計測の結果から検出したい場合も多く、また一方、構造設計の問題としても、入、出力の空間的分布が当然問題となるので、最適伝達関数の決定に際しては一般的に多入力、多出力系を対象として定める必要がある。

本論文では問題を定常確率過程の場合に限定して、斯様な意味で線形伝達関数を定める問題を、先づ最も基本的と考えられる物理的実現性と最適性を考慮したN. Wiener 氏の最適伝達関数決定法¹⁾を多入力、多出力不連続系に拡張した結果を示す。次いで簡易法として物理的実現性のみを考慮した多入力、多出力不連続系の線形伝達マトリックスの決定式を述べ、特に最も単純な1入力、1出力動力学系に適用した数値例によってここで述べた方法の可能性と妥当性を検証する。

2. 多入力、多出力線形不連続系の最適伝達マトリックス

m 個の入力と、 n 個の出力を有する物理的実現可能な定数係数の線形不連続系の入、出力関係は次式で表わされる。

$$\{\eta(t)\} = [g(t)] * \{f(t)\} \cap \{F_{\eta}(j\omega)\} = [G(j\omega)] \{F_f(j\omega)\} \quad [g(t)] = [0], t < 0 \dots\dots\dots (1)$$

(1) 式で、 $\{\eta\}$ は $(n \times 1)$ の出力ベクトル、 $\{f\}$ は $(m \times 1)$ の入力ベクトル、 $[g]$ は $(n \times m)$ の単位衝撃マトリックス、 $[G]$ は対応する伝達マトリックス、 $\{F_{\eta}\}$ 、 $\{F_f\}$ は夫々、 $\{\eta\}$ 、 $\{f\}$ のフーリエ変換、 $A * B$ は A と B の convolution を示す。物理的実現性の条件は、(1) 式の $[g(t)] = [0], t < 0$ 、あるいは対応する $[G]$ の複素平面、 ω の下半平面における正則性で示される。

次に実現すべき $(n \times 1)$ の出力ベクトル $\{h\}$ が与えられているか、あるいは予め規定された既知の線形演算子、 $[l] \cap [L]$ によって入力、 $\{f\}$ 、あるいはその信号部分、すなわち必要情報、 $\{f_m\}$ との関係が次式で規定されているとする。

$$\{h(t)\} = [l(t)] * \{f(t)\} \cap \{F_h(j\omega)\} = [L(j\omega)] \{F_f(j\omega)\} \dots\dots\dots (2)$$

あるいは、

$$\{h(t)\} = [l(t)] * \{f_m(t)\} \cap \{F_h(j\omega)\} = [L(j\omega)] \{F_{f_m}(j\omega)\} \dots\dots\dots (3)$$

而るとき、与えられた入力、 $\{f\}$ に対して物理的実現性の条件を満足する最適単位衝撃マトリックス、 $[g]$ 、あるいは対応する最適伝達マトリックス、 $[G]$ を次式で表わされる $(n \times 1)$ の2乗平均誤差ベクトル、 $\{\epsilon^2\}$ の各要素を最小ならしめる最適性の規範で定める。

$$\begin{aligned} \{\bar{\epsilon}^2\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{ (h^i(t) - g_k^i(t) * f^k(t))^2 \} dt = \{ R_h^i(0) - 2 \int_0^{\infty} g_k^i(\lambda) R_h^i(\lambda) d\lambda \\ + \int_0^{\infty} g_k^i(\lambda) d\lambda \int_0^{\infty} g_j^i(\theta) R_f^k(\theta - \lambda) d\theta \} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

(4) 式において、

$$R_h^i(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h^i(t+\tau) f^k(t) dt$$

$$R_{hf}^{ik}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h^i(t+\tau) f^k(t) dt$$

$$R_{ff}^{jk}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^j(t+\tau) f^k(t) dt \dots \dots \dots (5)$$

ここで、 h^i , f^j は夫々 $\{h\}$, $\{f\}$ の i 行, j 行要素, g_k^i は $[g]$ の i 行 k 列要素を示し、式中上下に現われる同じ添字は summation convention に従うとする。また (5) 式は出力、入出力、および入力の変関数であるが、 $\{h\}$, $\{f\}$ を零平均値に正規化すれば夫々、出力、入出力、入力の共分散マトリックス、 $[R]_o$, $[R]_{oi}$, $[R]_i$ の要素となる。

而るとき g_k^i の任意の変分, δg_k^i を考え、対応する微小パラメーター, λ_k^i を導入して次の量を考える。

$$g_k^i(t) + \lambda_k^i \delta g_k^i(t) \dots \dots \dots (6)$$

(6) 式を (4) 式の $g_k^i(t)$ の代りに用いると $\{\bar{\varepsilon}^2\}$ は $(n \times m)$ の微小パラメーターマトリックス, $[\lambda]$ の関数となり、従って、 $\{\bar{\varepsilon}^2\}$ の各要素を最小ならしめる条件は次のように表わせる。

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k^i} \bar{\varepsilon}^2{}^i([\lambda]) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial \lambda_k^i{}^2} \bar{\varepsilon}^2{}^i([\lambda]) > 0 \dots \dots \dots (7)$$

$$i=1, 2, \dots, n; \quad k=1, 2, \dots, m$$

ここで、(7)、第1式は具体的には次式のように表現される。

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k^i} \bar{\varepsilon}^2{}^i([\lambda]) = -2 \int_0^\infty \delta g_k^i(\tau) d\tau (R_{hf}^{ik}(\tau) - \int_0^\infty g_j^i(\lambda) R_{ff}^{jk}(\tau-\lambda) d\lambda) = 0 \dots \dots \dots (8)$$

(8) 式で変分, $\delta g_k^i(\tau)$ は任意であり、かつ τ に関する積分範囲は正の領域であるから、 $\{\bar{\varepsilon}^2\}$ の各要素を最小にする物理的実現可能な最適伝達マトリックス, $[G]$ を規定する条件として次の積分方程式が得られる。

$$R_{hf}^{ik}(\tau) - \int_0^\infty g_j^i(\lambda) R_{ff}^{jk}(\tau-\lambda) d\lambda = 0, \quad \tau \geq 0 \dots \dots \dots (9)$$

$$i=1, 2, \dots, n; \quad k=1, 2, \dots, m; \quad j=1, 2, \dots, m$$

ここで、入力のスペクトル密度マトリックス $[S]_i$, $(m \times m)$ が次の形で表わされることに注意する。

$$[S(\omega)]_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \{F_{fT}(j\omega)\} \{F_{fT}(j\omega)\}^* = \{\Psi(j\omega)\}_i \{\Psi(j\omega)\}_i^* \dots \dots \dots (10)$$

$$F_{fT}(j\omega) = \int_{-T}^T f(t) e^{-j\omega t} dt \dots \dots \dots (11)$$

(10) 式で $\{A\}^*$ 、一般に $[A]^*$ は夫々 $\{A\}$, $[A]$ の transposed conjugate を示す。 $[S]_i$ はその表現から判るように、非負の対角要素を有する rank 1 の複素マトリックスであり、 $\{\Psi\}_i$ は ω の下半平面で正則で、かつ $[S]_i$ の対角要素の零点を除き零でない複素ベクトルとして、 $[S]_i$ の非負の対角要素のみから定まる。

(10) 式から、入力の共分散マトリックス, $[R]_i \supset [S]_i$ の j 行, k 列要素, R_{ff}^{jk} は次のように表わせる。

$$R_{ff}^{jk}(\tau) = \psi_{11}^j(\tau) * \psi_{21}^k(\tau) \dots \dots \dots (12)$$

$$\psi_{11}^j(\tau) \supset \psi_{11}^j(j\omega), \quad \psi_{11}^j(\tau) = 0 \quad \text{for } \tau < 0$$

$$\psi_{21}^k(\tau) \supset \Psi_1^{k*}(j\omega), \quad \psi_{21}^k(\tau) = 0 \text{ for } \tau > 0 \dots\dots\dots(13)$$

(12), (13) 式を (9) 式に代入すれば, 最適条件を規定する積分方程式, (9) 式は次のように書ける。

$$R_{hf}^{ik}(\tau) = \int_{-\infty}^0 \psi_{21}^k(\theta) d\theta \int_0^{\infty} g_j^i(\lambda) \psi_{11}^j(\tau - \lambda - \theta) d\lambda, \quad \tau \geq 0 \dots\dots\dots(14)$$

$$i=1, 2, \dots\dots\dots, n; k=1, 2, \dots\dots\dots, m; j=1, 2, \dots\dots\dots, m$$

一方, 入, 出力の相互スペクトル密度マトリックス, $[S]_{oI}$, $(n \times m)$ を次の形に表現する。

$$[S(\omega)]_{oI} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \{F_{hT}(j\omega)\} \{F_{fT}(j\omega)\}^* = \{B(\omega)\} \{\Psi(j\omega)\}_I^* \dots\dots\dots(15)$$

而るとき, $\{\psi_2\}_I$ の性質 (13), 第2式から, 入, 出力の共分散マトリックス, $[R]_{oI}$ の i 行 k 列要素, R_{hf}^{ik} は次のように表わせる。

$$R_{hf}^{ik}(\tau) = \int_{-\infty}^0 \beta^i(\tau - \theta) \psi_{21}^k(\theta) d\theta, \quad -\infty < \tau < \infty \dots\dots\dots(16)$$

(16) 式を (14) 式の左辺に代入して, $\tau \geq 0$, $\theta \leq 0$, 従って, $\tau - \theta \geq 0$ を考慮し, さらに $\tau - \theta$ を新しく τ に置き換えると $[g] \supset [G]$ の最適条件式は次式となる。

$$\beta^i(\tau) = \int_0^{\infty} g_j^i(\lambda) \psi_{11}^j(\tau - \lambda) d\lambda, \quad \tau \geq 0 \dots\dots\dots(17)$$

(17) 式の両辺に $e^{-j\omega\tau}$ を乗じて, τ を 0 から ∞ まで積分すれば, 領域 $\tau \geq 0$ のみを対象として次式を得る。

$$C^i(j\omega) = \int_0^{\infty} \beta^i(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = G_j^i(j\omega) \Psi_1^j(j\omega) \dots\dots\dots(18)$$

一方, $[S]_{oI}$ の表現, (15) 式から $\beta^i(\tau)$ を規定する次式が得られる。

$$\beta^i(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B^i(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad B^i(\omega) \Psi_1^{ik*}(j\omega) = S_{hf}^{ik}(\omega) \dots\dots\dots(19)$$

m 個の入力がある場合, (18), (19) 式から最適伝達マトリックス $[G]$ のすべての要素を確定するためには, 互に独立な m 個の定常入力組,

$$[f(t)] = [\{f(t)\}_1, \dots\dots\dots, \{f(t)\}_i, \dots\dots\dots, \{f(t)\}_m] \dots\dots\dots(20)$$

を選んで, その各要素ベクトル, $\{f\}_i$ に対応する rank 1, degeneracy $(m-1)$ のスペクトル密度マトリックス, $[S]_{II}$ から (10) 式に従って $\{\Psi\}_{II}$ を定め, これ等から次の rank m のマトリックスを定める必要がある。

$$[\Psi(j\omega)]_I = [\{\Psi(j\omega)\}_{1I}, \dots\dots\dots, \{\Psi(j\omega)\}_{iI}, \dots\dots\dots, \{\Psi(j\omega)\}_{mI}] \dots\dots\dots(21)$$

而るとき, (18), (19) 式に対応して次式が得られる。

$$[C(j\omega)] = \int_0^{\infty} [\beta(\tau)] e^{-j\omega\tau} d\tau = [G(j\omega)] [\Psi(j\omega)]_I \dots\dots\dots(22)$$

$$[\beta(\tau)] \supset [B(\omega)], \quad [B(\omega)] [\Psi(j\omega)]_I^* = [S(\omega)]_{oI} = \sum_{i=1}^m [S(\omega)]_{oII} \dots\dots\dots(23)$$

(22), (23) 式から物理的実現性, すなわち ω の下半平面で正則である条件を備えた最適線形伝達マトリックス, $[G]$ が次式のように定まる。

$$[G(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^\infty [S(\omega')]_{oI} [\Psi(j\omega')]_I^* e^{j\omega'\tau} d\omega' \cdot [\Psi(j\omega)]_I^{-1} \dots (24)$$

$$[\Psi(j\omega)]_I^{-1} = [\Psi(j\omega)]_I^A (\det[\Psi(j\omega)]_I)^{-1} [\Psi(j\omega)]_I^{-1*} = [\Psi(j\omega)]_I^{*-1} \dots (25)$$

(24), (25) 式で $[A]^{-1}$, $[A]^A$ は夫々 $[A]$ の inverse matrix および adjoint matrix, $\det[A]$ は $[A]$ の determinant を示す。

なお, (2), (3) 式で $\{h\}$ が規定されている場合には,

$$[S(\omega)]_{oI} = [L(j\omega)] \sum_{l=1}^m [S]_{Il} = [L(j\omega)] [\Psi(j\omega)]_I [\Psi(j\omega)]_I^* \dots (26)$$

あるいは,

$$[S(\omega)]_{oI} = [L(j\omega)] [\Psi_m(j\omega)]_I [\Psi(j\omega)]_I^* \dots (27)$$

と表わせるから, 最適伝達マトリックス, $[G]$ は(24) 式に (26), (27) 式を代入して, 夫々次式で与えられる。

$$[G(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^\infty [L(j\omega')] [\Psi(j\omega')]_I e^{j\omega'\tau} d\omega' \cdot [\Psi(j\omega)]_I^{-1} \dots (28)$$

あるいは,

$$[G(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^\infty [L(j\omega')] [\Psi_m(j\omega')]_I e^{j\omega'\tau} d\omega' \cdot [\Psi(j\omega)]_I^{-1} \dots (29)$$

ここで, (27), (29) 式の $[\Psi_m]_I$ は m 個の $\{f_m\}$ の組, $[f_m]$ に対応して定まる (21) 式のような下半平面正則, 且つその要素が対応する $[S]_I$ の non-zero な rank m の複素マトリックスである。また (28) 式で $[L]$ が物理的実現可能ならば, 明らかに $[G] = [L]$ を得る。

なお, m 個の独立な入力過程, $[f]$ の最も単純な形は diagonal matrix,

$$[f(t)]_d = \begin{pmatrix} f_1, & 0 & \dots, & 0 \\ 0, & f_2 & \dots & \\ \dots & 0, & f_e, & 0 \dots \\ 0, & \dots, & \dots, & f_m \end{pmatrix} \dots (30)$$

で与えられるが, この場合は diagonal matrix の任意の要素, f_e に対応して 1 入力, 多出力の場合となり, 最適線形伝達マトリックス, $[G]$ の対応する列を次式から定めることになる。

$$\{G(j\omega)\}_I = \frac{1}{2\pi \Psi_{II}(j\omega)} \int_0^\infty e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{\{S(\omega')\}_{oII}}{\Psi_{II}^*(j\omega')} e^{j\omega'\tau} d\omega' \\ |\Psi_{II}(j\omega)|^2 = \Psi_{II}(j\omega) \cdot \Psi_{II}^*(j\omega) = S_{II}(\omega) \dots (31)$$

(31) 式の両辺のベクトルの間には一対一の対応があるから, (30) 式は本質的には, 1 入力, 1 出力の場合の N. Wiener 氏の結果と全く同じである¹⁾。

なお, 計測系の特性と雑音の除去の問題に関しては次式による。

$$[G(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} [H(j\omega)]_{od}^{-1} \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} [S_m(\omega')]_{ol} [\Psi_m(j\omega')]_I^{*-1} e^{j\omega'\tau} d\omega' \\ \cdot [\Psi_m(j\omega)]_I^{-1} [H(j\omega)]_{Id} \dots\dots\dots (32)$$

(32) で, $[H]_{od}$, $[H]_{Id}$ は夫々出力側, 入力側の計測系の特性, $[S_m]_{ol}$, $[\Psi_m]_I$ は計測系最終段の情報から確率統計的に既知な雑音成分を除去した必要情報に関する量である。ここで, (30), (32) 式の $[A]_d$ は **diagonal matrix** を示す。また (29) 式は計測系最終段情報から計測系の特性と雑音を除去するための物理的実現性の条件を満たす最適伝達関数で, 斯様な目的の器機の構成または設計に利用できる。この場合, 1 入力, 1 出力を考えれば充分であるから, その最適伝達関数, G は次式から定まる。

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi\Psi_I(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_{mI}(j\omega')}{H(j\omega')} e^{j\omega'\tau} d\omega' \dots\dots\dots (33)$$

(33) 式で Ψ_I , Ψ_m は夫々計測系最終段の情報およびそれから既知の雑音成分を除去した必要情報に関する量である。

以上, 定常入力のスペクトル密度と入, 出力の相互スペクトル密度を与えて物理的実現性の条件を備えた多入力, 多出力線形系の最適伝達マトリックスの決定式を **Wiener-Levinson** の方法¹⁾に従って定めた。ここで特徴的なことは多入力の場合, 最適伝達マトリックスを完全に定めるためには原則として, その入力数に等しい数の独立な入力過程を考慮しなければならないことである。このことは, ランダム振動実験から系の動力学特性を求める問題, あるいは構造設計の問題としては可能であるが, 確率統計的な自然外乱による動力学系の応答計測の結果から, その動力学特性を検出しようとする場合には必ずしも完全な数, m の独立な情報が得られるとは限らない。しかしながらこの場合にも最適伝達特性に関する必要条件は得られることになる。独立な定常確率過程の数を $m' < m$ とすれば次式が成立する。

$$[G(j\omega)][\Psi(j\omega)]_I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \langle [S'(\omega')]_{ol\nu} [\Psi'(j\omega')]_{I\nu}^{*-1} \rangle e^{j\omega'\tau} d\omega' \dots\dots (34)$$

(34) 式で $[\Psi]_I$ は (21) 式と同様な意味の $(m \times m')$ マトリックス, $[\Psi']_{I\nu}$ は $[\Psi]_I$ の部分マトリックスで $(m' \times m')$ の **non-singular matrix**, 添字 ν はその行の選び方に対応する。 $[S']_{ol\nu}$ は (23), 第2式と同じ意味の $(n \times m)$ マトリックス, $[S]_{ol} = \sum_{l=1}^{m'} [S]_{olI}$ において, 先述の ν に応じて定まる列を選んで作られる $(n \times m')$ マトリックスである。なお, $\langle A \rangle_\nu$ は A の ν に関する平均値であり, (34) 式の $\langle \rangle_\nu$ は本来 ν に無関係な量である。特に, $m' = 1$ の場合には (34) 式は次のように表わされる。

$$[G(j\omega)]\{\Psi(j\omega)\}_I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \langle \{S'(\omega')\}_{ol\nu} \Psi'_{I\nu}^{*-1}(j\omega') \rangle_\nu e^{j\omega'\tau} d\omega' \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{S_{hf}^{ik}(\omega')}{\Psi_{I1}^{k*}(j\omega')} \right\rangle_k e^{j\omega'\tau} d\omega' \dots\dots\dots (35)$$

さらに, (35) 式において, $m = m' = 1$ の場合は当然, (31) 式に帰する。

完全に最適伝達特性, $[G]$ を定めるためには独立な入力過程の数が不足な場合には, $[G]$ に関する既知な性質を活用したり, あるいは動力学特性に関する仮定を導入して動力学モデルを設定し, $[G]$ を有限あるいは無限個の離散的パラメータ $\{p\}$ と $j\omega$ の既知な関数型として表現し, 既知な性質と必要条件, (34) 式あるいは (35) 式を満足する $[G]$ を例えば, 2乗平均誤差最小の規範で定める。通常, 構造工学の問題で

は、 $[G]$ は $n=m$ の square matrix で而も対称性が成立つと考えるとよい場合が多いが、ここでは一般に $(n \times m)$ マトリックスとして、独立な定常確率過程の数が $m' < m$ のとき必要条件、(34) 式を 2 乗平均誤差最小の規範により満足する最適伝達関数が次式により定まる。先づ

$$[G(j\omega)] = [G(j\omega; \{p\})] \dots \dots \dots (36)$$

の形を想定し、(34) 式、右边を $(n \times m')$ マトリックス、

$$[\Phi(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^\infty \langle [S'(\omega')] \rangle_{01v} [\Psi'(j\omega')]_{1v}^{*-1} e^{j\omega'\tau} d\omega' \dots \dots \dots (37)$$

と置いて次の 2 乗平均誤差、 $J(\{p\})$ を考える。

$$J(\{p\}) = \int_{\iota\omega}^{v\omega} \{1\}^T [|G_k^i(j\omega; \{p\}) \Psi_l^k(j\omega) - \Phi_l^i(j\omega)|^2] \{1\} d\omega \dots \dots \dots (38)$$

$$i=1, 2, \dots, n, \quad k=1, 2, \dots, m, \quad l=1, 2, \dots, m'$$

(38) 式の右边の左乗の $\{1\}^T$ は $(1 \times n)$ ベクトル、右乗の $\{1\}$ は $(m' \times 1)$ ベクトルで従って (38) 式はスカラー量を表す。また $(\iota\omega, v\omega)$ は $(-\infty, \infty)$ で適当に選ばれた積分区間である。而るとき、 $\{p\}$ は最小 2 乗平均誤差の規範から次式によって定まる。

$$\frac{\partial J}{\partial p^\mu} = 0, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial^2 p^\mu} > 0, \quad \mu=1, 2, \dots, q \dots \dots \dots (39)$$

(39) 式の q は $\{p\}$ の次数である。(39) 式は一般には $\{p\}$ の要素、 p^μ の 1 次式とはならない。

特に、 $m=1, m'=1$ の場合には (38) 式は次のように表わせる。

$$J(\{p\}) = \int_{\iota\omega}^{v\omega} \{1\}^T [|G^i(j\omega; \{p\}) - \Phi^i(j\omega)|^2] d\omega \dots \dots \dots (40)$$

ここで、

$$\{\Phi(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi \Psi_1(j\omega)} \int_0^\infty e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{\{S(\omega')\}_{01}}{\Psi_1^*(j\omega')} e^{j\omega'\tau} d\omega' \dots \dots \dots (41)$$

3. 物理的実現可能な多入力、多出力線形不連続系の伝達マトリックス

一般に、 m 入力、 n 出力の多入力、多出力線形不連続系の入、出力のスペクトル密度マトリックスの間には次式が成立する。

$$[S(\omega)]_o = [G(j\omega)] [S(\omega)]_i [G(j\omega)]^* \dots \dots \dots (42)$$

(42) 式で、 $[G]$ は伝達マトリックス、 $[S]_i, [S]_o$ は夫々、ある多入力、多出力定常過程における入力および出力のスペクトル密度マトリックスで、(10)、(11) 式と同様に定義される rank 1 の singular matrix である。

$$[S(\omega)]_J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \{F_{JT}(j\omega)\} \{F_{JT}(j\omega)\}^* = \{\Psi(j\omega)\}_J \{\Psi(j\omega)\}_J^* \quad J=I, O \dots \dots (43)$$

(43) 式を用いて (42) 式は次のように表わせる。

$$\{\Psi(j\omega)\}_o \{\Psi(j\omega)\}_o^* = [G(j\omega)] \{\Psi(j\omega)\}_i [G(j\omega)] \{\Psi(j\omega)\}_i^* \dots \dots \dots (44)$$

2 節の場合と同様に、入力数、 m に等しい独立な定常確率過程を考えて、夫々に対応する (44) 式を加算すると次式が得られる。

$$[\Psi(j\omega)]_o [\Psi(j\omega)]_o^* = [G(j\omega)] [\Psi(j\omega)]_i [G(j\omega)] [\Psi(j\omega)]_i^* \dots \dots \dots (45)$$

ここで,

$$[\Psi(j\omega)]_J = [\{\Psi(j\omega)\}_1, \dots, \{\Psi(j\omega)\}_l, \dots, \{\Psi(j\omega)\}_m] \quad J=I, O \dots\dots\dots(46)$$

(46) 式は $J=I, O$ に応じて夫々 $(m \times m)$, $(n \times m)$ の複素平面, ω の下半平面において正則かつ要素が対応する $[S_I]$ の要素の零点を除いて non-zero な rank m のマトリックスである。従って, 伝達関数, $[G]$ が物理的実現可能, すなわち ω の下半平面で正則な条件のもとでは次式が成立する。

$$[G(j\omega)] = [\Psi(j\omega)]_O [\Psi(j\omega)]_I^{-1} \dots\dots\dots(47)$$

あるいは, (47) 式の transposed matrix を右乗して次式が得られる。

$$[G(j\omega)][G(j\omega)]^* = [\Psi(j\omega)]_O [S(\omega)]^{-1} [\Psi(j\omega)]_O^* \dots\dots\dots(48)$$

$$\text{ここに, } [S(\omega)]_I = \sum_{l=1}^m [S]_{ll} = [\Psi(j\omega)]_I [\Psi(j\omega)]_I^* \dots\dots\dots(49)$$

もし, 独立な定常確率過程の数が $m' < m$ ならば, $[G]$ を規定する次の必要条件が得られる。

$$[G(j\omega)][\Psi(j\omega)]_I = [\Psi(j\omega)]_O \dots\dots\dots(50)$$

(50) 式の $[\Psi]_I$, $[\Psi]_O$ は夫々, $(m \times m')$, $(n \times m')$ の rank m' のマトリックスである。(50) 式の transposed conjugate を右乗あるいは左乗すれば夫々次式が得られる。

$$[G(j\omega)][\Psi(j\omega)]_I [\Psi(j\omega)]_I^* [G(j\omega)]^* = [\Psi(j\omega)]_O [\Psi(j\omega)]_O^* \dots\dots\dots(51)$$

$$\text{ここで, } [\Psi(j\omega)]_J [\Psi(j\omega)]_J^* = \sum_{l=1}^{m'} [S(\omega)]_J, \quad J=I, O$$

あるいは,

$$[\Psi(j\omega)]_I^* [G(j\omega)]^* [G(j\omega)] [\Psi(j\omega)]_I = [\Psi(j\omega)]_O^* [\Psi(j\omega)]_O \dots\dots\dots(52)$$

特に, $m=m'=1$ の場合には (50), (51) 式は夫々 (47), (48) 式に一致し次のように表わせる。

$$\{G(j\omega)\} = \{\Psi(j\omega)\}_O / \Psi_I(j\omega) \dots\dots\dots(53)$$

$$\{G(j\omega)\} \{G(j\omega)\}^* = \{\Psi(j\omega)\}_O \{\Psi(j\omega)\}_O^* / S_I(\omega) \dots\dots\dots(54)$$

また, $m=m'=1$ の場合, (52) 式は次のようなスカラー量を対象とした式に表わせる。

$$\{G(j\omega)\}^* \{G(j\omega)\} = \{\Psi(j\omega)\}_O^* \{\Psi(j\omega)\}_O / S_I(\omega) \dots\dots\dots(55)$$

さらに, 特別に $n=1$ とすれば, (53)~(55) 式は (47), (48) 式で $n=m=1$ と置いた場合の 1 入力 1 出力の周知の式に帰する^{1) 2)}。

$$G(j\omega) = \Psi_O(j\omega) / \Psi_I(j\omega) \dots\dots\dots(56)$$

$$|G(j\omega)|^2 = G(j\omega) G^*(j\omega) = G^*(j\omega) G(j\omega) = S_O(\omega) / S_I(\omega)$$

一般に, $[G]$ が $(n \times m)$ マトリックスであるときも, もし入力過程が (30) 式で与えられる diagonal matrix, $[f]_d$ の任意の l 列で表わせる場合には $[G]$ の対応する列, $[G]_l$ には当然, $m=m'=1$ として (53)~(55) 式がそのまま適用できる。なお, (53), (54) 式に関しては, 各要素の間に 1 対 1 対応が成立し, さらに (54) 式で独立な関係は対角要素のみとなるから, 本質的には $n=m=1$ の場合の (56) 式と全く同等である。

物理的実現可能な $(n \times m)$ の伝達マトリックス, $[G]$ を完全に定めるには, 2 節の場合と同様に入力数, m に等しい独立な定常確率過程の数に関する入, 出力のスペクトル密度マトリックスを知る必要があるが,

一般に独立な定常確率過程の数が $m' < m$ のとき、2 節と同様に (50)～(52) 式を $[G]$ に対する必要条件として、 $[G]$ の形を未知パラメーター、 $\{p\}$ を含む既知の関数で表わし、2 乗平均誤差最少の規範で $\{p\}$ を決定することができる。先づ、 $[G]$ を (36) 式で表わし、一般に (50)～(52) 式の左辺から右辺を引いたマトリックスを誤差マトリックス、 $[\varepsilon]$ で表わす。例えば (50) 式に対応して次式となる。

$$[\varepsilon(j\omega; \{p\})] = [G(j\omega; \{p\})][\Psi(j\omega)]_I - [\Psi(j\omega)]_o \dots\dots\dots (57)$$

而るとき、(38) 式と同じ意味の 2 乗平均誤差、 $J(\{p\})$ が次式で与えられる。

$$J(\{p\}) = \int_{\omega}^{\omega} T_r([\varepsilon(j\omega; \{p\})][\varepsilon(j\omega; \{p\})]^*) d\omega \dots\dots\dots (58)$$

(58) 式の $T_r[A]$ はマトリックス、 $[A]$ の対角要素の和を示す。従って、(57)、(58) 式は (38) 式と同じ意味であり、また逆に (38) 式を (57)、(58) の表現にも書ける。

而して積分区間、 (ω, ω) を適当に定め、(39) 式によって $\{p\}$ を定める。勿論、2、3 節で述べたような 2 乗平均誤差最少の規範は系の入力数、 m 、独立な確率過程の数、 m' の如何に係らず適用できるとともに、得られた結果が既に smoothing された形となる点で便利ではあるが、一方、ここに大筋を述べたような操作では物理的実現性の条件は一般には保証されないから、別途に検討を加える必要がある。原則としては物理的実現性の条件を最初から附加した条件付き 2 乗平均誤差最少の問題として扱うのが妥当である⁴⁾。

4. 数 値 的 検 討

2、3 節に述べた伝達関数の確率統計的決定法の可能性と妥当性を検証するため、ここでは最も単純な 1 入力、1 出力弾性動力学系を対象として、その伝達関数を予め与え、定常ランダム入力による出力応答を求め、3 節の方法を適用してその伝達特性を検出する操作を数値的に行なう。

予め設定した 1 入力、1 出力弾性動力学系の基礎方程式と対応する伝達関数は次式の如くである。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2h\omega_0 \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) \eta(t) = \omega_0^2 f(t) \dots\dots\dots (59)$$

$$G(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2h\omega_0\omega} \dots\dots\dots (60)$$

(59)、(60) 式で 2 個の独立なパラメーターは次のように定めた。

$$\omega_0 = 2\pi \times 4.166 \text{ rad/sec}, \quad h = 0.05 \dots\dots\dots (61)$$

而して、この動力学系を低速度形アナログ計算機上に模擬し、一方、低周波雑音発生器から公称、正規性かつ 0.5～25cps バンド巾の白色雑音を得て、これを入力とする場合の系のランダム出力を数種計算し、入、出力共磁気テープに記録した。次に相関計を用いて各組の入、出力の自己相関関数および入、出力の相互相関関数を計算した。Figs. 1, 2 に斯くて得られた、入、出力の正規化自己相関関数、Figs. 3, 4 に入、出力の正規化相互相関関数の 1 例を示す。ここで、正規化相関関数は次式によって定義した。

$$\int_{-\infty}^{\infty} nR_J(\tau) d\tau \div 2 \int_0^{\infty} nR_J(\tau) d\tau \div 2 \int_0^{\tau_{\max}} nR_J(\tau) d\tau = 0 \quad nR_J(0) = 1 \quad J = I, O \dots\dots (62)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} nR_{oI}(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} (nR_{oI}(\tau) + nR_{Io}(\tau)) d\tau \div \int_0^{\tau_{\max}} (nR_{oI}(\tau) + nR_{Io}(\tau)) d\tau = 0 \dots\dots\dots (63)$$

$$|nR_{oI}(\tau)|_{\max} = 1, \quad \text{ここで、} \quad nR_{Io}(\tau) = nR_{oI}(-\tau)$$

(62)、(63) 式で $\tau_{\max}$ は最大遅れ時間である。なお、相関関数の計算の際、微小遅れ時間間隔、 $\Delta\tau = 0.005\text{sec}$ 、相関を取った点の数、 $N = 256$ 、従って最大遅れ時間、 $\tau_{\max} = 1.28\text{sec}$ 、積分時間は $\tau_{\max}$ の 10 倍程度を採用している。

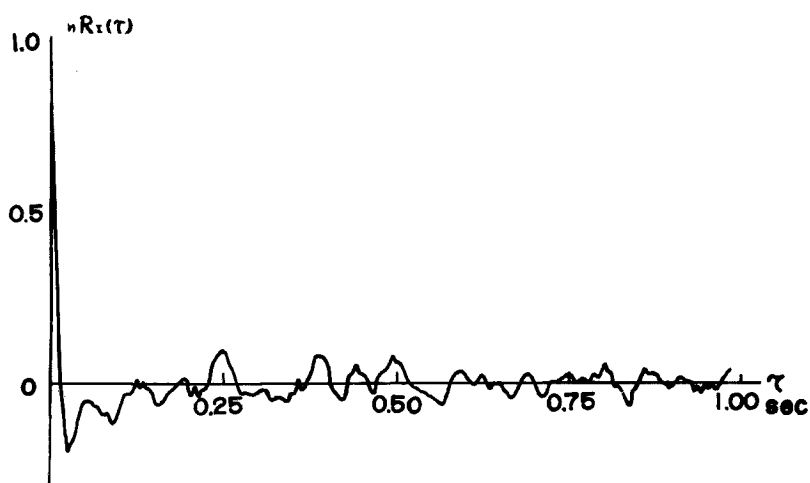


Fig. 1 Normalized auto-correlation of input.

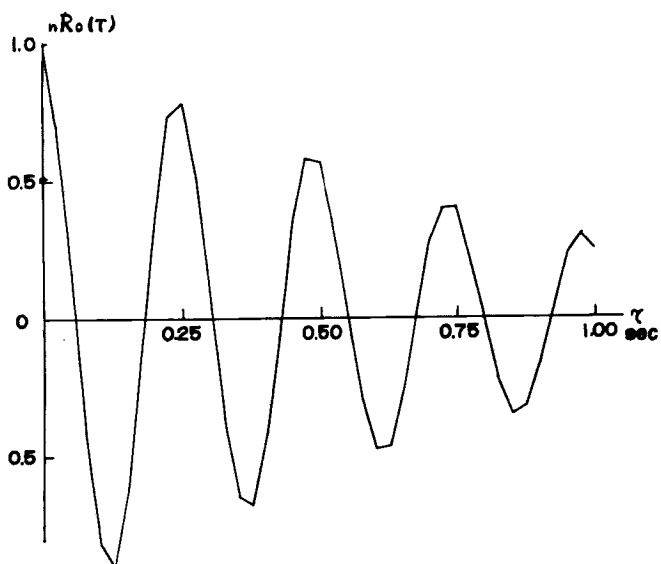


Fig. 2 Normalized auto-correlation function of output.

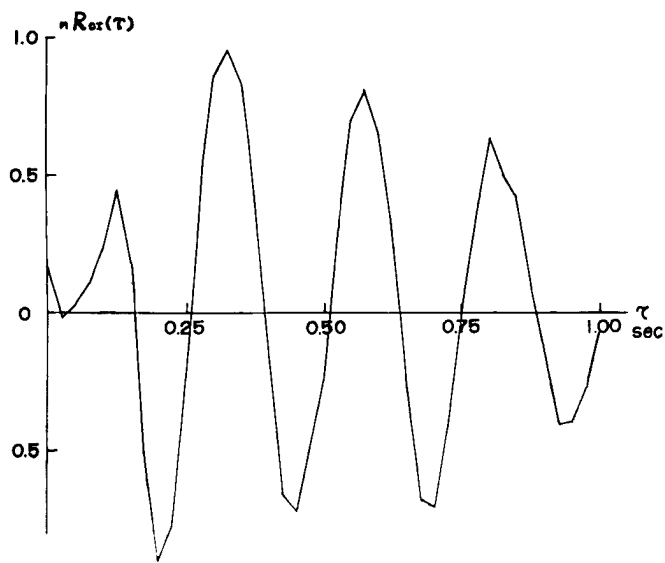


Fig. 3 Normalized cross-correlation function of output and input.

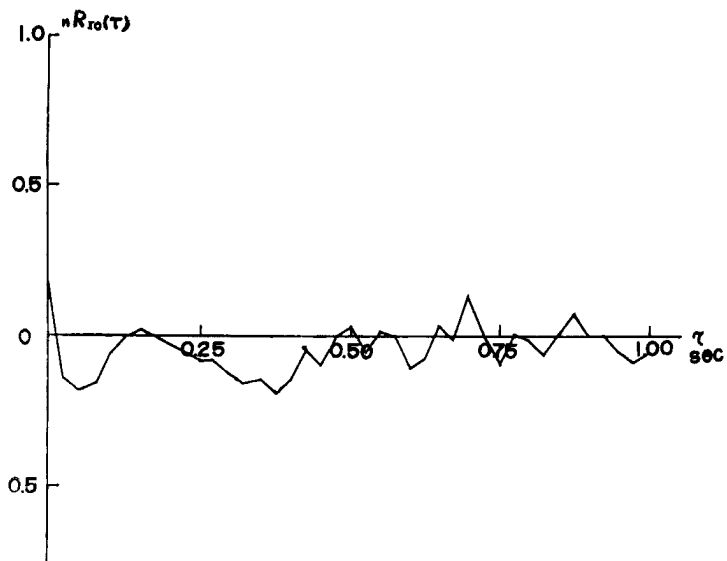


Fig. 4 Normalized cross-correlation function of input and output.

次に、入、出力の正規化スペクトル密度および、入、出力の正規化相互スペクトル密度を夫々、(62)、(63)式で定義された正規化相関関数のフーリエ変換として定義する。

$${}_nS_J(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} {}_nR_J(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} {}_nR_J(\tau) \cos \omega\tau d\tau \div 2 \int_0^{\tau_{\max}} {}_nR_J(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad J=1, 0, \dots (64)$$

$$\begin{aligned} {}_nS_{01}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} {}_nR_{01}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} ({}_nR_{01}(\tau) + {}_nR_{10}(\tau)) \cos \omega\tau d\tau - j \int_0^{\infty} ({}_nR_{01}(\tau) - {}_nR_{10}(\tau)) \sin \omega\tau d\tau \\ &\doteq \int_0^{\tau_{\max}} ({}_nR_{01}(\tau) + {}_nR_{10}(\tau)) \cos \omega\tau d\tau - j \int_0^{\tau_{\max}} ({}_nR_{01}(\tau) - {}_nR_{10}(\tau)) \sin \omega\tau d\tau \dots (65) \end{aligned}$$

(64)式に基づいて自己相関関数を step function で近似して得られたスペクトル密度の数値計算法^{5) 6)}を用いてデジタル計算機、KDC-Iによって計算された入、出力の正規化スペクトル密度を Figs. 5, 6に示す。周波数のサンプル微小区間は、 $\Delta\omega = 2\pi$ rad/sec である。Fig. 1および Fig. 5に示された入力自己相関関数とスペクトル密度によれば入力は充分雑音的ではあるが、band limited white noise とはいいい難い。また、Fig. 2および Fig. 6に示めされた出力自己相関関数とスペクトル密度から設定した動力学系が鋭いフィルター作用を有していることが判る。このことはまた Fig. 3の入、出力の相互相関関数からも窺われる。

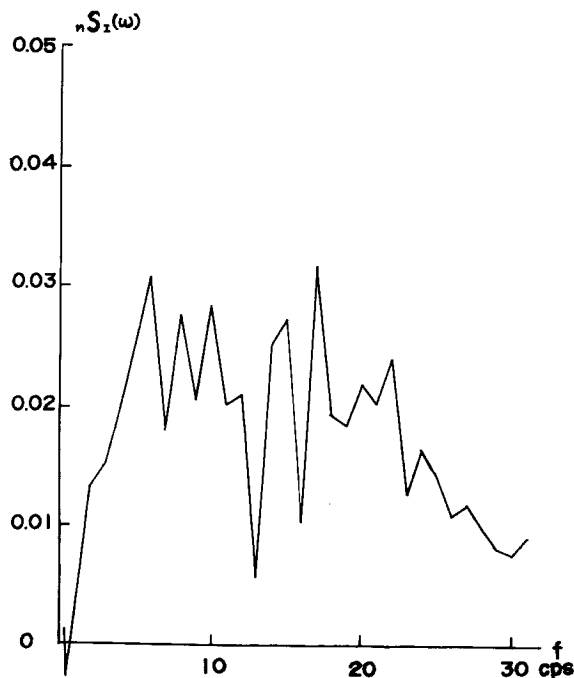


Fig. 5 Normalized spectral density of input.

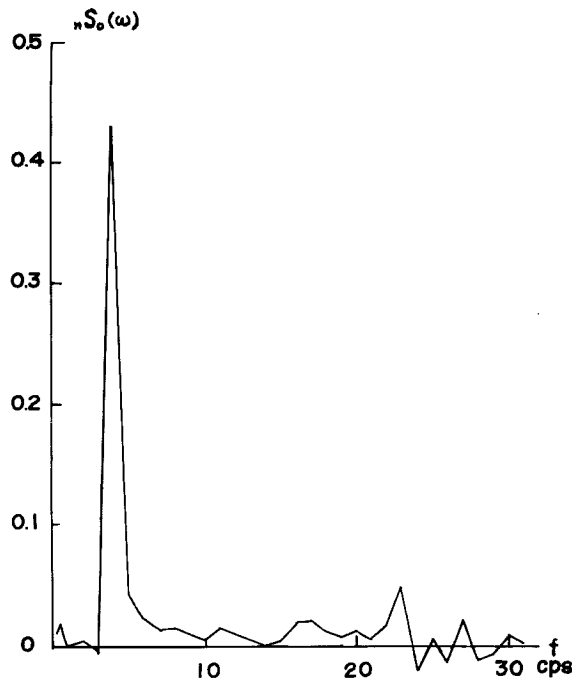


Fig. 6 Normalized spectral density of output.

次に、出力のスペクトル密度、 $S_o(\omega)$ と入力のスベクトル密度の比として(56)式に示すように系の伝達関数の絶対値の2乗が得られるが、ここで計算した正規化スペクトル密度の比から次の量が定まる。

$$|\Phi(j\omega)|^2 = \frac{nS_o(\omega)}{nS_i(\omega)} = \frac{R_i(0)}{R_o(0)} \cdot \frac{S_o(\omega)}{S_i(\omega)} = \frac{R_i(0)}{R_o(0)} |G(j\omega)|^2 \dots \dots \dots (66)$$

次に設定した系の固有周波数、4.166 cps を中央部に含む周波数領域、3～5 cps を対象として、周波数サンプリング微小区間、 $\Delta\omega = 2\pi \times 0.1 \text{ rad/sec}$ で(66)式を計算した結果を Figs. 7, 8 の○印で示す。実線はそれ等を結いだものである。なお、各図は相異なる一組の入、出力に対して計算された結果である。ここで、1入力、1出力の動力学系であることを予め設定し、(66)式を次の形に置く。

$$|\Phi(j\omega)|^2 = \frac{C}{\omega^4 + A\omega^2 + B} \dots \dots \dots (67)$$

$$A = -2\omega_0^2(1-2h^2), \quad C = \frac{R_i(0)}{R_o(0)}\omega_0^4 \quad B = \omega_0^4 \dots \dots \dots (68)$$

而して、2乗平均誤差を、

$$J(A, B, C) = \int_{L\omega}^{U\omega} ((\omega^4 + A\omega^2 + B)|\Phi(j\omega)|^2 - C)^2 d\omega \dots \dots \dots (69)$$

と置いて、(39)式により、 $J(A, B, C)$ を最小ならしめるパラメーター $\{A, B, C\}$ を定める。ここで、(69)式は3節の(56)、(57)、(58)式に基づくものを少し modify し積分において周波数に関する weighting function、 $(\omega^4 + A\omega^2 + B)^2$ を導入したことになるが、そのため(39)、第1式は単に連立多元1次方程式となる。次に、(69)式の積分区間、 $(L\omega, U\omega)$ 内のサンプル値列、 $\{\omega_i\}$ 、 $i=1, 2, \dots, n$

を用いて積分を次の形で評価する。

$$J(A, B, C) = \sum_{i=1}^n ((\omega_i^4 + A\omega_i^2 + B)|\Phi(j\omega_i)|^2 - C)^2 \quad \dots\dots\dots(70)$$

ここでは、 $L\omega = 2\pi \times 3.5 \text{ rad/sec}$, $U\omega = 2\pi \times 4.5 \text{ rad/sec}$ に選んで、その内部のサンプル値、 $n=11$ 個に対して (70) 式を最小にする $\{A, B, C\}$ を夫々、**Fig. 7**, **Fig. 8** に対応する入、出力の組 No.1, No.2 に対して次のように求めた。

No. 1 ; $A = -1356.71829$, $B = 465927.641$, $C = 249996.183$

No. 2 ; $A = -1341.97416$, $B = 455718.882$, $C = 247060.399$

これ等の数値を (67) 式に代入した結果は **Figs. 7, 8** の点線で示してある。

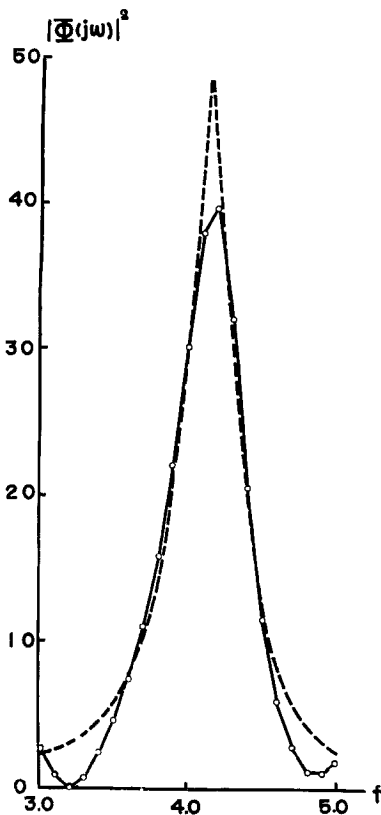


Fig. 7 Ratio of normalized spectral densities of output and input.

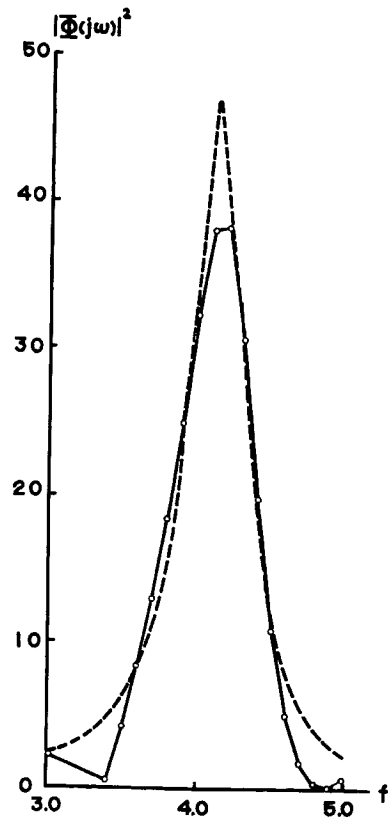


Fig. 8 Ratio of normalized spectral densities of output and input.

また、ここに得られた、 $\{A, B, C\}$ の値から、(68) 式によって、夫々次の値が得られる。

No. 1 ; $\omega_0 = 2\pi \times 4.158 \text{ rad/sec}$, $h = 0.0556$, $R_o(0)/R_i(0) = 1.861$

No. 2 ; $\omega_0 = 2\pi \times 4.135 \text{ rad/sec}$, $h = 0.0549$, $R_o(0)/R_i(0) = 1.842$

とこに得られた数値は (61) 式で最初に設定した値、 $\omega_0 = 2\pi \times 4.166 \text{ rad/sec}$, $h = 0.05$ に比較し、critical

damping ratio, h は少々大きく評価したことになるが、可成り良好に動力学特性を検出しているものと判断される。なお、 $R_o(0)/R_I(0)$ は分散の比であるが、標準偏差の比、 σ_o/σ_I に換算して、Nos. 1, 2 とともに大略、1.36 程度の数値を与える。これ等の量は物理的には (59), (60) 式で設定した動力学系に関しては、変位に関するものと考えることが出来る。

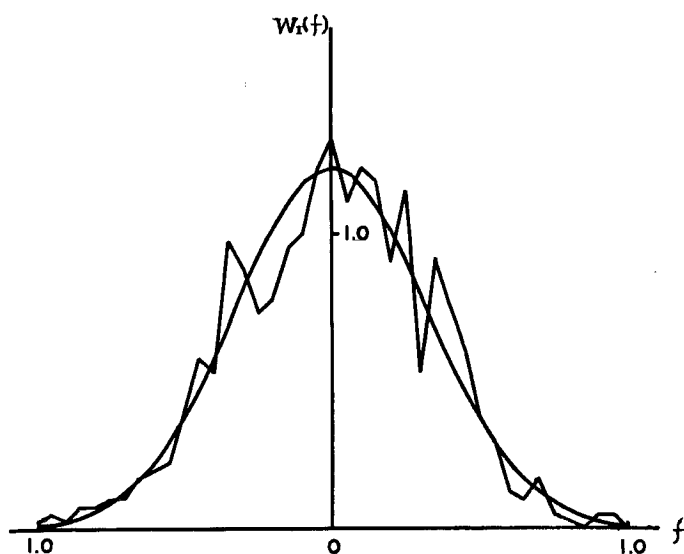


Fig. 9 Amplitude probability density distribution function of normalized input wave shape function.

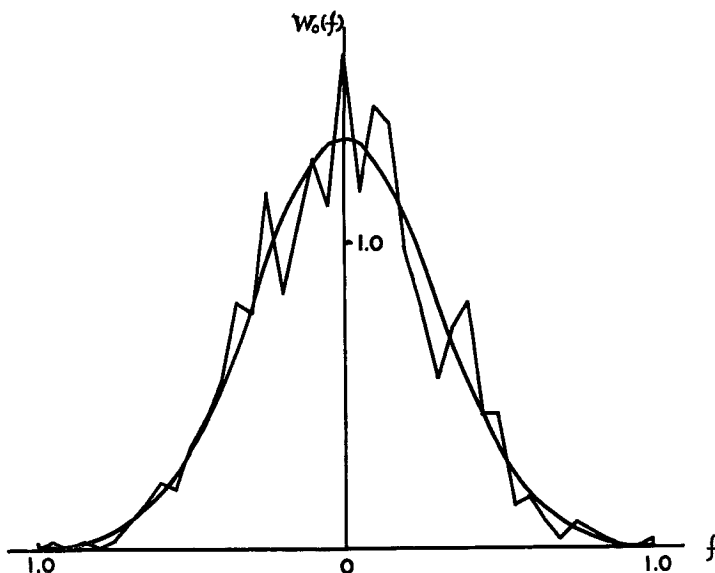


Fig. 10 Amplitude probability density distribution function of normalized output wave shape function.

なお、入、出力の正規化波形関数、すなわち、平均値、0、絶対値最大値、1で正規化した波形関数に関する振巾確率密度分布関数を **Figs. 9, 10** の折線で示す。計算に際しては、振巾区間分割数は0を中央にして41、サンプリング微小区間は0.00625sec、サンプル総数は入、出力に関して夫々、800および700であり、計算はKDC-Iによった⁵⁾。なお、**Figs. 9, 10**の滑らかな曲線は正規性を前提して正規化波形関数の分散から計算した正規分布の確率密度分布関数である。これ等の図から、入、出力とも可成りの精度で正規定常確率過程と見做し得ることが判る。

以上述べた数値的検討は3節、(48)式あるいは(56)、第2式に基づく最小2乗平均誤差の方法によるものであるが、得られた結果から、(60)式の形で定まる伝達関数、 G の分母を0と置いた代数方程式の根はともに正の実数部を有し、従って、 G は ω の下半平面で正則の物理的実現性の条件を満足している。ここで設定した1入力、1出力系では、 $n=m=m'=1$ であるから、当然、3節の(47)式あるいは(56)、第1式に基づく伝達関数決定法が適用できるが、未だその数値的検討は実施していない。このことは、一つは例えば、**Figs. 5, 6**に示したような入、出力のスペクトル密度から、(56)、第1式における、下半平面で正則かつ対応する S_J の零点を除き non-zero な複素関数、 Ψ_J 、 $J=I, O$ を定める方法に問題を残しているからである。このためには、スペクトル密度を real かつ positive な関数として例えば有理関数形の関数で smoothing して近似的に表現して既往の方法^{1~4)}を用いることも考えられるが、あるいはまた自己相関関数を中介に用いずに直接スペクトル密度の定義から定常性を用いて次式から計算することも考えられる。

$$\Psi_J(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_0^{2T} \psi_J(t) e^{-j\omega t} dt \quad J=I, O \dots\dots\dots (71)$$

(71)式で ψ_I, ψ_O は入、出力を示す。(71)式は明らかに ω の下半平面で正則であり、

$$\int_0^{2T} \psi_J(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega T} \int_{-T}^T \psi_J(t+T) e^{-j\omega t} dt \quad J=I, O \dots\dots\dots (72)$$

の関係から、次式が成立つと考えられる。

$$\Psi_J(j\omega) \Psi_J^*(j\omega) = S_J(\omega) \quad J=I, O \dots\dots\dots (73)$$

従って、 Ψ_J はその絶対値の2乗が $S_J(\omega)$ に等しく、且つ、 S_J の零点を除き non-zero、 ω の下半平面で正則な複素関数となる。しかしながら、(71)式の収束性の問題や、(73)式の成立の厳密な論議は将来の検討に俟たねばならない。

5. む す び

本論文では確率統計の方法による多自由度弾性構造物の動力学特性の検出法を得るための基礎的研究として、定常確率過程を対象として Wiener-Levinson の方法に従って多入力、多出力線形不連続系の最適伝達マトリックスを物理的実現性の条件と2乗平均誤差最小の規範から定めるとともに、一方、線形不連続系のスペクトル密度マトリックスの入、出力関係を用いて物理的実現可能な伝達マトリックスの決定法を求めた。多入力の場合、完全に伝達マトリックスを決定するためには入力数に等しい数の独立な定常確率過程に関する情報を必要とするが、特に、このような要求を満たすことの困難な自然外乱によるランダム応答の計測結果から多入力、多出力構造物の動力学特性の検出の場合を考慮して、予め動力学系の特性を未知パラメーターを含む既知な伝達特性で仮定し、不完全な数の定常確率過程の情報から、最小2乗平均誤差の規範で未知パラメーターを決定する方法も述べた。なお、原則として、この方法は確率過程の数の如何に係らず適用性があるので、便法として可成り広範に用い得ることになる。また、特に1入力、1出力線形動力学系を対象として、数値的な検討を加え、ここに述べた方法が可成り有効であることを検討した。しかしながら、

本論文で述べた方法論的結果を実際に適用する具体的なものとするためには、なお、スペクトル密度、相互スペクトル密度、あるいはスペクトル密度の factoring¹⁾ に関して将来の検討に俟たねばならない。終りに、数値解析ならびに図表の作製に当たられた大学院学生、河野允宏君に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Wiener, N. ; Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, Technology Press of M. I. T. and John Wiley.
- 2) Solodovnikov, V. V. ; Introduction to the Statistical Dynamics of Automatic Control Systems, Dover.
- 3) Peterson, E. L. ; Statistical Analysis and Optimization of Systems, John Wiley.
- 4) 小堀鐸二, 南井良一郎, 井上豊 ; 矩形基礎の Ground Compliance とその simulation について, 京大防災研究所年報, 第 7 号, 昭. 39. 3, pp. 164—178.
- 5) Tanabashi, R., Kobori, T., Kaneta, K. and Minai, R. ; Statistical Properties of Earthquake Accelerograms and Equivalent Earthquake Excitation Pattern, Bull. of the Disaster Prevention Research Institute of Kyoto Univ., Vol. 14, Part 2, Feb., 1965, pp. 49—68.
- 6) 小堀鐸二, 南井良一郎, 竹内吉弘 ; 自己相関関数およびスペクトル密度の数値計算法について, 日本建築学会論文報告集, 第103号, 昭. 39. 10. p. 105.