

Ground Compliance を考慮した 構造物の地震応答

小堀 鐸二・南井良一郎・井上 豊

EARTHQUAKE RESPONSE OF THE STRUCTURE CONSIDERING THE EFFECT OF GROUND COMPLIANCE

by Dr. Eng. Takuji KOBORI, Ryoichiro MINAI
and Yutaka INOUE

Synopsis

In this paper, the method of the response analysis of the structural system to the earthquake motion is investigated. The structural system consists of the structure, the substructure and the subsoil ground which is represented by dynamic compliance. This dynamic characteristics are simulated by the form of the linear transfer function, through which the analytical solution of the linear problem are derived. On the other hand, an analog computer block diagram for the simulated structural system has been made to obtain the responses of its non-linear, transient vibration due to the given ground motion. As the first step, the response analysis has been done for the case that the band-limited white noise is adopted to the ground acceleration and that the whole structural system has the linear characteristics.

1. 序

構造物の地震応答に及ぼす地盤の影響を可及的正当に評価し、耐震設計の経済性と設計資料の信頼性を向上せしめるため、構造物系に地震波動媒体としての弾性地盤の伝達特性を理論的或いは実験的に得られた dynamical compliance に基づいて近似的に有関関数形の線型伝達関数として導入し、さらに媒体地盤と構造物の間に線型ないし非線型復元力特性を有する周辺（隣接）地盤の伝達関数を考慮して構造物系の非定常応答解析を実施し、耐震設計の第一段の設計資料を得ることを目的とする。¹⁾

耐震設計の基本的な手順に従って²⁾統計的線型非定常解の解析的表現と任意外乱による非線型非定常解を得るために適当な analog computer の演算回路の提示に主力を置く。

ここに新しく問題とする地盤の近似的伝達関数の誘導に関しては既に前論文³⁾で詳細に論じたところである。

2. 基礎方程式とブロックダイヤグラム

簡単のため水平方向のみに考察を限定するとともに上部主構造は剪断型とする。静止座標に関する無次元ラプラス変換系での基礎方程式は下の如く書ける。

$$\begin{aligned}
 m_i s^2 U_i + g_i (U_i - U_{i-1}) - g_{i+1} (U_{i+1} - U_i) &= \sigma_i \\
 i=1, 2, \dots, n, \quad U_0 &= U_H, \quad U_n = U_{n+1} \\
 m_{HK} q^2 s^2 U_H + g_0 (U_H - U_{bH}) - g_1 (U_1 - U_H) &= \sigma_H \dots\dots\dots (1)
 \end{aligned}$$

$$\kappa_0 \tilde{\kappa}_H(qs)(U_{bH} - F_H) = g_b(U_H - U_{bH})$$

ここで、

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{\bar{K}}{M}} T, & U_i &\subset \eta_{iJ}, & U_H &\subset \eta_{HJ}, & U_{bH} &\subset \eta_{bHJ}, & F_H &\subset \bar{\eta}_H \\ \eta_{iJ} &= \frac{Y_i}{\bar{d}}, & \eta_{HJ} &= \frac{Y_H}{\bar{d}}, & \eta_{bHJ} &= \frac{Y_{bH}}{\bar{d}}, & \bar{\eta}_H &= \frac{\bar{Y}_H}{\bar{d}} \\ g_i &\subset \kappa_i \varphi_i(\zeta_i; \delta_i, r_i), & g_b &\subset \kappa_b \varphi_b(\zeta_b; \delta_b, r_b) & & & & & & \dots \dots \dots (2) \\ \tilde{\kappa}_H(qs) &= \kappa_H(s') = \kappa_H(-js') = \kappa_H(\omega') = \frac{1}{bc^{-1}\{f_{1H}(\omega') + jf_{2H}(\omega')\}} \\ s' &= j\omega', & s' &= qs = jq\omega, & \tau &= q\tau', & \omega' &= q\omega, & q &= \lambda \frac{\omega'_0}{\omega_s}, \\ \lambda &= \frac{1\omega_s}{\omega_0} = \frac{1\Omega_s}{\Omega_0}, & \tau' &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{T}{b} \\ m_i &= \frac{M_i}{M}, & m_0 &= \frac{M_H}{M}, & m_H &= \frac{M_H}{\rho b^3}, & \kappa_i &= \frac{K_{i1}}{K}, & \delta_i &= \frac{d_i}{\bar{d}}, & r_i &= \frac{K_{i2}}{K_{i1}}, & \kappa_b &= \frac{K_{b1}}{K}, \\ \delta_b &= \frac{d_b}{\bar{d}}, & r_b &= \frac{K_{b2}}{K_{b1}}, & \kappa_0 &= \frac{b\mu}{K} = \frac{m_0}{m_H q^2}, & \zeta_i &= \eta_{iJ} - \eta_{i-1J}, & \zeta_b &= \eta_{HJ} - \eta_{bHJ} \end{aligned}$$

ここに、

T:時間, Y_i, Y_H, Y_{bH} ; i 層, 下部構造, 境界層(周辺地盤)変位(静止座標系), \bar{Y}_H ; 水平地動変位, σ_i, σ_H ; 初期条件演算子を含む非斉次項, φ_i, φ_b ; i 層, 境界層無次元 bi-linear hysteretic type 復元力特性, $\kappa_H(\omega')$; 弾性地盤上の矩形基礎の無次元バネ特性, $f_{1H}(\omega') + jf_{2H}(\omega')$; 同無次元 compliance 特性, (dynamical compliance) b, c ; 矩形基礎地動方向および直角方向寸法, ρ, μ ; 弾性地盤密度および Lamé の定数, $1\Omega_s, \Omega_0$; 上部構造および下部構造を独立としたときの最低次固有角振動数, M_i, M_H ; i 層, 下部構造質量, K_{i1}, K_{i2}, d_i ; i 層復元力第1, 第2分枝剛性および弾性限変位(従って $B_i = K_{i1}d_i$ は弾性限強度), K_{b1}, K_{b2}, d_b ; 境界層に対応する前項の量, $\bar{M}, \bar{K}, \bar{d}$; 質量, 剛性, 変位の規準量(上部構造一層に対応するものを採用する), n ; 上部質点総数, なお, 変数 (τ, ω, s) および (τ', ω', s') の組は夫々上部構造, 下部構造に関して独立に得られた無次元時間, 角振動数および対応するラプラス変換複素パラメーターであり, 上下の振動数比が両方の無次元系の変数を次式で結合する。

$$\tau = q\tau', \quad \omega = q^{-1}\omega', \quad s = q^{-1}s' \quad \dots \dots \dots (3)$$

水平地動変位を規準とした運動座標系での無次元ラプラス変換系は(1)式から次の如く導くことが出来る。

$$\begin{aligned} m_i s^2 u_i + g_i(u_i - u_{i-1}) - g_{i+1}(u_{i+1} - u_i) &= -m_i f + \sigma_i \\ i &= 1, 2, \dots, n, \quad u_0 = u_H, \quad u_n = u_{n+1}, \\ m_H \kappa_0 q^2 s^2 u_H + g_b(u_H - u_{bH}) - g_1(u_1 - u_H) &= -m_H \kappa_0 q^2 f + \sigma_H \quad \dots \dots \dots (4) \\ \kappa_0 \tilde{\kappa}_H(qs) u_{bH} &= g_b(u_H - u_{bH}) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} u_i &= U_i - F_H \subset \eta_i, & u_H &= U_H - F_H \subset \eta_H, & u_{bH} &= U_{bH} - F_H \subset \eta_{bH} \\ f &= s^2 F_H \subset (d^2/d\tau^2) \bar{\eta}_H & & & & & & & & \dots \dots \dots (5) \\ \eta_i &= \eta_{iJ} - \bar{\eta}_H, & \eta_H &= \eta_{HJ} - \bar{\eta}_H, & \eta_{bH} &= \eta_{bHJ} - \bar{\eta}_H \end{aligned}$$

(4)式に対応するブロックダイヤグラムは(4)式を次式の如く変形することによって容易に求められる。これを Fig. 1 に示す。

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{1}{m_i s^2} [-m_i f - g_i(u_i - u_{i-1}) + g_{i+1}(u_{i+1} - u_i)] \\ u_H &= \frac{\tilde{\kappa}_H(qs)}{m_H q^2 s^2} \left[\frac{1}{\tilde{\kappa}_H(qs)} \left\{ -m_H q^2 f + \frac{g_1(u_1 - u_H)}{\kappa_0} \right\} - u_{bH} \right] \quad \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

$$u_{bH} = \frac{1}{\kappa_g \tilde{\kappa}_H(qs)} g_b (u_H - u_{bH})$$

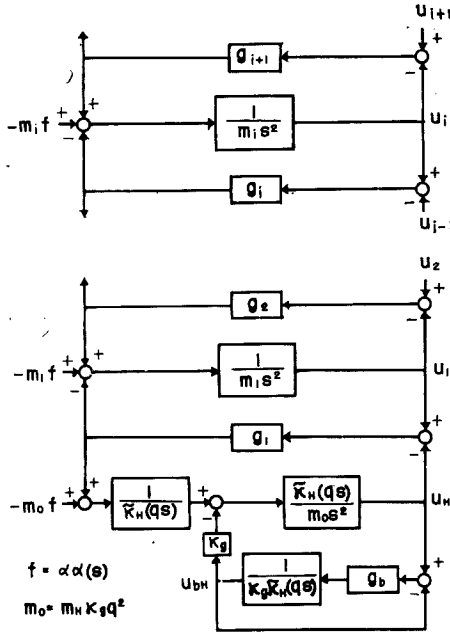


Fig. 1. Block-diagram of dynamic system considering ground compliance.

3. 近似伝達関数を含む線型系の解の解析的表現

3.1 伝達関数と単位衝撃関数

ここで導入する弾性地盤の近似伝達関数 $1/\tilde{\kappa}_H(s')$ は前論文の(57)式に示した有理関数型とする。

$$1/\tilde{\kappa}_H(s') = 1/\tilde{\kappa}_H(qs) = \sum_{k=0}^{N-1} d'_{kH} q^k s^k / \sum_{k=0}^N c_{kH} q^k s^k \quad (7)$$

而るとき(1), (4)式は線型の場合, 次の型の無次元基礎方程式に統一出来る。

$$([a]s^2 + [b]s + [c(s)]) \{\phi\} = \{F\} \quad (8)$$

ここに,

$\{\phi\}$; ラプラス変換無次元変位, $\{F\}$; 初期条件演算子を含むラプラス変換一般化外乱, $[a]$; 質量分布, $[b]$; 粘性減衰分布, $[c(s)]$; 周波数特性を含むバネ分布

上式の解 $\{\phi\}$ は次の如く表わせる。

$$\{\phi\} = [G] \{F\}, \quad [G] = ([a]s^2 + [b]s + [c(s)])^{-1} \quad (9)$$

$$[G] = \left[\frac{[1]D_j^i(s)}{D_0(s)} \right]$$

$$D_0(s) = \det. ([a]s^2 + [b]s + [c(s)]) = \det. [w] \quad (10)$$

$$[1]D_j^i(s); \text{ cofactor of } w_j^i$$

$[G]$ は伝達マトリックスであるが, これを一般には $D_0(s) = 0$ の複素非完全一般化直交固有値問題を解くことにより, 文献 2), 4) に示されたと同様な手順で機械的に, そのラプラス逆変換である単位衝撃関数を得る。(1), (4)式から $[w]$ は次の形をとる。

$$[w] = \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}_H(qs) + \kappa_b, & -\kappa_b, & 0, & \dots, & 0 \\ -\kappa_b, & m_H \kappa_0 q^2 s^2 + \kappa_b + \kappa_1, & -\kappa_1, & 0, & \dots \\ 0, & -\kappa_1, & m_1 s^2 + \kappa_1 + \kappa_2, & -\kappa_2, & 0, & \dots \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & -\kappa_n \\ 0, & \dots, & \dots, & -\kappa_n, & m_n s^2 + \kappa_n & \dots \end{pmatrix} \dots \quad (11)$$

従ってこの場合対称性が成立つ。

$$[G] = [G]^T, \quad [g] = [g]^T = [P][D][P]^T \quad \dots \quad (12)$$

ここで[P]は固有ベクトルに関するマトリックス, [D]はtime factorを表わすマトリックスである。^{2),4)} 固有値は[G(s)]の極としてのみ意味があるから(10)式第一式から判るように固有値方程式 $\bar{d}_e(s) = 0$ と次に定義する $\bar{d}_e(s) = 0$ は同等である。

$$\bar{d}_e(s) = \sum_{k=0}^{N-1} d'_{kH} q^k s^k \Delta_e(s) \quad \dots \quad (13)$$

$\bar{d}_e(s)$ は境界層の存在する場合 $N+2(n+1)$ 次代数方程式となり, 特に $\kappa_b = \infty$ の場合は $N+2n+1$ 次代数方程式となる安定系では固有値は当然負数と負実数部を有する共軛複素数からなる。例えば, $N=2$ の場合で $\tilde{\kappa}_H(qs)$ に剛体が直結した場合には次の如き結果を得る。

$$G(s) = \frac{d'_{1q}s + d'_0}{m_H d'_{1q} q^3 s^3 + (m_H \kappa_0 d'_0 + 1) q^2 s^2 + c_1 q s + c_0} \quad \dots \quad (14)$$

$$\bar{d}_e(s) = m_H \kappa_0 d'_{1q} q^3 s^3 + (m_H \kappa_0 d'_0 + 1) q^2 s^2 + c_1 q s + c_0 \quad \dots \quad (15)$$

s_1 : negative, $s_2 = s_3^* = \alpha + j\beta$, α : negative, β : positive

$$g(\tau) = \frac{1}{m_H \kappa_0 q^2} \left[\frac{\left(s_1 + \frac{d'_0}{d'_{1q}} \right) e^{s_1 \tau}}{\{\beta^2 + (\alpha - s_1)^2\}} + \frac{e^{\alpha \tau} R \sin(\beta \tau - \varphi)}{\beta \{\beta^2 + (\alpha - s_1)^2\}} \right]$$

$$R = \left[\left\{ (\alpha - s_1) \left(\alpha + \frac{d'_0}{d'_{1q}} \right) + \beta^2 \right\} + \beta^2 \left(s_1 + \frac{d'_0}{d'_{1q}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \dots \quad (16)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\beta \left(s_1 + \frac{d'_0}{d'_{1q}} \right)}{(\alpha - s_1) \left(\alpha + \frac{d'_0}{d'_{1q}} \right) + \beta^2}$$

$$g(0) = 0, \quad \tau \leq 0, \quad g(\infty) = 0$$

3.2 確定外乱による解の表現

i) 非定常解: 3.1に得た単位衝撃[g]と初期条件演算子を含む一般化外乱²⁾⁴⁾の合成形として次の形に表現される。

$$\{n\} = [g] * \{\bar{f}\}, \quad \{\bar{f}\} = \{f\} + \{\sigma\} \quad \dots \quad (17)$$

ここに, {f}は外乱ベクトル, {σ}は初期条件演算子を含む確定ベクトル, 運動座標に関する解(17)式を相対座標に変換するには, 次のマトリックスを左乗すればよい。

$$\{n\}_r = \begin{pmatrix} 1, & 0, & \dots, & [0] \\ -1, & 1, & 0, & \dots \\ 0, & -1, & 1, & 0, & \dots \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & 0 \\ [0] & \dots, & 0, & -1, & 1 \end{pmatrix} \{n\} \quad \dots \quad (18)$$

ii) 定常解: 一般に定常外乱 {F} = {F(jω)}による定常解 {φ(jω)}は次式で得られる。

$$\{\phi(j\omega)\} = [G(j\omega)] \{F(j\omega)\} \quad \dots \quad (19)$$

振巾及び位相特性は夫々次式の様になる。

$$\{|\phi(j\omega)|\} = \{|[G(j\omega)] \{F(j\omega)\}|\} = \{|G_j^i(j\omega) F^j(j\omega)|\}$$

$$\{\arg \phi(j\omega)\} = \{\arg G_j^i(j\omega) F^j(j\omega)\} = \left\{ \sum_j \arg G_j^i(j\omega) + \arg F^j(j\omega) \right\} \quad \dots \quad (20)$$

ここに添字 j は summation convention に従う dummy suffix である。

特に(4)式に対しては、

$$\{F(j\omega)\} = -[a] \{1\} f(j\omega), \quad [a] = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \dots, & \dots, & [0] \\ 0, & m_H \omega^2, & 0, & \dots, & \dots \\ 0, & 0, & m_1, & \dots, & \dots \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots \\ [0] & & & & 0, & m_n \end{pmatrix} \quad \dots \dots \dots (21)$$

となり、特にここで、

$$f(j\omega) = Ae^{i\omega\tau}, \quad \{f(j\omega)\} = \{B\} e^{i\omega\tau}, \quad B: \text{complex number} \quad \dots \dots \dots (22)$$

として振幅増大率と位相差を問題にすれば次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \{B/A\} &= \{\phi(j\omega)\}_{r=1} = -[G(j\omega)][a] \{1\} = -[G_j^i(j\omega)] \{m^j\} \\ &= -\{G_j^i(j\omega)m^j\} = -\{m^j \mathbf{R}G_j^i(j\omega) + m^j \mathbf{I}G_j^i(j\omega)\} \quad \dots \dots \dots (23) \end{aligned}$$

$$\text{但し, } \{m^j\} = [a] \{1\} = \{0, m_H \omega^2, m_1, \dots, m_n\}^T$$

従って

$$\begin{aligned} \{|B/A|\} &= \{[(m^j \mathbf{R}G_j^i(j\omega))^2 + (m^j \mathbf{I}G_j^i(j\omega))^2]^{1/2}\} \\ \left\{ \arg \left(\frac{B}{A} \right) \right\} &= \left\{ \tan^{-1} \frac{m^j \mathbf{I}G_j^i(j\omega)}{m^j \mathbf{R}G_j^i(j\omega)} \right\} \quad \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

但し $-\pi \leq \arg(B/A) \leq \pi$ で $\mathbf{R}(B/A) = -m^j \mathbf{R}G_j^i(j\omega)$, および $\mathbf{I}(B/A) = -m^j \mathbf{I}G_j^i(j\omega)$ の符号の組合せで一意的に定まる。

3. 3 統計的外乱による解の表現

ここでは外乱は正規過程であるとし、相関マトリックスおよびスペクトル密度マトリックスを主として論ずる。外乱が擬定常過程に属する時の応答の非定常過程については既に論じたところであるが、^{2), 5)} ここでは一般の非定常外乱に拡張し、スペクトル密度マトリックスを新たに論ずる。但し分布に関しては線型出力は正規であり、従って出力の平均値、及び偏差に関する相関マトリックスに含まれるものとなる。

i) 非定常外乱による解の表現：非定常過程における平均はすべて空間平均を意味する。(10)式から次式を得る。

$$\langle \eta \rangle = [g] * \langle \bar{f} \rangle = [g] * \{f\} + [g] * \{\sigma\} \quad \dots \dots \dots (25)$$

$$E_s \langle \eta \rangle = [g] * E_s \{f\} + [g] * \{\sigma\} \quad \dots \dots \dots (26)$$

$$\langle \eta \rangle_a = \langle \eta - E_s \eta \rangle = [g] * \{f - E_s f\} \quad \dots \dots \dots (27)$$

偏差の相関マトリックス (共分散マトリックス) は(27)式に得られた偏差を用いて次の如く表わす。^{2) 6)}

$$\begin{aligned} [{}_0K(\tau_1, \tau_2)] &= E_s \langle (\eta - E_s \eta)_{\tau_1} (\eta - E_s \eta)_{\tau_2} \rangle \\ &= \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} [g(\tau_1 - \mu_1)] [{}_1K(\mu_1, \mu_2)] [g(\tau_2 - \mu_2)] d\mu_1 d\mu_2 \quad \dots \dots \dots (28) \end{aligned}$$

ここに、

$$[{}_1K(\tau_1, \tau_2)] = E_s \langle \{f - E_s f\}_{\tau_1} \{f - E_s f\}_{\tau_2} \rangle$$

次に任意の非定常過程に属する関数 $\xi(\tau)$ の偏差 $\xi_d(\tau)$ について、そのスペクトル密度を導入する。

$$\xi_d(\tau) = \xi(\tau) - E_s \xi(\tau) \quad \dots \dots \dots (29)$$

ここで、非定常地震応答を主対象とする関係上、

$$\xi_d(\tau) = 0, \quad \tau \leq 0 \quad \dots \dots \dots (30)$$

とするが、この前提は以下の議論に対して本質的でなく、従って一般性を失うものではない。

$\xi_d(\tau)$ の定義された変域で τ' を選り次の関数を定義する。

$$\xi_d(\tau, \tau') = \xi_d(\tau) \{s(\tau) - s(\tau - \tau')\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_d}(\omega, \tau') e^{j\omega\tau} d\omega \quad \dots \dots \dots (31)$$

ここに,

$$F_{\xi_d}(\omega, \tau') = \int_0^{\tau'} \xi_d(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$s(\tau - \tau') = 0, \quad \tau < \tau'; \quad s(0) = \frac{1}{2}, \quad \tau = \tau'; \quad s(\tau - \tau') = 1, \quad \tau > \tau' \dots \dots \dots (32)$$

$s(\tau)$: step function

ここで,

$$\tau'_1 = \tau_1 + \varepsilon'_1, \quad \tau'_2 = \tau_2 + \varepsilon'_2, \quad \varepsilon'_1 > 0, \quad \varepsilon'_2 > 0,$$

の様に (τ_1, τ_2) , (τ'_1, τ'_2) を選び(31)式の表現を用いて偏差についての相互相関(共分散)をとる。

$$K_{\xi_d}(\tau_1, \tau_2; \tau'_1, \tau'_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau'_1, \tau'_2) e^{j(\omega_1\tau'_1 - \omega_2\tau'_2)} d\omega_1 d\omega_2 \dots \dots \dots (33)$$

ここに,

$$S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau'_1, \tau'_2) = E_S(F_{\xi_d}(\omega_1, \tau'_1) F_{\xi_d}^*(\omega_2, \tau'_2)) \dots \dots \dots (34)$$

$$= \int_0^{\tau'_1} \int_0^{\tau'_2} K_{\xi_d}(\mu_1, \mu_2) e^{-j(\omega_1\mu_1 - \omega_2\mu_2)} d\mu_1 d\mu_2$$

ここで上側添字*は共轭複素数を示し, 例えば(25)~(27)式の convolution と区別する。ここで $K_{\xi_d}(\mu_1, \mu_2)$ を断片的連続として(32)式を(33)式に代入し(34)式を考慮して次の極限值を考える。

$$\lim_{\substack{\varepsilon'_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon'_2 \rightarrow 0}} K_{\xi_d}(\tau_1, \tau_2; \tau_1 + \varepsilon'_1, \tau_2 + \varepsilon'_2) = K_{\xi_d}(\tau_1, \tau_2; \tau_1 + 0, \tau_2 + 0)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\substack{\varepsilon'_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon'_2 \rightarrow 0}} S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau_1 + \varepsilon'_1, \tau_2 + \varepsilon'_2) e^{j(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2)} d\omega_1 d\omega_2 \dots \dots \dots (35)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2) e^{j(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2)} d\omega_1 d\omega_2$$

$\xi_d(0) = 0$ 即ち $K(0, 0) = 0, K(0, \tau_2) = 0, K(\tau_1, 0) = 0$ を考慮すれば, (35)式は区間 $[0, \tau_1 + 0), [0, \tau_2 + 0)$ において非正常過程の共分散に一致する。即ち(33)式の一般の表現によって次式が得られる。

$$K_{\xi_d}(\mu_1, \mu_2; \tau_1 + 0, \tau_2 + 0) = K_{\xi_d}(\mu_1, \mu_2) = E_S(\xi_d(\mu_1) \xi_d(\mu_2))$$

$$0 \leq \mu_1 \leq \tau_1, \quad 0 \leq \mu_2 \leq \tau_2 \dots \dots \dots (36)$$

従ってその右端の値から, 次の表現が成立する。

$$S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2) = \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} K_{\xi_d}(\mu_1, \mu_2) e^{-j(\omega_1\mu_1 - \omega_2\mu_2)} d\mu_1 d\mu_2 \dots \dots \dots (37)$$

$$K_{\xi_d}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2) e^{j(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2)} d\omega_1 d\omega_2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}(S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2) e^{j(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2)}) d\omega_1 d\omega_2 \dots \dots \dots (38)$$

ここに \mathbf{R}, \mathbf{I} は夫々実数部および虚数部を示す。(37), (38)式は互に二重 Fourier 変換の対をなす。ここで, $S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)$ を二次元複素スペクトル密度(精しくは重み関数 $e^{j(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2)}$ を随伴する。), $\mathbf{R}(S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2) e^{j(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2)})$ を二次元スペクトル密度と定義する。これらは一般の分布の場合, 更に高次の平均に対しても同様な関係に拡張することが出来るし, また二つの異なる非正常過程 $\xi_d^1(\tau_1), \xi_d^2(\tau_2)$ に対しても容易に拡張出来, 夫々二次元相互複素スペクトル密度 $S_{\xi_d^1 \xi_d^2}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)$, 二次元相互スペクトル密度 $\mathbf{R}(S_{\xi_d^1 \xi_d^2}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2)})$ を定義出来る。即ち

$$K_{\xi_d^1 \xi_d^2}(\tau_1, \tau_2) = E_S(\xi_d^1(\tau_1), \xi_d^2(\tau_2))$$

$$S_{\xi_d^1 \xi_d^2}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2) = E_S(F_{\xi_d^1}(\omega_1, \tau_1) F_{\xi_d^2}^*(\omega_2, \tau_2)) \dots \dots \dots (39)$$

として次式の関係が成立する。

$$S_{\xi_d^1 \xi_d^2}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2) = \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} K_{\xi_d^1 \xi_d^2}(\mu_1, \mu_2) e^{-j(\omega_1\mu_1 - \omega_2\mu_2)} d\mu_1 d\mu_2 \dots \dots \dots (40)$$

$$\begin{aligned}
 K_{\xi_d^1 \xi_d^2}(\tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_d^1 \xi_d^2}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2) e^{j(\omega_1 \tau_1 - \omega_2 \tau_2)} d\omega_1 d\omega_2 \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}(S_{\xi_d^1 \xi_d^2}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2) e^{j(\omega_1 \tau_1 - \omega_2 \tau_2)}) d\omega_1 d\omega_2 \dots \dots \dots (41)
 \end{aligned}$$

(38)式において $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ とおけば二乗平均 (分散) が得られる。

$$\begin{aligned}
 K_{\xi_d}(\tau, \tau) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau, \tau) e^{j(\omega_1 - \omega_2)\tau} d\omega_1 d\omega_2 \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}(S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau, \tau) e^{j(\omega_1 - \omega_2)\tau}) d\omega_1 d\omega_2 \dots \dots \dots (42)
 \end{aligned}$$

$$S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau, \tau) = \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} K_{\xi_d}(\mu_1, \mu_2) e^{-j(\omega_1 \mu_1 - \omega_2 \mu_2)} d\mu_1 d\mu_2$$

次に(37)式で定義された $S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)$ と定常過程における一次元の所謂スペクトル密度との関係を示しておく。(37)式において、

$$\tau_2 = \tau_1 + \tau \dots \dots \dots (43)$$

とおき、更に(30)式の代りに $(-\infty, \infty)$ で定義された $\xi_d(\tau)$ を考える。

$$\begin{aligned}
 S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_1 + \tau) &= \int_{-\infty}^{\tau_1} \int_{-\infty}^{\tau_1 + \tau} K_{\xi_d}(\mu_1, \mu_2) e^{-j(\omega_1 \mu_1 - \omega_2 \mu_2)} d\mu_1 d\mu_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\tau_1 + \tau} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{\tau_1 - \lambda_2} K_{\xi_d}(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) e^{-j(\omega_1(\lambda_1 + \lambda_2) - \omega_2 \lambda_2)} d\lambda_1
 \end{aligned}$$

上式で $\tau_1 \rightarrow \infty$, $K_{\xi_d}(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) = R_{\xi_d}(\lambda_1) = R_{\xi_d}(-\lambda_1)$ とすれば、

$$\begin{aligned}
 S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \infty, \infty) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi_d}(\lambda_1) e^{-j\omega_1 \lambda_1} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_1 - \omega_2)\lambda_2} d\lambda_2 \\
 &= 2\pi S_{\xi_d}(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \dots \dots \dots (44)
 \end{aligned}$$

ここに δ は delta-function である。

(38)式に(43), (44)式を代入して $\tau_1 \rightarrow \infty$ の極限を考えると周知の関係式を得る。

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau_1 \rightarrow \infty} K_{\xi_d}(\tau_1, \tau_1 + \tau) &= R_{\xi_d}(\tau) = \lim_{\tau_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi S_{\xi_d}(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) e^{-j(\omega_1 \tau_1 - \omega_2(\tau_1 + \tau))} d\omega_1 d\omega_2 \\
 &= \lim_{\tau_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_d}(\omega_1) d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega_1 - \omega_2) e^{-j(\omega_1 \tau_1 - \omega_2(\tau_1 + \tau))} d\omega_2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_d}(\omega_1) e^{j\omega_1 \tau} d\omega_1 \dots \dots \dots (45)
 \end{aligned}$$

次に(37)式に定義した二次元複素スペクトル密度から次の二種の一次元複素スペクトル密度を定義する。

$$\begin{aligned}
 S_{1\xi_d}(\omega_1; \tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2) e^{-j\omega_2 \tau_2} d\omega_2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} K_{\xi_d}(\mu_1, \mu_2) e^{-j\omega_1 \mu_1} d\mu_1 d\mu_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_2(\tau_2 - \mu_2)} d\omega_2 \\
 &= \int_0^{\tau_1} e^{-j\omega_1 \mu_1} d\mu_1 \int_0^{\tau_2} K_{\xi_d}(\mu_1, \mu_2) \delta(\tau_2 - \mu_2) d\mu_2 \\
 &= \int_0^{\tau_1} K_{\xi_d}(\mu_1, \tau_2) e^{-j\omega_1 \mu_1} d\mu_1 \dots \dots \dots (46)
 \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned}
 S_{2\xi_d}(\omega_2; \tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_d}(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2) e^{-j\omega_1 \tau_1} d\omega_1 \\
 &= \int_0^{\tau_2} K_{\xi_d}(\tau_1, \mu_2) e^{j\omega_2 \mu_2} d\mu_2 \dots \dots \dots (47)
 \end{aligned}$$

これ等を用いて次の一重 Fourier 積分の対を得る。

$$\begin{aligned}
 S_{1\varepsilon_d}(\omega; \tau_1, \tau_2) &= \int_0^{\tau_1} K_{\varepsilon_d}(\mu, \tau_2) e^{-j\omega\mu} d\mu \\
 K_{\varepsilon_d}(\tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{1\varepsilon_d}(\omega; \tau_1, \tau_2) e^{j\omega\tau_1} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}(S_{1\varepsilon_d}(\omega; \tau_1, \tau_2) e^{j\omega\tau_1}) d\omega \dots\dots\dots (48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{2\varepsilon_d}(\omega; \tau_1, \tau_2) &= \int_0^{\tau_2} K_{\varepsilon_d}(\tau_1, \mu) e^{j\omega\mu} d\mu \\
 K_{\varepsilon_d}(\tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{2\varepsilon_d}(\omega; \tau_1, \tau_2) e^{-j\omega\tau_2} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}(S_{2\varepsilon_d}(\omega; \tau_1, \tau_2) e^{-j\omega\tau_2}) d\omega
 \end{aligned}$$

(37), (48)式で定義された複素スペクトル密度の間には次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned}
 S_{1\varepsilon_d}^*(\omega; \tau_1, \tau_2) &= S_2(\omega; \tau_2, \tau_1), \quad S_{2\varepsilon_d}^*(\omega; \tau_1, \tau_2) = S_1(\omega; \tau_2, \tau_1), \\
 S^*(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2) &= S(\omega_2, \omega_1; \tau_2, \tau_1) \dots\dots\dots (49)
 \end{aligned}$$

(48)式で $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ において二乗平均値が得られる。

$$\begin{aligned}
 K_{\varepsilon_d}(\tau, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{1\varepsilon_d}(\omega; \tau, \tau) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}(S_{1\varepsilon_d}(\omega; \tau, \tau) e^{j\omega\tau}) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{2\varepsilon_d}(\omega; \tau, \tau) e^{-j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}(S_{2\varepsilon_d}(\omega; \tau, \tau) e^{-j\omega\tau}) d\omega \dots\dots\dots (50)
 \end{aligned}$$

非定常過程におけるスペクトル密度の表現としては(48), (50)式に現れた一次元スペクトル密度,

$$\mathbf{R}(S_{1\varepsilon_d}(\omega; \tau_1, \tau_2) e^{j\omega\tau_1}) = \mathbf{R}(S_{2\varepsilon_d}(\omega; \tau_1, \tau_2) e^{-j\omega\tau_2}) = S_{R\varepsilon_d}(\omega; \tau_1, \tau_2) \dots\dots\dots (51)$$

が最も物理的に判り易いものである。(51)式と通常のスペクトル密度 $S_{\varepsilon_d}(\omega)$ との関係は(44)式の誘導と同様にして次の如く得られる。

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{R}\{S_{1\varepsilon_d}(\omega; \tau, \tau) e^{j\omega\tau}\} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{R}\{S_{2\varepsilon_d}(\omega; \tau, \tau) e^{-j\omega\tau}\} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} S_{R\varepsilon_d}(\omega; \tau, \tau) = S_{\varepsilon_d}(\omega) \dots\dots\dots (52)$$

さて(28)式の $[{}_I K(\mu_1, \mu_2)]$ に(38), (41)式を適用すれば次式を得る。

$$\begin{aligned}
 [{}_0 K(\tau_1, \tau_2)] &= \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} [g(\tau_1 - \mu_1)] \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [{}_I S(\omega_1, \omega_2; \mu_1, \mu_2)] \dots\dots\dots (53) \\
 &\quad \times e^{j(\omega_1\mu_1 - \omega_2\mu_2)} d\omega_1 d\omega_2 [g(\tau_2 - \mu_2)] d\mu_1 d\mu_2
 \end{aligned}$$

ここで, $0 \leq \mu_1 \leq \tau_1, 0 \leq \mu_2 \leq \tau_2$ であるから(33), (36)式から $\mu_1 = \tau_1, \mu_2 = \tau_2$ においてもよい。従って

$$\begin{aligned}
 [{}_0 K(\tau_1, \tau_2)] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [{}_I S(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)] e^{j(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2)} d\omega_1 d\omega_2 \\
 &\quad \times \int_0^{\tau_1} [g(\tau_1 - \mu_1)] e^{-j\omega_1(\tau_1 - \mu_1)} d\mu_1 \int_0^{\tau_2} [g(\tau_2 - \mu_2)] e^{j\omega_2(\tau_2 - \mu_2)} d\mu_2 \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [G^J(j\omega_1; \tau_1)] [{}_I S(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)] [G(-j\omega_2; \tau_2)] e^{j(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2)} d\omega_1 d\omega_2 \dots\dots (54)
 \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
 [G(j\omega_1; \tau_1)] &= \int_0^{\tau_1} [g(\tau_1 - \mu_1)] e^{-j\omega_1(\tau_1 - \mu_1)} d\mu_1 = \int_0^{\tau_1} [g(\lambda)] e^{-j\omega_1\lambda} d\lambda \\
 [G(-j\omega_2; \tau_2)] &= [G(j\omega_2; \tau_2)]^* = \int_0^{\tau_2} [g(\lambda)] e^{j\omega_2\lambda} d\lambda \\
 [{}_I S(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)] &= E_d(\{F_{I_d}(\omega_1; \tau_1)\} \{F_{I_d}^*(\omega_2; \tau_2)\}^T) \dots\dots\dots (55) \\
 &= \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} [{}_I K(\mu_1, \mu_2)] e^{-j(\omega_1\mu_1 - \omega_2\mu_2)} d\mu_1 d\mu_2
 \end{aligned}$$

一方(38), (41)式から直接次式が得られる。

$$[{}_0K(\tau_1, \tau_2)] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [{}_0S(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)] e^{j(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2)} d\omega_1 d\omega_2 \quad \dots\dots\dots (56)$$

上式と(54)式を対照すれば次の関係が得られる。

$$[{}_0S(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)] = [G(j\omega_1; \tau_1)] [{}_I S(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)] [G(-j\omega_2; \tau_2)] \quad \dots\dots\dots (57)$$

(37), (40)式からは(54)式の逆変換が得られる。

$$[{}_0S(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)] = \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} [{}_0K(\mu_1, \mu_2)] e^{-j(\omega_1\mu_1 - \omega_2\mu_2)} d\mu_1 d\mu_2 \quad \dots\dots\dots (58)$$

(58)式は(56)式の直接の逆変換公式と積分範囲において異っているが、これは(56)式は厳密には(35)式によって定義され、従って(30), (31), (33), (36)式から(56)式は一般に次式の意味を有する。

$$\begin{aligned} [{}_0K(\mu_1, \mu_2; \tau_1, \tau_2)] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [{}_0S(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)] e^{j(\omega_1\mu_1 - \omega_2\mu_2)} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= [{}_0K(\mu_1, \mu_2)] (s(\mu_1 - 0, \mu_2 - 0) - s(\mu_1 - \tau_1 - 0, \mu_2 - \tau_2 - 0)) \quad \dots\dots\dots (59) \end{aligned}$$

ここに $s(\mu_1 - \tau_1, \mu_2 - \tau_2)$ は二次元の step function で

$$\begin{aligned} s(\mu_1 - \tau_1, \mu_2 - \tau_2) &= 0, & \mu_1 < \tau_1 \text{ 或いは } \mu_2 < \tau_2 \\ s(0, \mu_2 - \tau_2) &= -\frac{1}{2}, & \mu_1 = \tau_1 \text{ 且つ } \mu_2 > \tau_2 \\ s(\mu_1 - \tau_1, 0) &= \frac{1}{2}, & \mu_1 > \tau_1 \text{ 且つ } \mu_2 = \tau_2 \quad \dots\dots\dots (60) \\ s(0, 0) &= \frac{1}{4}, & \mu_1 = \tau_1 \text{ 且つ } \mu_2 = \tau_2 \\ s(\mu_1 - \tau_1, \mu_2 - \tau_2) &= 1, & \mu_1 > \tau_1 \text{ 且つ } \mu_2 > \tau_2 \end{aligned}$$

従って、逆変換 $[{}_0S(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)]$ の表現は(58)式に示す様に有限区域の積分表示となる。もし非定常過程が $(-\infty, \tau_1], (-\infty, \tau_2]$ で考えられるならば(58)式は次の様に書ける。

$$[{}_0S(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)] = \int_{-\infty}^{\tau_1} \int_{-\infty}^{\tau_2} [{}_0K(\mu_1, \mu_2)] e^{-j(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2)} d\mu_1 d\mu_2 \quad \dots\dots\dots (61)$$

ここで(56)~(61)式の $[{}_0S(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)]$ の意味は定義から

$$[{}_0S(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)] = E_{\delta}(\{F_{\eta_d}(\omega_1, \tau_1)\} \{F_{\eta_d}^*(\omega_2, \tau_2)\}^T) \quad \dots\dots\dots (62)$$

即ち(58)式の意味であり、二次元複素スペクトル密度マトリックスと呼ぶ。入力に関しても当然(55)式第三式で定義された二次元複素スペクトル密度の共分散マトリックス表示の逆変換が次の様に示される。

$$[{}_I K(\tau_1, \tau_2)] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [{}_I S(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)] e^{j(\omega_1\tau_1 - \omega_2\tau_2)} d\omega_1 d\omega_2 \quad \dots\dots\dots (63)$$

上式も一般には(59)式と同様な意味を有する。また、以上に定義された二次元複素スペクトル密度マトリックスから実数としての二次元スペクトル密度マトリックスを(38), (41)式から定義することも出来るし、更に次の一次元複素スペクトル密度マトリックスおよび一次元スペクトル密度マトリックスを前と同様に定義することが出来る。

$$\begin{aligned} [{}_{\nu} S_1(\omega; \tau_1, \tau_2)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [{}_{\nu} S(\omega, \omega_2; \tau_1, \tau_2)] e^{-j\omega_2\tau_2} d\omega_2 \\ &= \int_0^{\tau_1} [{}_{\nu} K(\mu, \tau_2)] e^{-j\omega\mu} d\mu \quad \dots\dots\dots (64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [{}_{\nu} S_2(\omega; \tau_1, \tau_2)] &= [{}_{\nu} S_1(\omega; \tau_2, \tau_1)]^* \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [{}_{\nu} S(\omega_1, \omega; \tau_1, \tau_2)] e^{j\omega_1\tau_1} d\omega_1 \\ &= \int_0^{\tau_2} [{}_{\nu} K(\tau_1, \mu)] e^{j\omega\mu} d\mu \quad \dots\dots\dots (65) \end{aligned}$$

$$[{}_{\nu} S_R(\omega; \tau_1, \tau_2)] = \mathbf{R}([{}_{\nu} S_1(\omega; \tau_1, \tau_2)] e^{j\omega\tau_1})$$

$$= \mathbf{R}([\nu S_2(\omega; \tau_1, \tau_2)]e^{-j\omega\tau_2})$$

$$\nu = I, 0 \quad \dots\dots\dots (66)$$

これを用いて逆に共分散マトリックスは次の様に書ける。

$$[{}_I K(\tau_1, \tau_2)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [{}_I S_1(\omega; \tau_1, \tau_2)] e^{j\omega\tau_1} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [{}_I S_2(\omega; \tau_1, \tau_2)] e^{-j\omega\tau_2} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [{}_I S_R(\omega; \tau_1, \tau_2)] d\omega, \quad \nu = I, 0 \quad \dots\dots\dots (67)$$

更にこれらの入出力間のスペクトル密度の関係は次の様になる。

$$[{}_0 S_1(\omega; \tau_1, \tau_2)] = [G(j\omega; \tau_1)] [{}_I S(\omega; \tau_1, \tau_2)]_{\tau_2}^* [g(\tau_2)] \quad \dots\dots\dots (68)$$

$$= [G(j\omega; \tau_1)] \int_0^{\tau_2} [{}_I S_1(\omega; \tau_1, \mu)] [g(\tau_2 - \mu)] d\mu$$

$$[{}_0 S_2(\omega; \tau_1, \tau_2)] = [{}_0 S_1(\omega; \tau_2, \tau_1)]^*$$

$$= [g(\tau_1)]_{\tau_1}^* [{}_I S_2(\omega; \tau_1, \tau_2)] [G(-j\omega; \tau_2)] \quad \dots\dots\dots (69)$$

$$= \int_0^{\tau_1} [g(\tau_1 - \mu)] [{}_I S_2(\omega; \mu, \tau_2)] d\mu [G(-j\omega; \tau_2)]$$

$$[{}_0 S(\omega; \tau_1, \tau_2)] = \mathbf{R}([G(j\omega; \tau_1)] [{}_I S_1(\omega; \tau_1, \tau_2)] e^{j\omega\tau_1})_{\tau_2}^* [g(\tau_2)]$$

$$= (\mathbf{R}([G(j\omega; \tau_1)] [{}_I S_R(\omega; \tau_1, \tau_2)] - \mathbf{I}([G(j\omega; \tau_1)] [{}_I S_1(\omega; \tau_1, \tau_2)]))_{\tau_2}^* [g(\tau_2)]$$

$$= [g(\tau_1)]_{\tau_1}^* \mathbf{R}([{}_I S_2(\omega; \tau_1, \tau_2)] e^{-j\omega\tau_2} [G(-j\omega; \tau_2)])$$

$$= [g(\tau_1)]_{\tau_1}^* ([{}_I S_R(\omega; \tau_1, \tau_2)] \mathbf{R}[G(j\omega; \tau_2)] - [{}_I S_I(\omega; \tau_2, \tau_1)] \mathbf{I}[G(j\omega; \tau_2)]) \quad \dots\dots\dots (70)$$

ここに,

$$[{}_I S_R(\omega; \tau_1, \tau_2)] = \mathbf{R}([{}_I S_1(\omega; \tau_1, \tau_2)] e^{j\omega\tau_1}) = \mathbf{R}([{}_I S_2(\omega; \tau_1, \tau_2)] e^{-j\omega\tau_2})$$

$$[{}_I S_I(\omega; \tau_1, \tau_2)] = \mathbf{I}([{}_I S_1(\omega; \tau_1, \tau_2)] e^{j\omega\tau_1}) = -\mathbf{I}([{}_I S_2(\omega; \tau_2, \tau_1)] e^{-j\omega\tau_1}) \quad \dots\dots\dots (71)$$

なお, ${}_{\tau_1}^*$, ${}_{\tau_2}^*$ は τ_1, τ_2 に関する (69), (68) 式の夫々第二式に示す convolution である。

ii) 擬定常外乱による非定常解: 擬定常外乱は次式で定義される。

$$\{f\} = \{[a(\tau)]_D \psi(\tau)\}, \quad [a(\tau)]_D = \begin{bmatrix} a^1(\tau) & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & a^n(\tau) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (72)$$

ここで $a(\tau)$ は $\tau \geq 0$ で定義された確定関数, $\psi(\tau)$ は零平均値のエルゴディックな定常確率過程に従う関数である。このときは,

$$[{}_I K(\tau_1, \tau_2)] = [a(\tau_1)]_D [{}_I r(\tau_2 - \tau_1)] [a(\tau_2)]_D$$

$$[{}_I r(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{\psi(\mu + \tau)\} \{\psi(\mu)\}^T d\mu \quad \dots\dots\dots (73)$$

を(28)式に代入すれば相関マトリックスが得られる。

また,

$$[{}_I S(\omega_1, \omega_2; \tau_1, \tau_2)] = \frac{1}{(2\pi)^2} [F_{a\tau_1}(j\omega_1)]_D \mathfrak{E}_1 E_\delta(\{F_{\psi\tau_1}(j\omega_1)\} \{F_{\psi\tau_2}(-j\omega_2)\}^T) \mathfrak{E}_2 [F_{a\tau_2} - j\omega_2]_D$$

$$\dots\dots\dots (74)$$

を(56), (57)式に代入すれば相関マトリックスのスペクトル密度マトリックスによる表現が得られる。最終的な表現は次の様になる。²⁾

$$[{}_0 K(\tau_1, \tau_2)] = [g(\tau_1 + \tau)] [a(-\tau)]_D [{}_I r(\tau)] [a(\tau)]_D [g(\tau_2 - \tau)] |_{\tau=0}$$

$$[g(\tau)] \equiv [0], \quad \{a(\tau)\} \equiv \{0\}; \quad \tau < 0 \quad \dots\dots\dots (75)$$

$$[{}_0 K(\tau_1, \tau_2)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [X(\omega, \tau_1)] [{}_I S(\omega)] [X(\omega, \tau_2)]^* d\omega$$

$$[X(\omega, \tau_1)] = \int_0^{\tau_1} [g(\tau_1 - \mu)] [a(\mu)]_D e^{j\omega\mu} d\mu$$

$$[X(\omega, \tau_2)]^* = \int_0^{\tau_2} [a(\mu)]_D [g(\tau_2 - \mu)] e^{-j\omega\mu} d\mu \quad \dots\dots\dots (76)$$

$$[{}_I S(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} [{}_I r(r)] e^{-j\omega r} d\tau$$

iii) 定常外乱による定常解：(75)式で $[a(\tau)]_D = [I]$, $\tau_2 = \tau_1 + \lambda$ とおけば、

$$\begin{aligned} [{}_0 K(\tau_1, \tau_1 + \lambda)] &= \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_1 + \lambda} [g(\lambda_1)] [{}_I r(\lambda + \lambda_2 - \lambda_1)] [g(\lambda_2)] d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= \int_0^{\tau_1} \int_{\lambda}^{\tau_1 + 2\lambda} [g(\lambda_1)] [{}_I r(\lambda_2 - \lambda_1)] [g(-\lambda + \lambda_2)] d\lambda_1 d\lambda_2 \quad \dots\dots\dots (77) \end{aligned}$$

を得る。 $[{}_0 K(\tau_1, \tau_1 + \lambda)] = [{}_0 R(\lambda)]$ として左辺で $\tau_1 \rightarrow \infty$ とすれば次式を得る。

$$[{}_0 R(\tau)] = [g(\tau)] * [{}_I R(\tau)] * [g(-\tau)] \quad \dots\dots\dots (78)$$

この Fourier 変換として、また次のスペクトル密度の関係を得る。

$$[{}_0 S(\omega)] = [G(j\omega)] [{}_I S(\omega)] [G(-j\omega)] \quad \dots\dots\dots (79)$$

4. 弾性地盤の近似伝達関数を含む非線型系のアナログ・コンピューター演算回路と Band Limited White Noise による応答解析

(7)式に示される様な波動媒体地盤の伝達特性と例えば bi-linear hysteretic な履歴特性を有する周辺地盤と基礎ないし地下構造部質量からなる下部組織と、bi-linear hysteretic な履歴特性を有する剪断型質点上部構造の連成系の非定常応答解析は、任意線型分系からなる枝の線型一般解による接続法や、あるいは所謂数値積分法を適用して、Digital Computer によって得ることも出来るが、第1段の耐震設計資料の整備を目指す非定常地震応答のパラメトリック・サーベイを実施するには現在 Analog Computer によるのが有利である。基礎方程式(4)式のブロック・ダイアグラム Fig. 1 に基づき、前論文³⁾に示した弾性地盤の伝達関数 $1/\tilde{\kappa}_H(s')\tilde{\kappa}_H(s')/s'^2$ の等価演算回路を用いて全系の演算回路ブロック・ダイアグラムは Fig. 2 に示す様に得られる。ここで演算を電圧、周波数共適正な領域で実施するため、独立変数、従属変数に次の変換を行なっている。

$$t = p\tau = pq\tau', \quad \{x\} = \bar{d}\{\eta\} \quad \dots\dots\dots (80)$$

上式の第1式に対応して、周波数およびラプラス変換パラメーターは次の如く変換される。

$$\omega = p^{-1}\omega' = (pq)^{-1}\omega', \quad S = p^{-1}s = (pq)^{-1}s' \dots\dots (81)$$

(τ, ω, s) 無次元系の応答を特性付けるパラメーターとして次のものが選ばれる。

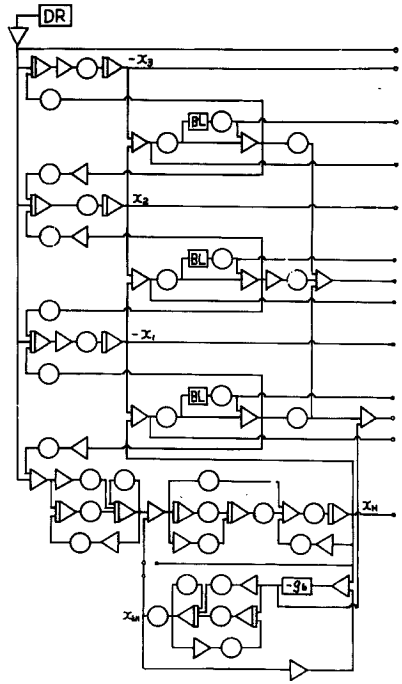


Fig. 2.

上部構造； $\{m\}$ ， $\{k\}$ ， $\{\delta\}$ または $\{\beta\} = \{k\delta\}$

周辺地盤；(bi-linear hysteretic type)； κ_b ， δ_b または $\beta_b = \kappa_b \delta_b$

下部構造（矩形基礎）； m_H ， c/b ， κ_g

上部構造対下部構造の周波数比； $\lambda = {}_1\omega_s / {}_1\omega_g$

無次元外乱；波形関数 $\alpha(\tau)$ ，強度 α

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \bar{\eta}_H = \alpha \alpha(\tau), \quad \alpha = \frac{A \bar{M}}{B}$$

周波数パラメーター； $\nu = \frac{\bar{\omega}_e}{{}_1\omega_s}$ ， $\bar{\omega}_e$ ；外乱基準周波数

これらが一組与えられるとアナログ・コンピューター演算回路の係数は確定出来る。ここで q は λ が与えられると、

$$q = \lambda \frac{{}_1\omega_g'}{{}_1\omega_s}, \quad {}_1\omega_g' = {}_1\omega_g'(m_H), \quad {}_1\omega_s = {}_1\omega_s(\{m\}, \{k\}) \quad (82)$$

によって定まる。 \bar{d} は応答を予想することによって定められる。即ちパラメーターの組み合わせの他に自由度、回路構成、予想すべき靱性率等から、弾性限変位規準量または一般に変位規準量に対応する電圧として定められる。time scale p は、もし外乱規準周波数が定まるならば、

$$p = \nu \cdot {}_1\omega_s / \omega_e \quad (83)$$

で定められる。 pq が定まるならば(81)式によって他の演算回路の諸係数は定められる。尚、演算対象としての無次元出力は次の様なものを普通考える。

上部構造；靱性率 $m\gamma_{di}$ ，相対変位 $m\gamma_{ri}$ ，残留相対変位 $m\gamma_{fi}$ ，転倒モーメント $m\gamma_{mi}$ 。

周辺地盤；靱性率 $m\gamma_{db}$ ，相対変位 $m\gamma_{rb}$ ，残留相対変位 $m\gamma_{fb}$ 。

下部構造；相対変位 $m\gamma_{rH}$ ，絶対加速度 $m\gamma_{aH}$

以上に示した非線型系の演算を行なう前に、弾性地盤の伝達関数の導入が上部構造の線型地震応答に及ぼす影響を評価する目的で次の様な場合につき応答解析を実施した。

上部構造は三質点系で従来の応答解析において最適分布として示された B_I 型の動特性分布を賦与し、作用外乱は媒体地盤も含めて模擬することを考慮に入れて band limited white noise を加速度波形関数として採用した。

上部構造：

$$\{m_i\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{k_i\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 7/9 \\ 5/9 \end{Bmatrix}, \quad \{\nu\omega_s\} = \begin{Bmatrix} 0.40732 \\ 1.03564 \\ 1.55827 \end{Bmatrix}, \quad \left\{ \frac{\nu\omega_s}{{}_1\omega_s} \right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.545 \\ 3.828 \end{Bmatrix}$$

normalize された mode

$${}_1\{\eta\}_m = \begin{Bmatrix} 0.2675 \\ 0.5525 \\ 0.7885 \end{Bmatrix}, \quad {}_2\{\eta\}_m = \begin{Bmatrix} -0.6005 \\ -0.5450 \\ 0.5855 \end{Bmatrix}, \quad {}_3\{\eta\}_m = \begin{Bmatrix} 0.7548 \\ -0.6315 \\ 0.1880 \end{Bmatrix}$$

$${}_1\{\eta\}_r = \begin{Bmatrix} 0.2675 \\ 0.2850 \\ 0.2360 \end{Bmatrix}, \quad {}_2\{\eta\}_r = \begin{Bmatrix} -0.6005 \\ 0.0555 \\ 1.1305 \end{Bmatrix}, \quad {}_3\{\eta\}_r = \begin{Bmatrix} 0.7548 \\ -1.3863 \\ 0.8195 \end{Bmatrix}$$

周辺地盤：

$$\kappa_b = \infty, \quad \beta_b = \infty$$

下部構造：

$$m_H = 1.6 \sim 8.0, \quad c/b = 2, \quad \kappa_g = 1,$$

$$m_H = 1.6, \quad {}_1\omega_g' = 1.1066$$

$$3.2, \quad 1.0101$$

4.8,	0.9113
6.4,	0.8317
8.0,	0.7682

上部構造対下部構造の周波数比：

$$\lambda = \frac{1\omega_s}{1\omega_g} = 0.1$$

無次元外乱：

$$\alpha = 1, \nu = \frac{\omega_u}{1\omega_s} = 5 \sim 20$$

演算回路外乱で次とする

$\omega_u = 0.1 \text{ c/s}$, ... 上限周波数

$\omega_l = 0.002 \text{ c/s}$, ... 下限周波数

$t_d = 300 \text{ sec}$... 継続時間

これらの諸特性を有する系の解析結果は Fig. 3~5 に示されている。

出力は無次元外乱強度 $\alpha = 1$ に対する無次元相対変位を示している。すなわち演算回路出力を

$$\alpha = \frac{ap^2}{d} = 1, \quad \bar{d} = ap^2$$

として与えられる \bar{d} を規準として表わすことになる。

Fig. 3 (a)~(e) には周波数パラメーター ν の変動に対する最大無次元相対変位 γ_D の変化が描かれている。系の動特性と外乱の周波数の相対的な関係により、 γ_D は ν の変動に対して大きく影響を受け、既に得られている結果⁷⁾ から予想される様に、ここで解析されたパラメーターの領域では長周期外乱 (ν が小) の場合大きな応答を示している。これらのグラフから注目される事実は、 ν が小さい場合、特に $\nu = 5$ において3層の応答が増大し、whipping現象を呈していることと、 $\nu = 15$ の場合に一つの極大値を有していることである。もし理想的な band limited white noise であり、1次~3次の固有周期が band 内にあるならば、 γ_D は ν の減少関数で各次 mode の混合も殆んど同じ割合でなければならぬであろう。しかし前述の観察がなされたことは、スペクトルの

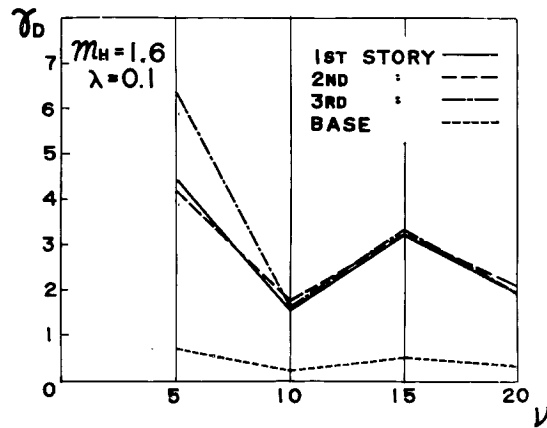


Fig. 3 (a) Basic response diagram of maximum relative displacement, $m_H = 1.6$.

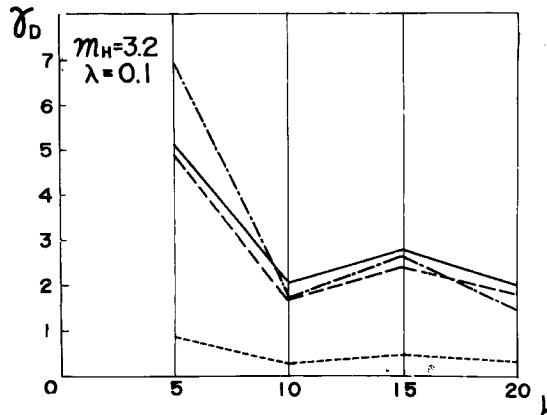


Fig. 3 (b) Basic response diagram of maximum relative displacement, $m_H = 3.2$.

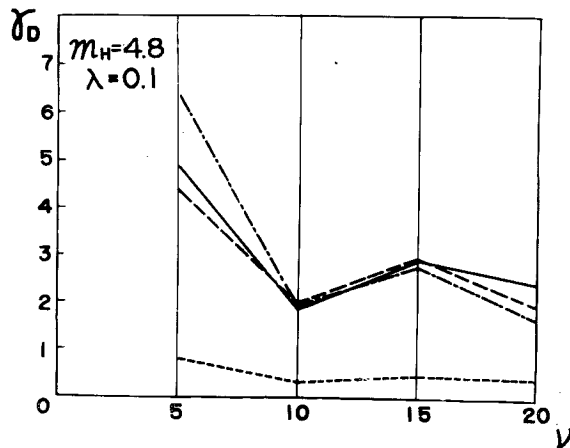


Fig. 3 (c) Basic response diagram of maximum relative displacement, $m_H = 4.8$.

band 上下限付近で密度が大となっている特性を有しているかも知れない。このことを裏づけるのに、応答波形を時系列として眺め振動周期を調べて見ると、3層では2次、2層では1次と3次、1層では1次~3次が重り合った様な性状を示し、 $\nu=10$ では2、3層に2次が幾分現れている程度であり、 $\nu \geq 15$ となると殆んど1次振動の性状を示していることから、 $\nu=15$ の場合に大きな値を示したのは高次共振ではなく、band 下境界での歪みによると推定するのが確からしい。

Fig. 4 (a), (b) には横軸に m_H をとって γ_D を示したものである。上部構造対下部構造質量比は、

$$m_H = \frac{M_H}{\rho b^3},$$

$$\tau = \sqrt{\frac{K}{M}} T, \quad \tau' = \sqrt{\frac{\mu}{\rho b^2}} T,$$

$$q = \sqrt{\frac{K}{M}} \sqrt{\frac{\rho b^2}{\mu}} = \lambda \frac{1\omega_s'}{1\omega_s}$$

を用いて、

$$\frac{M_H}{M} = m_H \frac{K}{M} \frac{\rho b^2}{\mu} \frac{\mu b}{K}$$

$$= m_H q^2 \frac{\mu b}{K} = \frac{m_H}{\lambda^2} \left(\frac{1\omega_s'}{1\omega_s} \right)^2 \frac{\mu b}{K}$$

と表わされる。

本解析では、

$\lambda=0.1, m_H=1.6$	3.2
	4.8
	6.4
	8.0

の場合に対応し、

$q^2=0.07380$	$m_H q^2=0.1181$
0.06149	0.1968
0.05006	0.2403
0.04169	0.2685
0.03557	0.2846

の場合が行なわれた。 λ が一定の場合 m_H につき応答をパラメトリッ

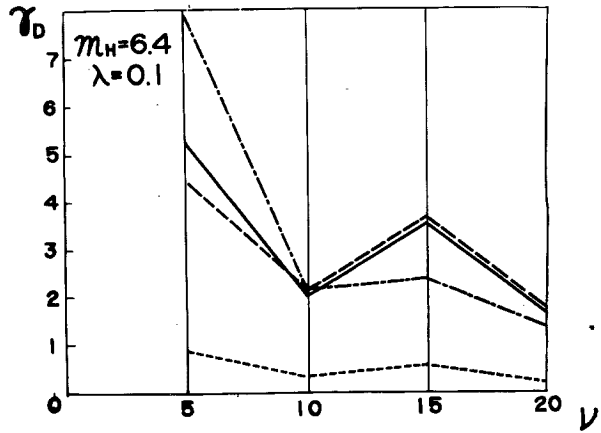


Fig. 3 (d) Basic response diagram of maximum relative displacement, $m_H=6.4$.

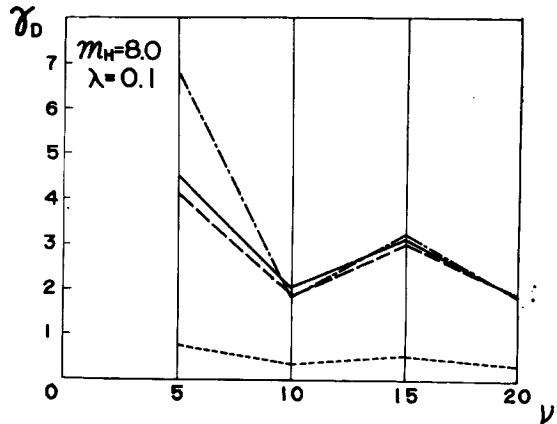


Fig. 3 (e) Basic response diagram of maximum relative displacement, $m_H=8.0$.

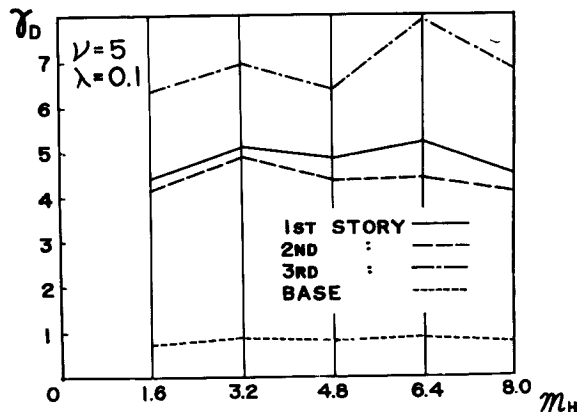


Fig. 4 (a) Response diagram of maximum relative displacement, $\nu=5$.

クに見るときは上式から判る様に $\mu b/\bar{K}$ が一定なら M_H/\bar{M} の変動, M_H/\bar{M} を固定とするなら $\mu b/\bar{K}$ の変動を意味する。応答はこの範囲の m_H では殆んど変化なく flat な曲線となっている。この性状は専らパラメータ λ によると考えられる。 λ が小であると、たとえこの様な変動によっても応答には殆んど変化を与えないことを示している。即ち下部構造が極めて剛いとき (λ が小) は、下部質量あるいはバネ定数 (又は compliance) を大きな範囲で変化させても上部構造の応答性状に何等変化を与えないことを意味する。このことは既に検証済みのことである。^{9) 10)}

Fig. 5 は最大転倒モーメント γ_M について示したものである。 γ_D と γ_M の比較から各質点の phase の関係が判明する。即ち、 γ_M が γ_D より相対的に高くなる点は phase の一致、つまり1次 mode の卓越の一つの目安となる。 $\nu=5, 15$ で比較的大きな値を示しているが、 $\nu=5$ の場合 γ_D の応答程は顕著に大きいといえない。従って phase が一致していず、前にも確められた様に高次の mode が多く含まれていることを示している。 $\nu=15$ で大きな値を有しているのは γ_D の場合と殆んど同程度であり、1次の mode で振動し band boundary でのスペクトルの歪みが推定される。 m_H による差異も殆んど見られない。

5. 結 語

本論文では3次元弾性地盤と非線型特性を有する周辺地盤を考慮した構造物系の地震応答解析を目的とし、有理関数形に近似した弾性地盤の線型伝達関数と簡単な線型ないし非線型特性を持つ周辺地盤が導入された。而して特に線型質点系の場合、非定常応答解の解析的表現から確率統計的非定常入力を受ける構造物系の非定常出力の共分散マトリックスと対応するスペクトル密度マトリックスも誘導された。更にまた、非線型特性をもつ上部構造と周辺地盤及び弾性地盤からなる非線型系の非定常解のためのアナログ・コンピュータ演算回路とその様な系の耐震設計のための基本応答図作製の基本的考察がなされた。更にアナログ・コンピュータによって band limited white noise を入力とする線型系の非定常応答解析がなされ、弾性地盤の近似伝達関数の動作が良好なことが証された。今後は中ないし強震を対象として確率統計的非定常解析における非定常入力と等価線型系の設定を妥当に行った上で統計的出力の非定常解析を行なう予定であると

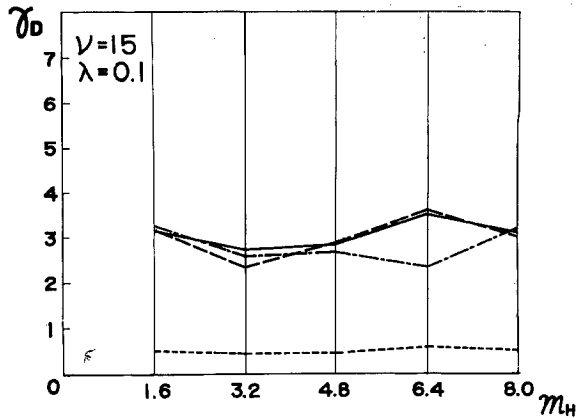


Fig. 4 (b) Response diagram of maximum relative displacement, $\nu=15$.

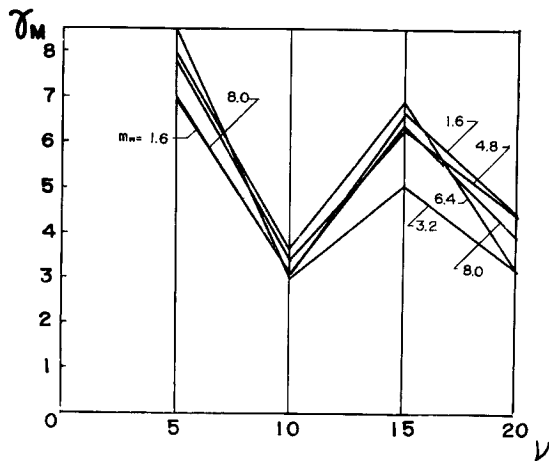


Fig. 5 Basic response diagram of maximum overturning moment.

共に、また、激震を対象とした強い非線型特性を考慮した構造物系の非定常非線型応答解析をアナログ・コンピュータで実施し基本応答図を作製する予定である。

参 考 文 献

- 1) 小堀鐸二, 南井良一郎: 耐震設計の方向について, 日本建築学会論文報告集, 第89号, 昭38.9. p.183.
- 2) 棚橋諒, 小堀鐸二, 南井良一郎: 構造物の動的耐震設計法と地震レスポンス, 京都大学防災研究所年報, 第5号B, 昭37.3 pp.1—32.
- 3) 小堀鐸二, 南井良一郎, 井上豊: 矩形基礎の Ground Compliance とその Simulation について, 京都大学防災研究所年報, 第7号, 昭39.3.
- 4) 小堀鐸二, 南井良一郎: 制震系の解析——弾塑性多質点系モデル——(制震構造に関する研究・3.4), 日本建築学会論文報告集, 第69号, 昭30.10. pp.405—412.
- 5) 南井良一郎: 擬定常外乱による統計的線型非定常応答のレベル超過回数について, 日本建築学会論文報告集, 第76号, 昭37.9. p.80.
- 6) Crandall, S. H.: Random Vibration, Vol. 2, The M. I. T. Press, 1963. Nonstationary Random Input and Response by T. K. Caughey. pp.66—84.
- 7) 小堀鐸二, 南井良一郎: スカイスクレーパーの弾塑性応答と耐震設計法, 京都大学防災研究所年報, 第6号, 昭38.7, pp.44—62.
- 8) 小堀鐸二, 南井良一郎, 田川健吾: 弾塑性構造物の耐震性に関する研究, 第一回地震工学国内シンポジウム講演集, 昭37.11. pp.165—170.
- 9) Kobori, T. and Minai, R.: Study on Unstationary Vibration of Building Structure with Plastic Deformation of Substructure, Proc. of the 2nd W. C. E. E., 1960, pp. 1085—1104.
- 10) 棚橋諒, 小堀鐸二, 金多潔, 南井良一郎, 井上豊: 耐震性に及ぼす地盤連成の効果(アナログ・コンピュータによる非線型過渡振動解析・6) 日本建築学会論文報告集, 第75号, 昭37.8 pp.7—12.