

# 開水路における流量測定法に対する 遷移流特性の適用について

石原 藤次郎・岩佐 義朗

## SOME CONTRIBUTIONS OF TRANSITIONAL BEHAVIOURS OF OPEN CHANNEL FLOWS TO DISCHARGE MEASUREMENTS

by Dr. Eng. Tojiro ISHIHARA and Yoshiaki IWASA

### Synopsis

By means of the application of the geometric theory of ordinary differential equations to the steady behaviour of an open channel flow, a functional diversity of control structures in hydraulic behaviours is classified as a saddle point, which induces the transition from subcritical to supercritical, and as nodal and focal points, at which the flow changes its flow regime from supercritical to subcritical.

The basic principle of hydraulics in the discharge measurement by various types of control structures is thus furnished by the transitional behaviours of flow over control structures.

The first part of this paper presents the rather rigorous proof of Böss' and generalized Jaeger's theory on the critical depth theory as a function of discharge and depth. The second part deals with some hydraulic characteristics of control structures like overflow spillways, a round crested weir and a Parshall flume, as devices for the discharge measurement of open channel flows.

### 1. 緒 言

水路の幾何学的形状および境界特性が一様な開水路においては、水流の状態が本質的に定常等流に近づくであろうと予想される。ところが、自然河川や灌漑用水路などのいわゆる conveyance structure では、水路内の各種水理構造物の設置の関係もあつて、自然的あるいは人工的に断面形状や境界特性が場所的な変化を示すから、それらの影響を受けて流れも場所的変動をするいわゆる不等流となる。

いま、ある一つの等流状態にある流れが断面形状と境界特性の変化に従つて別の等流状態へと遷移する状態にあるとき、これを遷移流と定義すると、遷移流は明らかに不等流水理学の一般的な性質をもつものである。したがつて、conveyance structure あるいは水理構造物の設計においては、それらのもつ水理学的な機能を最高度に発揮せしめるように、あらかじめ設計条件に従つて水理学的特性と断面形状および境界特性との関係を明確にしておかねばならない。

以上に述べた水流の遷移現象を含めて、不等流の水理学は、一般に二つの分野に分けられて研究が進められている。その一つは、流れそのものが緩やかに変化するいわゆる漸変流の水理学であつて、河道や貯水池における背水計算などを主体とし、前世紀の後半より多くの研究者が解析を進めて、一様水路におけるその理論的展開はほぼ完成の段階にあるといえよう。ところが実際には、断面形状および境界特性が一定でないから、これらの優れた研究も適用範囲が著しく制限を受け、また事実、実用問題の解決にはあまり役に立たないようである。このことは、多くの問題でよく経験するところであり、数値積分法によらざるをえない状態である。いま一つは、水路形状や境界特性の急激な変化によつて生じる水流の局所的変動を取り扱うい

いわゆる急変流の水理学であつて、漸変流の水理学と対照的な性格をもっている。急変流では現象の変化が急激であり、かつ数学的表示のむずかしい複雑な物理的要素が卓越することが多いから、それらの解析はむしろ経験的な要素を加えて行われるのが普通である。

従来の1次元解析法に従う開水路水理学の古典的取扱ひでは、これらの二つの分野における水理現象は別個に研究されてきたといつてもよい。ところが、漸変流か急変流のいずれであつても、曲線の流体運動や剝離現象などの複雑な局所的要素を含めて、これらの流体運動が1次元解析法に従つて物理的に表現されるならば、定常流の水面形状は等流水深曲線および限界水深曲線によつて示される非線型方程式の解として与えられる。これらの二つの曲線は定常流の水理学における最も重要なパラメーターであつて、水路形状、境界特性および流れの特性によつて一義的に決定される。水路の遷移部では、両曲線がしばしば交わることがあるが、これは水面形方程式に特異点があられることを意味している。われわれはこうした観点から、すでに漸変流における遷移現象に非線型方程式論における特異点の幾何学的性質を応用して、これらの水理学的特性を明らかにしたが<sup>2)</sup>、これを一般的に拡張すれば、流体自身のもつ鉛直加速度が小さい限り、特異点によつて水流は流れの状態を変化し、鞍形点の場合は常流から射流へ遷移し、また結節点および渦状点の場合は射流から常流へ遷移することがわかる。

このようにすれば、非線型微分方程式の幾何学的性質を応用して、漸変流および急変流を含めた定常流の水理学の一般的解析法を導くことができる。すなわち、具体的に示せば、漸変流の水理学では、一樣水路における流れの場合に無限遠に存在した特異点が遷移水路では有限の位置に存在して、特異点の幾何学的性質に従つて流れの状態が変化することになり、また急変流の水理学、とくに支配構造物を通過する流れでは、鞍形点の存在が必要条件となり、この条件はエネルギー的な解析法では Böss の法則あるいは Jaeger の一般定理をあらわしている。

ここでは、定常流の水理学に関する多くの問題のうちで、流量測定法に関して考察を進める。流量は流速と流水断面積との積分形式で与えられるが、実用的にはなるべく簡単に正確な測定法を確立することが望ましい。開水路における1次元解析法では、水深と比エネルギーあるいはモーメンタム・フラックスという二つの未知量に対して運動方程式は一つであるから、このままでは2点測定によつてはじめて流量が決定される。ところが水流に支配断面、すなわち水面形方程式に鞍形点があられると、この点では与えられた水路および流量特性にしたがつて、水深したがつてその他の水理特性が一義的に決定されるから、解析の手段としての水面形方程式が遷移流の運動機構を正しく表現している範囲において、1点測定が可能となる。こうした現象のあらわれる支配構造物の例は、広頂堰、円形堰、鋭縁堰および余水吐などである。換言すれば、これら各種の堰およびフリュームによる流量測定が1点測定によつて可能となるためには、流れが常流から射流へと遷移することが必要であるとともに、またその解析法の方針が明らかにされているものでなければならない。

## 2. 水流の遷移特性

一定の水路および流量特性に対して決定される等流水深と限界水深の両曲線が交わる点が水面形方程式の特異点であり、この点の存在によつて、流れの状態は常流から射流へと、あるいは逆に射流から常流へと遷移する。

流体自身による鉛直速度に基づく表面曲率が無視される場合、定常流の水面形状は次式によつて与えられる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{f_1(x, h)}{f_2(x, h)}, \dots\dots\dots(1)$$

ここに、分子および分母はそれぞれ等流水深および限界水深の曲線をあらわす関係である。

特異点の位置は、(1)式の分子および分母をそれぞれ0とおいた二つの方程式の交点であつて、その点の近傍では、水面形状は近似的につぎのようにあらわされる。

$$\frac{dh}{dx} = \left\{ \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)_c \cdot x + \left( \frac{\partial f_1}{\partial h} \right)_c \cdot h \right\} / \left\{ \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)_c \cdot x + \left( \frac{\partial f_2}{\partial h} \right)_c \cdot h \right\}, \dots\dots\dots (2)$$

ここに、座標点の原点は特異点  $(x_c, h_c)$  に移動し、 $x$  および  $h$  は特異点におけるそれぞれの値よりの変動量を示している。

いま、(2) 式の特性方程式

$$S^2 - \left\{ \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)_c + \left( \frac{\partial f_1}{\partial h} \right)_c \right\} S + \left\{ \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)_c \left( \frac{\partial f_1}{\partial h} \right)_c - \left( \frac{\partial f_2}{\partial h} \right)_c \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)_c \right\} = 0$$

が異符号の実根をもつとすれば、特異点は鞍形点を持ち、その点を通る積分曲線のこの点における勾配は、

$$\left( \frac{dh}{dx} \right)_{c1} = - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)_c / \left\{ S_2 - \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)_c \right\} \dots\dots\dots (3)$$

および

$$\left( \frac{dh}{dx} \right)_{c2} = - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)_c / \left\{ S_1 - \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)_c \right\} \dots\dots\dots (4)$$

によつて与えられる。ここに、 $S_1$  は負根、 $S_2$  は正根とする。また、特異点における等流水深曲線の勾配  $s_1$  および限界水深曲線の勾配  $s_2$  は、それぞれつぎのようである。

$$s_1 = - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)_c / \left( \frac{\partial f_1}{\partial h} \right)_c, \dots\dots\dots (5)$$

$$s_2 = - \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)_c / \left( \frac{\partial f_2}{\partial h} \right)_c. \dots\dots\dots (6)$$

(3)、(4) および (6) 式より、これらの三つの曲線の特異点の上流側 ( $x$  の値が負) における位置関係を調べると、 $(\partial f_2 / \partial h)_c$  が正の場合には、c1-曲線、限界水深曲線、c2-曲線の順序に水深が大きくなっていく。ところが (5) および (6) 式より、これら二つの曲線の位置関係にかかわらず、限界水深より上部で  $dh/dx$  が負となる領域が存在するから、漸近線である c1-曲線が遷移水面形曲線となり、流れは常流から射流へ遷移することになる。逆に  $(\partial f_2 / \partial h)_c$  が負の場合には、c2-曲線、限界水深曲線、c1-曲線の順序にならび、遷移水面形曲線は c2-曲線によつてあらわされ、流れの状態は同様に常流から射流へ遷移することになる。要するに、特異点たる鞍形点によつて水流は常流から射流へと遷移し、 $(\partial f_2 / \partial h)_c$  の正負にしたがつて、遷移水面形曲線は c1-曲線または c2-曲線によつてあらわされ、この点が数値積分の出発点となる。

これに反して、特性方程式が同符号の実根をもつと、特異点は結節点となるが、鞍形点の場合と同様に議論を進めると、流れの状態は射流から常流へと遷移し、また水面形追跡法の終点となることがわかる。

したがつて、緩勾配一様水路における水面形状に関する Bresse などの擬似線型理論は、鞍形点および結節点がそれぞれ  $+\infty$  および  $-\infty$  にある場合のものであり、また急勾配一様水路におけるものは、逆に鞍形点および結節点がそれぞれ  $-\infty$  および  $+\infty$  にある場合のものであることが理解できよう。

これらの特異点の水理学的特性を応用すると、原理的には 1 点測定によつて開水路の流量を求めることができる。ところが開水路水流の性質として、常流状態の流れでは擾乱は上流側に伝わり、とくにその擾乱の大きさが相当な程度のものであれば、上・下流両側の水深が共軛関係に達する点まで、射流状態の流れに影響を及ぼして、この点で跳水現象がおこる。したがつて、流れは突然射流から常流へと遷移するから、結節点は実質上遷移点とならないことが多い。これに反して、鞍形点はその上・下流側に人為的に支配構造物を設置して水流を調節しない限り一義的に決定され、流れの状態が滑かに常流から射流へと遷移するいわゆる従来の意味における支配断面となる点をあらわしているから、この性質を応用すれば流量測定が可能になるはずであり、また逆に支配構造物としての堰の上の流れでは鞍形点が存在していることになる。

### 3. エネルギー解析法と Böss の法則および Jaeger の限界水深に関する一般定理

開水路水流の支配断面の原理あるいは流量測定法の基本原理として広く用いられている関係は、いわゆ Bèlanger の法則および Böss の法則として知られており、流量、エネルギーおよび限界水深に関する 1 次

元解析法である。1849年 J. B. Ch. Bélanger は広頂堰を流れる水流が一定のエネルギー水頭に対し流量最大となるように流れることを知り、また 1919年 P. Böss はエネルギー水頭が最小になったところで限界水深があらわれ、かつ流れの状態が常流から射流へと遷移することを知つたといわれている<sup>2)</sup>。これらはいずれもその解析が不十分であるようで、このことは曲つた境界面に沿う流れに対しても Bélanger の法則 ( $\partial Q/\partial h=0$ ) および Böss の法則 ( $\partial H_0/\partial h=0$ ) が同時におこるいわゆる Jaeger の一般定理 (1943年) によつて明らかにされているが、その数学的な証明には水理学的に不十分と思われる点がある。ところが、前節で考察した鞍形点の水理学的特性を用いると、これらの諸定理を容易に理解することができるのであつて、以下にその関係を説明しよう。

いま、Fig. 1 に示すように、水路底面に沿つて  $x$  軸、それに垂直な方向に  $y$  軸をとつて、1 次元解析法に従いエネルギー方程式を作ると、つぎのようになる。

$$\frac{d}{dx} \left\{ \left( \frac{u^2+v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + y \cos \theta + z \right) u dA + \frac{\tau}{\rho g} s u_b \right\} = 0, \quad \dots\dots(7)$$

ここに、 $u, v$  はそれぞれ  $x, y$  方向の流速、 $u_b$  は底付近の流速、 $z$  はある基準面からの高さ、 $p$  は圧力、 $s$  は潤辺、 $\tau$  は剪断力、 $\rho$  は流体密度、 $g$  は重力加速度である。

比エネルギー  $H_0$  を導入すると、

$$H_0 = \frac{1}{Q} \left\{ \left( \frac{u^2+v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + y \cos \theta \right) u dA \right\} \quad \dots\dots(8)$$

であるから、エネルギー勾配は (7) 式を用いてつぎのようになる。

$$\frac{dH_0}{dx} = \frac{\partial H_0}{\partial h} \frac{dh}{dx} + \frac{\partial H_0}{\partial x} = \sin \theta - \frac{\tau}{\rho g R} \left( \frac{u_b}{u_m} \right), \quad \dots\dots(9)$$

ここに、 $R$  は径深、 $h$  は水深、 $\theta$  は水路床の局所的傾斜角、 $u_m$  は断面平均流速である。

水面形方程式は (9) 式を書きかえて、つぎのようにならわされる。

$$\frac{dh}{dx} = \left\{ \sin \theta - \frac{\tau}{\rho g R} \left( \frac{u_b}{u_m} \right) - \frac{\partial H_0}{\partial x} \right\} / \frac{\partial H_0}{\partial h} \quad \dots\dots(10)$$

流れの状態が常流から射流へと遷移するためには、(10) 式であらわした水面形方程式に鞍形点があらわれるはずであるから、この特異点たる遷移点において、

$$\left( \frac{\partial H_0}{\partial h} \right)_c = 0 \quad \dots\dots(11)$$

および

$$\sin \theta_c = \left( \frac{\tau_c}{\rho g R_c} \right) \left( \frac{u_b}{u_m} \right)_c + \left( \frac{\partial H_0}{\partial x} \right)_c \quad \dots\dots(12)$$

という関係が成立するが、これは明らかに Böss の定理を表わしている。

また一方において、比エネルギー  $H_0$  は流量、水深および水路特性の関数として与えられるから、一般的には

$$F(H_0, Q, h, A, R_e, \theta, \dots) = 0 \quad \dots\dots(13)$$

のように定義される。ここに、 $A$  は流水断面積、 $R_e$  は水路床の局所的曲率半径である。したがつて、Böss の定理は、

$$\left( \frac{\partial H_0}{\partial h} \right)_c = - \left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial h} \right)_c + \left( \frac{\partial F}{\partial A} \right)_c \left( \frac{\partial A}{\partial h} \right)_c + \dots \right\} / \left\{ \left( \frac{\partial F}{\partial H_0} \right)_c + \left( \frac{\partial F}{\partial A} \right)_c \left( \frac{\partial A}{\partial H_0} \right)_c + \dots \right\} = 0 \quad \dots\dots(14)$$

と書くことができる。ところが、流体が流れている限り、(14) 式の分母は 0 でありえないから、結局 Böss

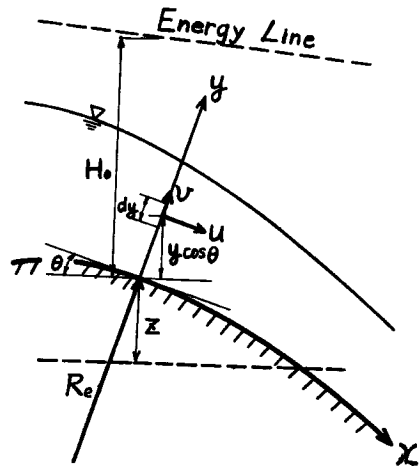


Fig. 1 Schematic diagram of flows over a curved boundary.

の定理は、

$$\left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_c + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)_c + \dots = 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

となる。これに反して、一定のエネルギー水頭の場合における Bélanger の定理は、(14) 式から、

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial h}\right)_c = -\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_c + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)_c + \dots\right\} / \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial Q}\right)_c + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial Q}\right)_c + \dots\right\} = 0 \quad \dots\dots\dots(16)$$

であるから、水流が存在する限り、(15)式が成立することになる。したがって鞍形点においては、Bélanger の定理と Böss の定理とが同時に生じられることになり、

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial h}\right)_c = \left(\frac{\partial H_0}{\partial h}\right)_c = 0 \quad \dots\dots\dots(17)$$

となる。このことは、Jaeger の一般定理の意味するところであるが、上述のごとく特異点の理論を用いると、容易に理解されるわけである。

以上の論義を展開するに当つては、水路に関する特性を  $x$  のみの関数と制限しなかつたから、鋭縁堰などのように自由流下現象を呈する場合にも、この定理は成立するはずである。したがって、開水路水流のエネルギー解析法における Bélanger および Böss の定理、あるいはその同時性を示した Jaeger の一般定理は、エネルギー法による水面形方程式の鞍形点において成立するのであるということが出来る。運動量の解析法を用いると、断面形状が一樣な場合には、最大流量と最小モーメント・フラックスとが同時に生じすることを、上と全く同様にして証明することができる。ところが、エネルギー方程式と運動量方程式とは、その力学的な取扱いが異なっているから、ここで考察を進めている程度の近似理論によつては、最大流量、最小エネルギーおよび最小モーメント・フラックスの同時生起性を論ずることができない。Boussinesq や Jaeger のいうように、流体の運動機構の力学的性質を完全に表現した後に、はじめてこれら三者の同時生起性が予期されるであろう。

#### 4. 円形堰の越流特性

Fig. 1 に示すような曲つた境界面をもつ円形堰について、その越流特性を考察しよう。

この場合、水流は堰を通過することにより急激に変化し、かつ堰の近傍だけについて考察するから、流れは近似的に完全流体であると仮定してよい。さらにまた、 $v$  の変化が小さいものとする、流速分布は

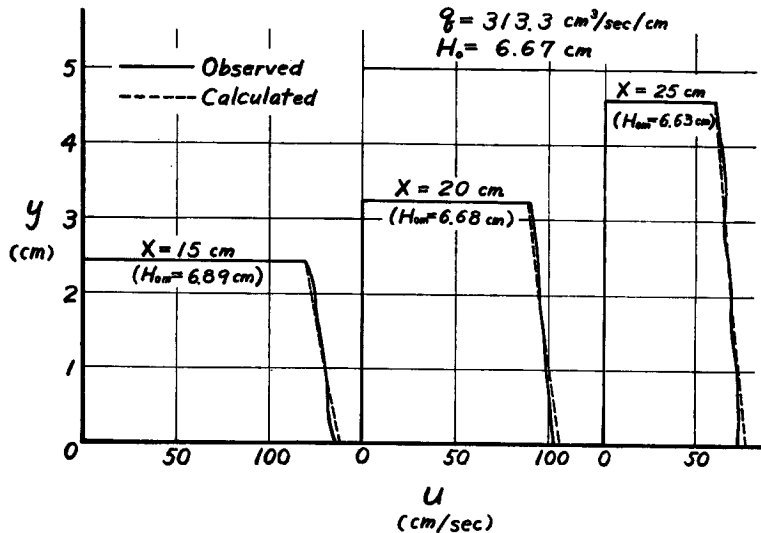


Fig. 2 Velocity distribution of curved boundary flows.

$$u = \frac{u_s(R+h)}{(R+y)} = \frac{q}{\log\{1+(h/R)\}} \cdot \frac{1}{R+y} \quad \dots\dots\dots(18)$$

によつて与えられる。ここに、 $q$  は単位幅当りの流量、 $u_s$  は表面流速である。京大工学研究所水理実験室

において、半径 15 cm の円形堰上の流れの流速分布に関する実験を行つた結果の一例は、Fig. 2 のとおりであるが、(18) 式によつて計算した結果は点線のようになり、実験結果とはほぼ一致している。ここに、X は半円形堰の下流端からの距離をあらわす。

また、圧力分布は y 軸方向の運動方程式より、次式で与えられる。

$$\frac{p}{\rho g} = \cos \theta \cdot (h-y) + \frac{u_s^2(R+h)^2}{2g} \times \left\{ \frac{1}{(R+h)^2} - \frac{1}{(R+y)^2} \right\} \dots (19)$$

Fig. 3 は境界面に沿う圧力分布の一例を示しているが、堰頂より下流側では、(19) 式による計算結果が実験結果とよく一致している。

以上の各式を用いると、エネルギー式を計算することができるが、堰頂にエネルギーの基準面をとると、

$$H_0 + z = h \cos \theta + \frac{u_s^2}{2g} \dots (20)$$

がえられ、水面形方程式はつぎのようになる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\sin \theta \cdot \left(1 + \frac{h}{R}\right) - q^2 \left\{ \frac{h}{R} - \log \left(1 + \frac{h}{R}\right) \right\} \frac{dR}{dx} / g(R+h)^3 \left\{ \log \left(1 + \frac{h}{R}\right) \right\}^3}{\cos \theta - q^2 \left\{ 1 + \log \left(1 + \frac{h}{R}\right) \right\} / g(R+h)^3 \left\{ \log \left(1 + \frac{h}{R}\right) \right\}^3} \dots (21)$$

いま、曲率半径が一定な円形堰を考えると、鞍形点ができることは (21) 式から容易にわかるが、その位置は堰頂であり、流量は (21) 式の分母を 0 とおくと決定される。エネルギー水頭に関する越流係数を、

$$C = q / (2\sqrt{2g/3}) H_0^{3/2} \dots (22)$$

という形であらわすためには、さらに (20) 式を用いて  $h_c$  を消去すればよい。Fig. 4 はこうして求めた越流特性を示したものであるが、図中 Lausanne 曲線は Lausanne 大学における実験公式、Jaeger 曲線は Jaeger の仮定<sup>2)</sup>による理論曲線である。図中に示した実験値からわかるように、 $R/H_0$  が小さいときは、理論曲線より著しく

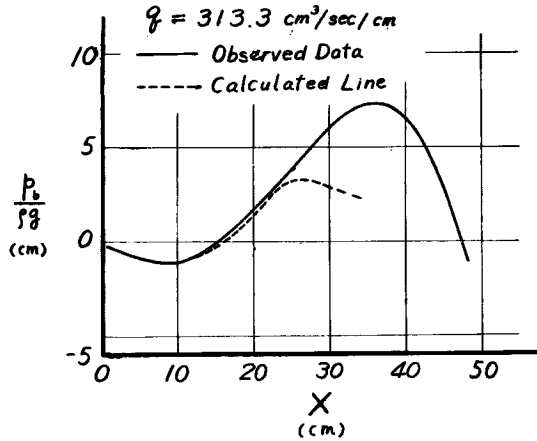


Fig. 3 Pressure distribution over a curved boundary

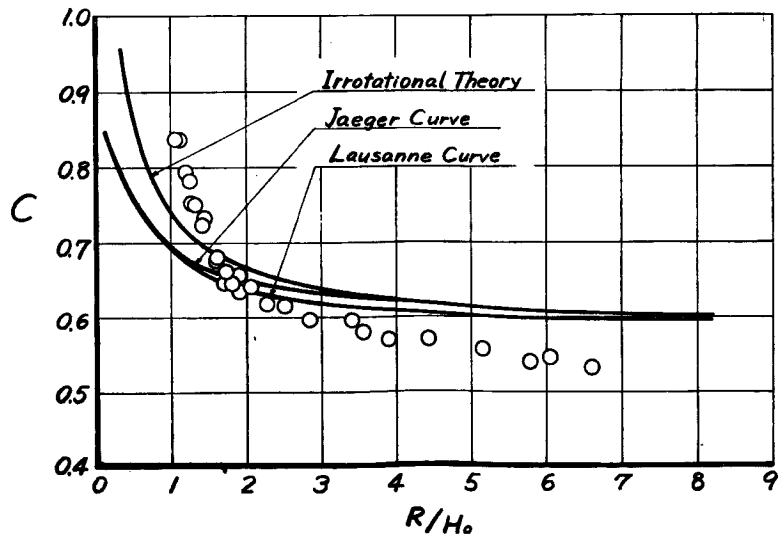


Fig. 4 Discharge coefficient of a round crested weir

流れやすいことをあらわしている。これは越流水深が大きくなると、もはや規定した境界面に沿って流れなくなるためと思われる。また  $R/H_0$  が大きいときは流れにくくなるが、これは境界面に沿う摩擦力を無視できないためであろう。したがって、われわれの実験値とここで考察した非回転性を仮定した第一次近似理論との適用限界が定められ、また高次近似理論による解析の必要性がわかるが、曲率半径が一定でしかも比較的長い境界面に沿う流れ、たとえば余水吐の越流特性については、次節に述べるように驚くべきほどの一致を示している。

### 5. 余水吐の越流特性

越流型余水吐による越流特性については、従来から多くの研究者によつて種々の公式が提案されている。しかし、余水吐の水理学的な機能設計が圧力分布に支配されている現状からみて、流体運動の機構について解析したものがほ

とんどなく、いずれも模型または実物実験によつて越流係数を求めて、(22) 式あるいはこれと類似した関係式を用いて表示している。Fig. 5 は TVA における多くの堰堤の模型実験<sup>3)</sup> から求めた越流係数  $C_f$  (ft-sec 単位)\* と全水頭  $H_0$  との関係を示したものであるが、余水吐の幾何

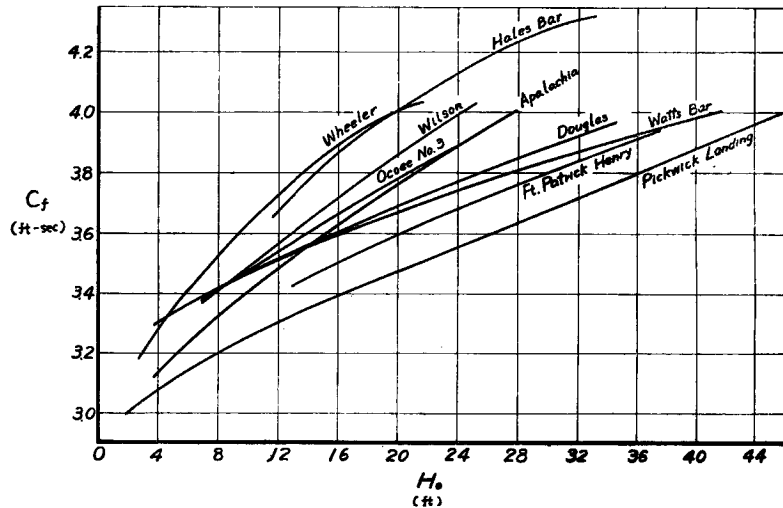


Fig. 5 Discharge coefficients for TVA dams

学的形状の変化によつて越流係数が異なり、これらの間には何ら統一された関係がないようである。

いま、こうした余水吐の越流機構を、近似的に前節の円形堰の場合と同様であると仮定すると、この場合にも (21) 式が成立する。ところが余水吐の幾何学的形状は与えられているから、 $R$  をパラメーターとして解析を進めると、余水吐による越流特性が求められるはずである。

多くの堰堤では、Creager の越流形状を基準にして、いくつかの複合曲線による形状が与えられている。しかも単に曲線を接続しているだけであるから、多くの点で曲率が不連続となつている。ここでは簡単のために、曲率半径が一定という特殊な堰堤だけについて考察するが、Fig. 5 に示した TVA の諸堰堤のうちでこの条件をみたすものは Wilson, Wheeler および Pickwick Landing であり、下流側の形状における曲率半径はそれぞれ 21.293, 16.00 および 45.00 ft である。これらの堰堤では、堤頂において曲率半径が不連続となるが、実際には境界面の剪断力によつて少し下流側に支配断面があらわれるので、上述の  $R$  を一定とする仮定はほぼ満足されよう。したがって、Fig. 5 に示した越流係数と全水頭との関係を、全水頭の代わりに  $R/H_0$  というパラメーターによつてあらわすと、Fig. 6 のようになる。これからわかるように、 $R/H_0$  の関数として越流係数を表示すると、前節に示した非回転運動の仮定による結果とむしろ驚くべき一致が見られ、非常に興味深いことと思われる。なお、図には標準型越流形状およびそれを基準にした水豊堰堤の模

\* (22) 式に示すとおりであるが、m-sec 単位に換算するには、 $C=C_f/5.346$  によつて計算すればよい。

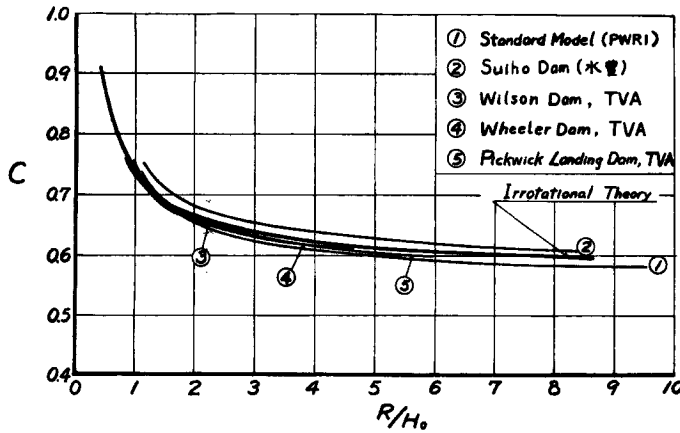


Fig. 6 Relation between discharge coefficient and  $R/H_0$  for overflow spillways.

6. 鋭縁堰の越流特性

これまで述べてきた支配構造物上の水流は、いずれも一定の境界面に沿う流れであつて、曲率半径は距離の関数として一義的に決定されたものであつた。しかし、鋭縁堰による遷移流は、上・下流面ナップで圧力が大気圧になるように流れるだけであつて、境界面は圧力0という面であり、 $x$ のみならず流れの特性の関数であることが予期される。こうした場合においても、第3節で説明したところからわかるように、水面形状に鞍形点があれば、この点で流れの状態は常流から射流にかわるはずである。

いま、 $R$  および  $\theta$  などの未知関数が  $x$  および全水頭の関数であると仮定すると、この場合にもナップが最高に達した点で (21) 式が成立することがわかる。ところが、余水吐や円形堰の場合と異なつて、 $R$  がやはり未知関数であるから、越流特性を一義的に解析するためには、方程式が一個不足する。したがつて、いま一つ何らかの関係が必要になつてくる。Rehbock によれば、水頭がどのようであつても、Fig. 7 において  $z_c = 0.112 h_0$  であるといわれている。このように  $z_c$  と  $h_0$  との関係を規定すれば、鋭縁堰による越流特性が決定され、越流係数  $C_d (= q / \sqrt{2g} h_0^{3/2})$

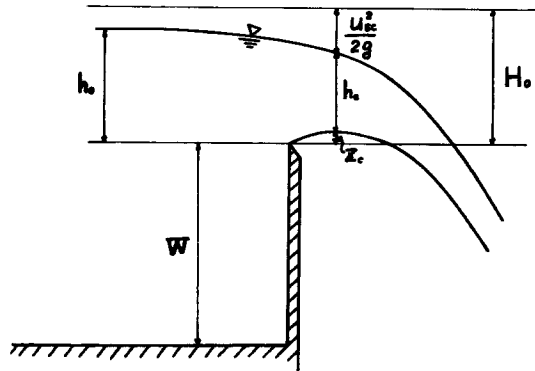


Fig. 7 Flow over a sharp crested weir.

と  $h_0/(h_0 + W)$  との関係を示したのが Fig. 8 である。この図には、Schoder-Turner<sup>5)</sup>, Meyer-See<sup>5)</sup> および Bazin<sup>5)</sup> の実験値と Rehbock<sup>6)</sup>, Ippen-Rouse<sup>7)</sup>, Francis<sup>7)</sup> および Paderi<sup>8)</sup> の実験公式とが示されているが、 $h_0/(h_0 + W)$  の比較的大きいところでは両者がよく一致する。水頭の小さいところでは実験値の方が大きくなり、また水頭が大きくなると Ippen-Rouse と Rehbock の両公式はよく一致するが、実験値とかなり離れてくる。これらの事実は、明らかに  $z_c/h_0$  の値が一定でないことを示すものであろう。

ところが、 $z_c$  をパラメーターとして図の点線のように越流特性を示すと、実験値全部を統一する曲線はえられないが、種々の実験条件に従つた個々の実験結果とはよく一致していることがわかる。この事実か

型について、土木試験所(現在の土木研究所)で実験的に求めた越流特性が示されているが、水豊堰堤の余水吐模型ではむしろ流れやすいという結果がえられている。

以上の事実からみれば、異なつた幾何学的形状をもつ個々の堰堤を対象として従来の多くの実験公式も、ここで説明した解析法に従つてその水理学的特性を明らかにすれば、統一した関係がえられるものと期待される。



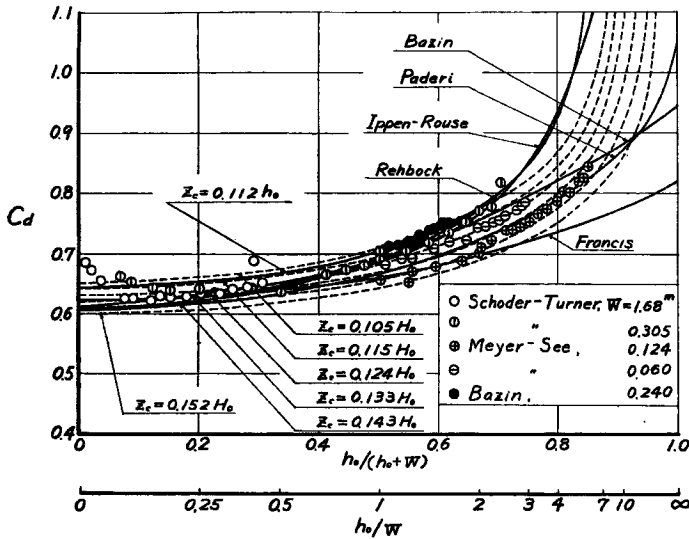


Fig. 8 Discharge coefficient for a sharp crested weir

ら、 $z_c/h_0$  の値がすべての水頭に対して一定でなくとも、これらの水理量の間には何らかの関係があるものと予想される。しかし現在のところ、こうした関係については解決されていない。このような関係と鋭縁堰上の流れの流速分布および圧力分布について詳細な実験を行い、それらの力学的機構が明らかにされると、理論的な解析を進めることができるから、最も古くから水理学上の問題としてとりあげられながら全く解析が進まない鋭縁堰の水理学的特性も、次第に解明されるであろう。

7. Parshall 堰の越流特性

いままで考察した越流特性は、急変流またはそれに近いものについてであったが、ここでは Parshall 堰における遷移流の水理特性について考察を進めよう。Parshall の研究したこの堰は、米国で普通に用いられている定義に従つて、堰の遷移部に支配断面があらわれ、したがつて 1 点計測によつて流量測定ができるものとする。こうした堰の流れの圧力分布は、一般に静水圧分布に近いから、Jaeger の記号にしたがつて、非静水圧の影響を示すパラメーター  $\lambda$  を導入すると、比エネルギーは次式であらわされる。

$$H_0 = \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} + \lambda h \cos \theta, \dots\dots\dots(23)$$

ここに、

$$\alpha = \frac{1}{A} \int \left( \frac{u}{u_m} \right)^3 dA, \quad \lambda = 1 + \frac{1}{Qh \cos \theta} \int \frac{dp}{\rho g} u dA$$

であり、 $dp$  は静水圧からの変化を示している。したがつて、これまで取り扱つてきた流れでは、 $\lambda$  は 1 より小さいはずである。(23) 式を用いると、Böss の定理は

$$\left( \frac{\partial H_0}{\partial h} \right)_c = \lambda_c \cos \theta_c - \frac{\alpha_c Q^2}{gA_c^3} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial h} \right)_c - \frac{Q^2}{2gA_c^2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial h} \right)_c - h_c \cos \theta_c \left( \frac{\partial \lambda}{\partial h} \right)_c = 0 \dots\dots\dots(24)$$

とあらわされ、鞍形点の位置は (24) 式と

$$\sin \theta_c - \frac{\tau_c}{\rho g R_c} \left( \frac{u_b}{u_m} \right) + \frac{\alpha_c Q^2}{gA_c^3} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_c - \frac{Q^2}{2gA_c^2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_c - h_c \cos \theta_c \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)_c + \lambda_c h_c \sin \theta_c \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_c = 0 \dots\dots(25)$$

とによつて求められる。ところが近似的には、 $\alpha \approx 1$  および  $\lambda \approx 1$  と仮定されるから、これらの両式は簡単にあらわされる。したがつて、Venturi 堰が Parshall 堰としての水理学的機能を発揮するためには、堰の幾何的形狀および測定すべき流量範囲にわたつて、(24) および (25) 式が満足され、かつこれら両式から求められる点が鞍形点でなければならない。ところが、鞍形点は常流から射流への遷移点であるから、Parshall 堰の上流部は緩勾配にしておく必要がある。Fig. 9 は京大工学研究所水理実験室にある Parshall

堰の寸法(単位 cm)と堰による水面形状を示したものである。この堰は断面形状が連続的に変化していないから、特異点を一義的に決定できないが、断面が不連続的に変化する点で限界水深とすれば、近似的に(24)および(25)式を満足するものと思われる。このような点を出発点として水面形状を追跡したものが点線で示されており、実験結果とよく一致しているから、明らかに一点測定が可能であることがわかる。したがって、こうした型式の堰を設計する場合、あらかじめ測定すべき流量の範囲が決定されると、一義的に水路の幾何学的形状および境界特性を与えることができるはずである。

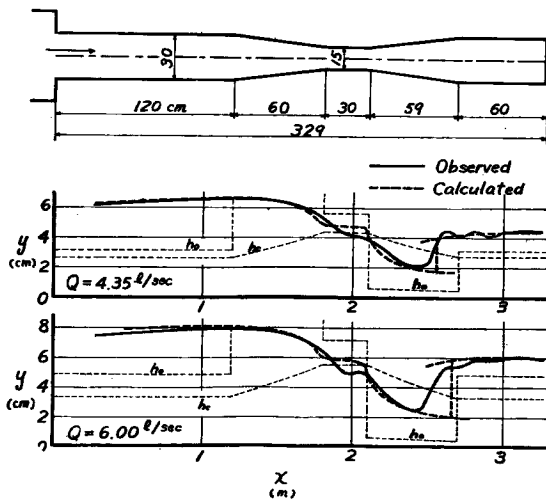


Fig. 9 Surface profiles of flows in a parshall flume.

## 8. 結 論

本研究では、開水路の定常流の遷移現象がその水面形方程式にあらわれる特異点によつておこり、とくにその特異点が鞍形点であれば、水流は常流から射流へと遷移するから、与えられた水路形状および流量に対して水理学的な諸特性が一義的に決定されるいわゆる支配断面となり、この性質を応用することによつて、開水路水流の流量測定法に理論的背景を与えることを明らかにした。

さらに、支配断面において成立する Bélanger の定理、Böss の定理およびこれらを統一する Jaeger の一般定理について、水理学的な意義を明らかにするとともに、これらの同時生起性を特異点の理論によつて証明することができた。したがって、18世紀以来多くの研究者によつて発展されてきた開水路における定常流の水理現象も、ここで展開した解析法に従えば、すべてを統一することができるように思われる。しかしながら、断面全体にわたる平均値的な方法によつて、平均流速および水深を未知関数とするいわゆる古典的な1次元解析法では、流速分布または圧力分布に関する正しい数学的表現がなされない限り、その解析法の適用範囲がおのずから制限されよう。今後さらに詳細な実験を行うとともに、水流の基本的な流速分布および圧力分布に検討を加えて、これらの諸特性を明らかにするつもりである。

## 参 考 文 献

- 1) 岩佐義朗, 幅の漸変する水路における水流の遷移現象と境界特性との関連に関する理論的研究, 土木学会論文集, 第59号別冊(3-1), 1958.
- 2) Jaeger, C., *Engineering Fluid Mechanics*, Blackie, London, 1956.
- 3) Kirkpatrick, K. W., *Discharge Coefficients for Spillways at TVA Dams*, Trans. ASCE, 1957.
- 4) 竹内俊雄, 溢流堰堤頂部縦断形状の溢流係数に及ぼす影響に関する水理実験, 土木試験所所報, 73号, 1943.
- 5) Shoder, E. W., and Turner, K. B., *Precise Weir Measurements*, Proc. ASCE, 1927.
- 6) Ippen, A. T., *Channel Transitions and Controls*, *Engineering Hydraulics*, edited by H. Rouse, John Wiley, 1950.
- 7) 物部長穂, *水理学*, 岩波, 1933.
- 8) Paderi, F., *Coefficient de debit et profil des barrages deversants avec vitesse d'amenee non negligible*, Proc. 6th General Meeting of IAHR, The Hague, 1955.