

極を含む等緯度経度格子上の浅水波方程式に対する高速フーリエ解法 Fast Fourier Shallow-Water Equation Solvers in Latitude-Longitude Coordinates with Poles

○野村 鈴音・榎本 剛

○Suzune NOMURA, Takeshi ENOMOTO

This study improves the Fourier transform on the sphere, initially developed by Spatz et al (1998). While offering substantial computational advantages, the Fourier transform on the sphere encounters limitations at the poles in latitude-longitude coordinates, including discontinuity of vector fields at the poles and diminished accuracy of zonal derivatives. To address these challenges, we propose a novel formulation for accurately computing derivatives at the pole and incorporate isotropic filters to mitigate noise in polar regions. Validation against standard tests for the shallow water equation tests demonstrate that our model, utilizing the Fourier transform on the sphere, presents a promising alternative to existing models based on the spherical transform.

1. はじめに

大気大循環モデルの力学コアをはじめとした幾何形状を球面とする偏微分方程式は、球面調和函数変換を用いたスペクトル法により広く実装される。球面調和函数変換は、緯度方向の変換に行列積を伴うルジャンドル変換を行うため、計算コストの観点から問題がある。フーリエ変換には、効率的に計算できる高速フーリエ変換 (fast Fourier transform, FFT; Cooley and Tukey 1965) が開発されており、球面に適応できれば、計算コスト削減の観点から有用であると考えられる。

しかし、基底が三角函数であるフーリエ変換は、緯度方向に非周期的な球座標で使えない。そこで、Orszag (1974) や Yee (1981), Cheong (2000a) は、東西波数と南北構造の偶奇性 (パリティ) に関係があることから、緯度方向の変換を可能にした。さらに、これらの手法を改良し、浅水波方程式に適用した研究もある (Yoshimura 2022)。

他のアプローチには、1 次元フーリエ変換を用いた手法 (Spatz et al. 1998, 以降 STS98) がある。STS98 は、等緯度経度格子データのデータ配列を組み替えることで緯度方向への変換を可能とした。この手法は、パリティを考慮することなく変換可能であり、実装が易しい。しかし、STS98 は極に格子を配置できないという問題点もある。

本研究では、STS98 の手法を元に、極に格子点を配置できる方法を検討した。また、格子点が極に配置するか否かで精度に違いが生じるか調べた。さらに、浅水波方程式に実装した。

2. STS98 で提案された離散化手法の問題点

球座標上で、経度方向に微分を行う場合には緯度円の半径に依存する係数を掛ける必要がある。余緯度 θ 、経度 λ で表されるスカラー函数 $f(\theta, \lambda)$ があったとき、この経度方向の微分は球面上で次のようになる。

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f(\theta, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{m=0}^N h_m(\theta) e^{im\lambda}$$

$$= \frac{1}{\sin \theta} \sum_{m=0}^N im h_m(\theta) e^{im\lambda}$$

ここで、 m は東西波数、 $h_m(\theta)$ は $f(\theta, \lambda)$ を東西にフーリエ変換した展開係数、 N は切断波数、 i は虚数単位。これは、経度微分に掛かる極で無限大に発散する係数は物理空間で掛け合わせることを意味している。

極で無限大に発散する係数を掛けるため、STS98 で提案された手法は極に対応しておらず、極に格子点を配置できなかった。

3. 極へ格子点を配置する方法

経度方向の微分には、極で定義できない係数が現れたが、緯度方向の微分には現れない。これは、緯度方向に微分を行う場合には、常に極を通るような大円を描き、その半径が常に一定であるためである。

つまり、極に格子点を配置するには経度方法の微分で表されていた量を緯度方向の微分で表すと問題が解決する。同様の問題により、極で無限大

に発散し、同様の方法により解決しなければいけない物理量は、次のとおりである。

- ① スカラー函数の経度微分
- ② 渦度・発散
- ③ ラプラシアン

の3つである。これらの物理量は浅水波方程式の構築のために必要となる。ただし、ラプラシアンは数値粘性として使うことを想定し、一般的なスカラーラプラシアンだけでなく、ベクトルラプラシアンについても構築する必要がある。

ここでは、紙面の都合により①のスカラー函数の経度微分にのみ示す。この物理量は、スカラー量であるが、勾配の成分であると考え、緯度微分と併せてベクトル量として扱うことができる。

$$\nabla f(\theta, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

ここで、 ∇ は球面上の勾配を表す。極が特異点とならない絶対デカルト座標(X, Y, Z)用いれば、極でも定式化を行うことができる。球面座標(U, V, W)は、変換行列 $\mathbf{Q}$ を用いて次のように表される。

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ここで、変換行列 $\mathbf{Q}$ は、

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \lambda & \sin \theta \sin \lambda & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \lambda & \cos \theta \sin \lambda & -\sin \theta \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

である。特に、北極での変換行列 $\mathbf{Q}_{\theta=0}$ は2次正方行列となる。

$$\mathbf{Q}_{\theta=0} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix}$$

よって、北極での勾配は、

$$\nabla f(\theta, \lambda)|_{\theta=0} = \mathbf{Q}|_{\theta=0} \nabla_x f(\theta, \lambda)|_{\theta=0}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \\ \cos \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

3. 誤差特性

経度方向の微分に掛かる係数は極に近づくほど

小さい値になるため、数値誤差が大きくなる。本研究では、極では数値誤差が大きくなるような係数は用いておらず、その係数を掛ける極に最も近い緯度が STS98 に比べて 2 倍離れているため、STS98 より誤差が低減する。このことは、実装した結果からも確かめられている (図 1)。

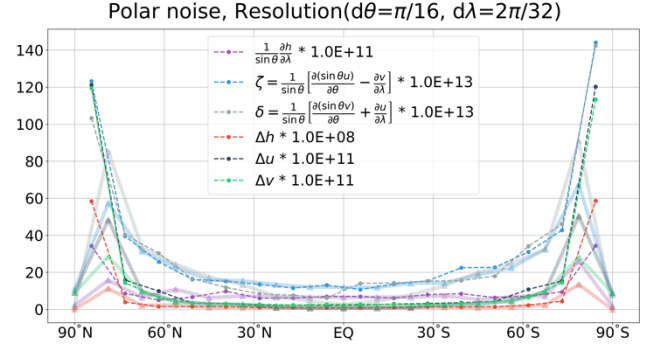


Fig1. 極域に生じるノイズ。フーリエ変換により得た微分量の絶対値を取り、経度方向に足し合わせた。紫はスカラー函数の経度微分、水色・灰色は渦度・発散、赤・青・緑はスカラーラプラシアン、ベクトルラプラシアン (2 成分)。また、太線が本研究で使用した極を含む格子。細い線が STS98 で使用された半格子ずれた格子。

また、高解像度計算を行うほど、極の近くに格子が配置されるため、より多くのノイズを低減することになる。

4. 浅水波方程式への適用

浅水波方程式系は Swarztrauber (1996) で提案された、風成分の経度微分を使わない定式化である。Williamson et al. 1992 の移流問題の結果は図 2 のようになる。

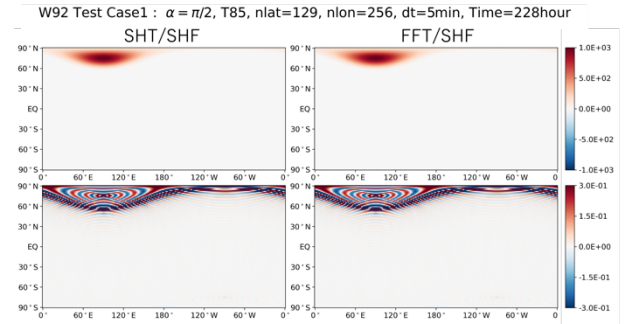


Fig2. コサインベルの線型移流実験の結果。地軸を $\pi/2$ 傾けることで 2 つの極を 12 日かけてベルが通る。示している物理量は高度。初期時刻から 9.5 日後であり、2 つの極を通った直後の図になる。上段が計算した値、下段が真値からのずれ。左は球面調和函数変換で計算されており、右はフーリエ変換により計算されている。

5. まとめ

本研究は極座標上で定義できないとされていた物理量を、定義可能な形で表した。これにより、内挿なしで再解析データのような極に格子点が配置された等緯度経度格子を入力として微分量を得ることができる。このことは、力学コア以外にデータ解析の観点からも有用であると考えられる。