

基底関数展開による変位場推定におけるボックスカー関数と3次B-スプライン関数の比較

Comparison between the Boxcar and Cubic B-spline Functions

in Estimating Displacement Fields by Basis Function Expansion

○野末陽平・深畑幸俊

○Yohei NOZUE, Yukitoshi FUKAHATA

In estimating continuous displacement fields from spatially discrete GNSS data, the method of basis function expansion is a powerful tool. In this study, we quantitatively compare the performance of the boxcars with that of the cubic B-splines, changing the basis-function interval. It is found that at least about $2.5^2 = 6.25$ times as many boxcars as cubic B-splines are needed to achieve similar performance. In the method of basis function expansion, the computation of inverse matrices is the most time-consuming process; the computational cost of the inverse of a dense matrix is generally proportional to the cube of the matrix size (the number of basis functions). Therefore, the computational cost to compute inverse matrices for the boxcars is about 250 times as much as that for the cubic B-splines.

1. はじめに

GNSS 観測などで得られた空間的に離散的な速度データから連続的な変形場を推定することは、測地学的に重要な課題である。1つの有力な方法として、連続的なモデル変動場を基底関数展開し、その展開係数をインバージョン解析により推定する方法がある。その際、基底関数としてボックスカー関数や3次B-スプライン関数などがよく用いられる。前者は導入が容易であるが、滑らかな空間変化が期待される変位速度場の推定にはやや不向きであると考えられる。一方、後者は初期の計算に煩雑さを伴うが、区分的に定義された3次関数であるため変位速度場の推定にはより適切であると考えられる。ここで疑問となるのは、基底関数にボックスカー関数を用いた場合と3次B-スプライン関数を用いた場合とで、変位速度場の推定結果がどれだけ異なるかということである。そこで、基底関数の間隔を系統的に変えることで、両者の推定結果の定量的比較を試みた。

2. データと解析方法

東向き、北向きにそれぞれ x 軸、 y 軸をとる。 $i(=x, y)$ 方向の変位速度場 $v_i(x, y)$ を、間隔 L [km]で並ぶ M 個の基底関数 $\Phi_j(x, y; L)$ の重ね合わせで展開することを考える：

$$v_i(x, y) = \sum_{j=1}^M a_{ij} \Phi_j(x, y; L) = \Phi \mathbf{a}_i \quad (1)$$

ただし、 Φ は $\Phi_j(x, y; L)$ で構成される行列、 $\mathbf{a}_i$ は推定すべきモデルパラメータ a_{ij} で構成されるベクトルである。

観測データとして、128°E~146°E, 30°N~46°Nの範囲にある $N(=1186)$ 点のGEONET観測局の国土地理院F3解(日々の座標値)を使用した。解析期間は2006年1月1日から4年間である。期間中の季節変動・地震時変動・アンテナ交換などの影響を最小二乗法を用いて除去することで、各観測点における変位速度の x 成分、 y 成分を計算し、データベクトル $\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y$ とした。式(1)より、離散的なデータ $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_x^T \mathbf{d}_y^T)^T$ と連続的な速度場 $\mathbf{v}$ は次式で結び付けられる：

$$\mathbf{d} = \mathbf{v} + \mathbf{e} = \mathbf{H}\mathbf{a} + \mathbf{e}; \mathbf{e} \sim N(0; \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (2)$$

ただし、 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_x^T \mathbf{a}_y^T)^T$ はモデルパラメータベクトル、 $\mathbf{e}$ は観測誤差である。 $\mathbf{H}$ は基底関数を用いて次式で定義した：

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{h} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{h} \equiv \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1, y_1) & \cdots & \Phi_M(x_1, y_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1(x_N, y_N) & \cdots & \Phi_M(x_N, y_N) \end{pmatrix} \quad (4)$$

さらに、Okazaki et al. (2021)と同様に、「ラフネス（変位速度の2階微分のL2ノルム）が小さくなること」を先験情報として目的関数 $s(\mathbf{a})$ を次式で定義した：

$$s(\mathbf{a}) = (\mathbf{d} - \mathbf{H}\mathbf{a})^T(\mathbf{d} - \mathbf{H}\mathbf{a}) + \alpha^2 \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} \quad (5)$$

式(5)の第1項は、変位速度の推定値と観測値の残差2乗和であり、第2項は速度場の平滑化項である。両者の重みは超パラメータ α^2 により規定され、その最適値 $\hat{\alpha}^2$ はABIC最小の規準 (Akaike, 1980) を用いて客観的に決定できる。このとき、目的関数 $s(\mathbf{a})$ を最小化するモデルパラメータの最適値

$\hat{\mathbf{a}} = (\hat{\mathbf{a}}_x^T \hat{\mathbf{a}}_y^T)^T$ は次式で与えられる：

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \hat{\alpha}^2 \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{d} \quad (6)$$

式(6)を式(1)に代入することで、連続的な変位速度場が得られる。

式(4)で行列 $\mathbf{h}$ を構成する基底関数 ϕ_j として、ボックスカー関数および3次B-スプライン関数を使用し、基底関数の間隔 L を15～100 kmの範囲で変更することで結果を比較した。

3. 結果と考察

以下で定義する2つの指標 **residual** および **RMSE15** を用いて推定結果を定量的に比較した。

まず、GEONET 観測局での観測データと推定速度との残差2乗平均平方根 **residual** を定義した：

$$\text{residual} \equiv \sqrt{\frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N |\mathbf{v}_n^{\text{obs}} - \mathbf{v}_n^{\text{est}}(L)|^2} \quad (7)$$

ただし、 N は観測点数、 $\mathbf{v}_n^{\text{obs}}$ は観測点 n での速度ベクトル、 $\mathbf{v}_n^{\text{est}}(L)$ は間隔 L を持つ基底関数 $\text{est}(=\text{spline}$ または boxcar)を用いた場合に推定された観測点 n での速度ベクトルを表す。

また、3次B-スプライン関数を基底関数として用いた場合、 $L = 15 \sim 25$ kmで速度場やABICの値がほぼ収束した。従って、 $L = 15$ kmの3次B-スプライン関数を用いた場合の推定結果(Fig. 1)が最適解に近いと考え、このときの推定結果との残差2乗平均平方根 **RMSE15** を次式で定義した：

$$\text{RMSE15} \equiv \sqrt{\frac{1}{2N_c} \sum_{n=1}^{N_c} |\mathbf{v}_n^{\text{spline}}(15) - \mathbf{v}_n^{\text{est}}(L)|^2} \quad (8)$$

ただし、 N_c は定量的比較を行うために解析領域内に1 km間隔で配置したグリッド点の個数である。

式(7), (8)で定義した **residual**, **RMSE15** の基底関数の種類および L に対する依存性を、Fig. 2に示す。Fig. 2より、 $L = 20, 25, 30$ kmのボックスカー関数を用いた場合、 $L = 50, 60, 80$ kmの3次B-スプライン関数を用いた場合と比較して **residual** がほぼ同じで **RMSE15** ははつきり大きいことが分かる。従って、間隔 $2.5L$ の3次B-スプライン関数を用いた場合の性能は、間隔 L のボックスカー関数を用いた場合の性能と比較して同等以上であると考えられる。このとき、行列 $\mathbf{H}$ のサイズは $2.5^2 = 6.25$ 倍程度ボックスカー関数の方が大きくなる。一般に、線形のインバージョン解析で最も計算コストがかかるのは式(6)などに現れる逆行列の計算であり、逆行列の計算コストは通常モデルパラメータ数の3乗に比例する。このことから、3次B-スプライン関数を用いた場合には、大雑把に言ってボックスカー関数の場合の $1/6.25^3 \approx 1/250$ 程度の計算コストにより、同等以上の性能が得られると考えられる。

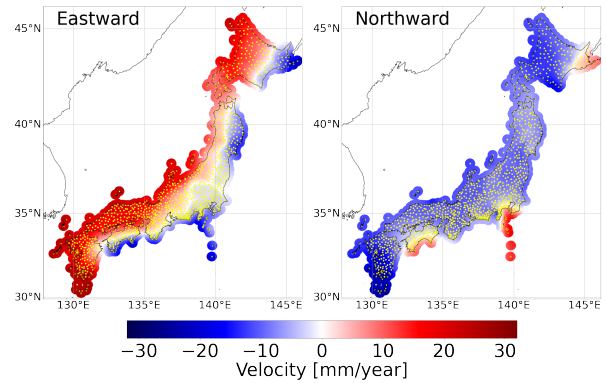


Fig. 1. Eastward (left) and northward (right) velocity fields estimated by cubic B-spline functions with $L = 15$ km. Yellow dots represent the locations of GEONET stations.

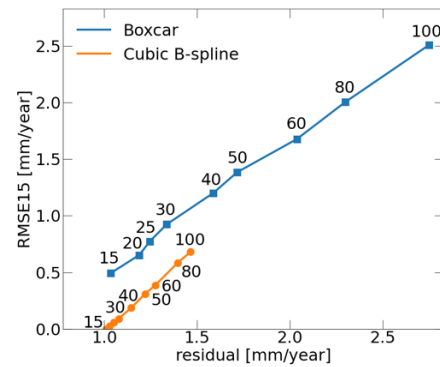


Fig. 2. Relation between residual and RMSE15. Boxcar (blue) and cubic B-spline (orange) functions are used as basis functions. Attached numbers represent the basis-function interval L [km].