B206

動径基底関数を用いた浅水波モデルに対する並列化反復解法の適用
Application of a Parallel Iterative Solver to a Shallow Water Model Using Radial Basis Functions

○小笠原宏司・榎本剛
○Koji OGASAWARA, Takeshi ENOMOTO

A shallow water model was parallelized for distributed memory computers with the PETSc library and validated in a steady-state test case. The application of an iterative methods reduced the computational cost of solving linear systems over the direct methods. The normalized root mean square error is as small as approximately 1.54×10^{-7} for nodes ranging from 400 to 5184. The current implementation is faster than the serial version, but it does not scale due to the dense matrices.

1. はじめに

浅水波モデルに対する動径基底関数（Radial Basis Functions, RBF）の適用はFlyer and Wright(2009)が定式化した。Flyer and Wright(2009)では浅水波モデルに対するテストケースにおいて球面調和関数や二重フーリエ級数などの現行モデルで使われている手法と比較し、同程度の精度を得るために必要な節点数はRBFを用いた手法が他の手法よりも少ないことを示した。RBFを用いた非線形な連立偏微分方程式の解法が十分な精度で計算が可能であることが示されたので、次に大気大循環モデルに発展させるためには計算の高速化が必要である。

RBFを用いた双曲線型の偏微分方程式の解法では2つの計算量の多い計算を行わなければならない。一つ目は空間微分の離散化である。離散化では式(1)の線形システムを解く必要がある。

$$\boldsymbol{Ax = B} \tag{1}$$

係数行列Aの成分にRBFが含まれている。一般に行列Aは密行列であり、式(1)を直接法（LU分解法など）で解くために必要な計算量は$O(N^3)$である。二つ目は時間積分の際に行う行列ベクトル積であり、計算量は各ステップに$O(N^2)$である。これらの二つの計算は大気大循環モデルで用いられるような数十万から百万もの水平節点数に対しては非常に重たい計算になる。そこで計算の高速化のために，並列化を試みた。

本研究では浅水波モデルの並列化にはメモリ分散型の並列化手法を用い、並列化にはメッセージ通信インターフェース（Message Passing Interface, MPI）を用いた。線形システムの計算と行列ベクトル積に用いたライブラリーはPETScである。PETScの線形システムのソルバー群であるkspは反復解法で線形システムを解く。反復解法の線形システムの計算量は$O(N^2)$であり、巨大な節点数での計算の高速化に期待できる。Enomoto(防災研年報63号B)は、疎行列に対し反復解法を適用することで高速化されることを確認している。

以上のことから今回の研究における目的は並列化反復解法を用いたRBF浅水波モデルの精度の検証を行い、また並列化による高速化の検証を行うことである。

2. テストケースによる高速化の検証

並列化反復解法を取り入れた RBF 浅水波モデルの精度と計算速度を Williamson et al. (1992) のケース2で検証した。このテストケースは，初期に東西方向の地衡流を与え定常状態が維持されるかを試す。浅水波モデルの支配方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \nabla\Phi - \mathrm{f}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{t}} = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Phi - \Phi\nabla\boldsymbol{u} \tag{3}$$

である。初期条件として

$$u = u_0(\cos\theta\cos\alpha + \cos\lambda\ \sin\theta\sin\alpha)$$

$$v = u_0\sin\lambda\sin\alpha$$

$$\Phi_0 = \mathrm{gh}_0 - \left(a\Omega u_0 + \frac{u_0^2}{2}\right)(-\cos\lambda\cos\theta\sin\alpha + \sin\theta\cos\alpha)$$

θ ：緯度、λ：経度

α：赤道と風がなす角度

u_0：傾けていない時の赤道での風速

$h_0 = 1000$、 $g = 9.80616$、$\Omega = 7.292\times10^{-5}$

を与える。これは(2),(3)の定常解である。

実験は Mac Pro (Late 2013)で行った。プロセッサーは 3.5GHz の 6 コア Intel Xeon E5 である。メモリは 1866MHz の DDR3 で 32GB 搭載されている。

3 実験結果

規格化された 2 乗平均平方根誤差を Fig.1 に示す。誤差は節点数の増加に伴い N=3136 にかけて指数的に減少し、それ以上の節点数ではやや収束率が落ちているが十分に高精度である。

計算量の大きな二つの計算について、プロセス数に対して計算にかかった時間を Fig.2 に示す。並列化により線形システムの計算時間は 4 プロセスまで減少しているが、行列ベクトル積では逐次計算よりも遅い。現在の実装では, RBF の内挿行列 A は密行列であり、ksp が想定している疎行列ではない。今後疎行列化を行えば高速化が見込まれる。

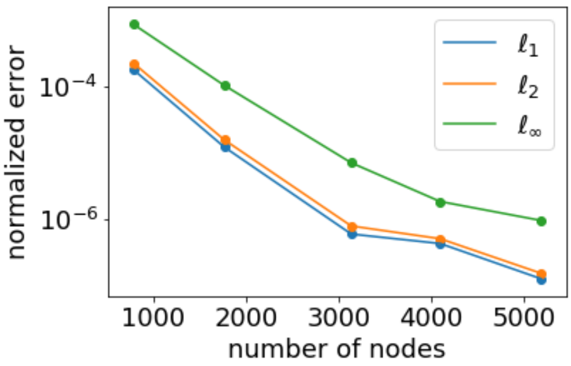

Fig.1 Normalized root mean square error as a function of the number of nodes.

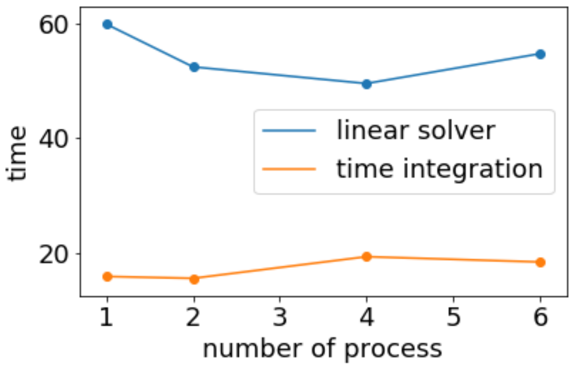

Fig.2 Wall-clock time for solving linear systems and for time integration as a function of the number of process.