COE-33

災害リスク下での社会基盤施設の最適補修戦略と性能設計

長江剛志

1 はじめに

道路や橋梁などの社会基盤施設（以下，施設）の多くは，一般に，これらの施設の新規建設には多くの費用を必要とし，その供用期間は数十年以上にも及ぶ．そのため，これらの社会基盤施設に対しては，長期的な補修を明示的に考慮した性能設計が必要不可欠である．こうした社会基盤施設の補修戦略および性能設計を行うには，以下の 3 つの特性を考慮する必要がある：a）地震などの予測不可能な自然災害によって構造物が破壊され，施設が供用ができなくなるリスク（災害リスク）が存在する；b）施設利用者（ひいては施設から発生する便益フロー）が非定常的な動学的不確実性をもつ；c）各年度の補修費用に上限が存在する．本研究では，これらの要因を全て考慮した枠組の下で，最適補修および性能設計問題に対する定量的分析手法の提案を目的とする．

2 定式化

本研究では，社会基盤施設として高速道路における橋梁や高架といった単一の構造物を対象とする．そして，時刻 $t \in [0, \infty)$ におけるこの構造物の力学的強度（性能水準）を，一次元変数 $X(t)$ で集約的に表現できるとし，以下の確率過程に従うと仮定する．

$$\mathrm{d}X(t) = x(t)\,\mathrm{d}t - \eta(X)\,\mathrm{d}q(t), \quad X(0) = \bar{X}. \tag{1}$$

この式の右辺第 1 項は補修 $x(t)$ による性能水準の向上を，第 2 項は自然災害による構造物の劣化を表す．ここで，$q(t)$ は強度 λ の Poisson 過程であり，η は X についての既知関数とする．性能水準が $X(\mathcal{T}) = 0$ となった時刻 $\mathcal{T}$ 以降，施設は供用不能になるとする．この枠組において，施設の性能設計とは，完成直後の水準 $\bar{X} > 0$ を決める問題に帰着する．

時刻 t における施設需要を $P(t)$ とし，以下の確率過程：

$$\mathrm{d}P(t) = \alpha(X, P)\,\mathrm{d}t + \sigma(X, P)\,\mathrm{d}Z(t), \quad P(0) = P_0. \tag{2}$$

に従うとする．ここで，$Z(t)$ は Wiener 過程，α, σ は，それぞれ，(X, P) についての既知関数とする．

状態 (X, P) において補修量 x が選択されているとき，この施設から単位時間当たりに発生する純便益を，$\pi(x, X, P) \equiv F(P) - C(x, X, P)$ とする．この式の右辺は，それぞれ，利用者（租）便益および補修費用を表す．ここで，補修量 x には制約：$x \in \mathcal{K}(X, P) \equiv \{(X, P) | 0 \leq x, \text{ and } C(x, X, P) \leq K\}$ が設けられるとする．

上述の枠組の下で，施設管理者は，供用期間 $[0, \mathcal{T})$ 中に獲得する便益の期待現在正味価値を最大化するように補修戦略 $\{x(t) | t \in [0, \mathcal{T})\}$ を決定する．この行動は，

$$\text{[P]} \max_{\{x(t)\in\}_0^{\mathcal{T}}} \mathrm{E}\left\{ \int_0^{\mathcal{T}} e^{-\rho t} \pi(x(t), X(t), P(t))\,\mathrm{d}t \middle| X(0) = \bar{X}, P(0) = P_0 \right\}.$$

と定式化される．

3 最適性条件

問題 [P] の最適性条件は，以下の HJB(*Hamilton-Jacobi-Bellman*) 方程式として得られる．

$$\max_{x \in \mathcal{K}(X,P)} \pi(x, X) + \mathcal{L}V(X) + xV_X(X) + \lambda V(X - \eta(X)) = 0, \ \forall X. \tag{3}$$

ただし，P に関する表記を省略した．ここで，$V(X, P)$ は $(X(0), P(0)) = (X, P)$ における問題 [P] の目的関数（i.e. 最適値関数）である．$\mathcal{L}$ は 2 階線形偏微分演算子で，施設需要 P の確率微分方程式 (2) から一意に決まる．ここで，$C(x, X, P) \equiv Ax$（A は所与の定数）としよう．このとき，最適制御は $x = 0$ もしくは $x = K/A$ の Bang-Bang 制御となる．これより，HJB 方程式 (3) は以下の変分不等式問題 (VIP:*Variational Inequality Problem*)：

$$\text{[VIP}(X)\text{]} \quad \min.\Big\{\pi(0, X) + \mathcal{L}V(X) + \lambda V(X - \eta(X)),$$
$$\pi(K/A, X) + \mathcal{L}V(X) + K/AV_X(X) + \lambda V(X - \eta(X))\Big\} = 0.$$

として書き直せる．ここで，$X = 0$ となった時点で施設供用が不可能となり，以降の便益は発生しない．これより，境界条件は $V(0, P) = 0$ で表される．

4 最適補修問題の解法

最適補修問題 [P] は，性能水準 X ごとに成立する変分不等式問題 [VIP(X)] に分解できることが判った．筆者らは，このような VIP が，適切な関数変換を行うことにより，数理計画分野で良く知られる標準形の相補性問題に帰着することを明らかにしている [1]．この分析結果を用いれば，問題 [VIP(X)] に対しても，相補性問題の数値解法に関する最新の研究成果を活用した効率的計算法が開発できる．その詳細なアルゴリズムおよび計算結果については，発表会で報告する予定である．

参考文献

[1] 赤松隆, 長江剛志：不確実性下での社会基盤投資・運用問題に対する変分不等式アプローチ, 土木学会論文集, 2003, 投稿中.