C-09

# 地震動位相の不確定性が構造物の応答に及ぼす影響

○佐藤忠信・室野剛隆

## 1．はじめに

フーリエ振幅特性が比較的滑らかでかつ広帯域の地震動の時刻歴はその位相特性により、最大振幅の発生時刻や地震動の継続時間が大きく異なることになる。こうした不確定性が構造物の弾性応答に及ぼす影響を明らかにするのが本研究の目的である。

## 2．地震動のモデル化

地震動を以下のように表現する。

$$\ddot{z}(t)=\sum_{i=1}^{N_f}\ddot{z}_k(t)=\sum_{i=1}^{N_f}a_k\cdot\cos(\omega_k t+\phi_k)$$

ここに、$a_k$ は円振動数 $\omega_k$ における振幅、$\phi_k$ は位相である。位相の不確定性は群遅延時間を用いて以下のように多次元ガウス分布でモデル化する。

$$p\left(\xi^{(j)}\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{j}{2}}\left|\mathbf{S}^{(j)}\right|}\exp\left\{-\left(\xi^{(j)}-\mu^{(j)}\right)^T\mathbf{S}^{(j)-1}\left(\xi^{(j)}-\mu^{(j)}\right)\right\}$$

$$\xi^{(j)}=\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_j\right)^T\qquad\mu^{(j)}=\left(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_j\right)^T$$

$$\xi_j=\zeta_j\Delta\omega\qquad\mu_j=\overline{\mu}_j\Delta\omega\qquad S_{kl}=\overline{S}_{kl}\Delta\omega$$

ここに、$\zeta_j$ は円振動数 $\omega_j$ における群遅延時間で次式のように定義される。$\overline{\mu}_j$ はその平均値であり、$\overline{S}_{kl}$ 共分散マトリックスである

$$\zeta_j=\left(\partial\phi/\partial\omega\right)\Big|_{\omega=\omega_j}$$

## 3．１自由度系の応答

１自由度系の固有円振動数 $\omega_0$ と減衰定数 $h$ が与えられれば動方程式は次式のように表現できるので、

$$\ddot{y}_k+2h\omega_0\dot{y}_k+\omega_0^2y_k=-\ddot{z}_k\qquad y=\sum_{i=1}^{N_f}y_k\qquad\ddot{z}(t)=\sum_{i=1}^{N_f}\ddot{z}_k$$

解は以下のように与えられる

$$y_k=C_k\cos\left(\omega_k t+\phi_k+\tilde{\phi}_k\right)+e^{-h\omega_0 t}\left(A_k\cos\tilde{\omega}t+B_k\sin\tilde{\omega}t\right)$$

$$C_k=\frac{-a_k}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_k^2\right)+4h^2\omega_0^2\omega_k^2}}\qquad\tan\tilde{\phi}_k=-\frac{2h\omega_0\omega_k}{\left(\omega_0^2-\omega_k^2\right)}\qquad\tilde{\omega}=\sqrt{1-h^2}\,\omega_0$$

$$A_k=-C_k\cos\left(\phi_k+\tilde{\phi}_k\right)\qquad B_k=\frac{C_k}{\tilde{\omega}}\left\{\omega_k\sin\left(\phi_k+\tilde{\phi}_k\right)-\frac{h\omega_0}{\tilde{\omega}}\cos\left(\phi_k+\tilde{\phi}_k\right)\right\}$$

解の中に現れる位相 $\phi_k$ が不確定な量であるので、

$$\phi_k=\phi_0+\sum_{j=1}^{k}\zeta_j\Delta\omega$$

の関係式と $\zeta_j$ の確率分布関数を用いて、期待値計算をすると次式を得る。

$$E\left[\cos\left(\omega_k t+\phi_k+\tilde{\phi}_k\right)\right]=\cos\left(\omega_k t+\tilde{\phi}_k+\phi_0+\sum_{l=1}^{k}\mu_l\right)\exp\left(-\sum_{l=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}S_{lm}\right)$$

$$E\left[\cos\left(\phi_k+\tilde{\phi}_k\right)\right]=\cos\left(\tilde{\phi}_k+\phi_0+\sum_{l=1}^{k}\mu_l\right)\exp\left(-\sum_{l=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}S_{lm}\right)$$

$$E\left[\sin\left(\phi_k+\tilde{\phi}_k\right)\right]=\sin\left(\tilde{\phi}_k+\phi_0+\sum_{l=1}^{k}\mu_l\right)\exp\left(-\sum_{l=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}S_{lm}\right)$$

これを用いて応答の期待値を計算すると次式を得る。

$$\begin{aligned}\bar{y}_k=&C_k\left\{\cos\left(\omega_k t+\tilde{\phi}_k+\phi_0+\sum_{l=1}^{k}\mu_l\right)\right\}\exp\left(-\sum_{l=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}S_{lm}\right)\\&+\left\{F_k(t)\cos\left(\tilde{\phi}_k+\phi_0+\sum_{l=1}^{k}\mu_l\right)+D_k(t)\sin\left(\tilde{\phi}_k+\phi_0+\sum_{l=1}^{k}\mu_l\right)\right\}\exp\left(-\sum_{l=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}S_{lm}\right)\end{aligned}$$

$$D_k(t)=e^{-h\omega_0 t}\frac{\omega_k}{\tilde{\omega}}\sin\tilde{\omega}t\qquad F_k(t)=-e^{-h\omega_0 t}\left(\cos\tilde{\omega}t+\frac{h\omega_0}{\tilde{\omega}}\sin\tilde{\omega}t\right)$$

応答の分散の表現は次式のようになる。

$$\sigma_y^2=E\left[\left(\sum_{j=1}^{N_f}y_j\right)\left(\sum_{k=1}^{N_f}y_k\right)\right]-\left(E\left[\sum_{j=1}^{N_f}y_j\right]\right)^2$$

## 4．数値計算例

下図に速度応答の標準偏差の時刻歴を示した。すべての円振動数領域で群遅延時間の平均値 $\overline{\mu}_j$ を 7.0 とし、共分散マトリックスが対角マトリックスからなるとしその値を $\sigma$ とし、構造系の固有周期は 0.5 秒とした。上図は $\sigma$ を 1.0 とし、減衰定数 $h$ を 5-20%と変化させた場合であり、下図は $h$ を 5%とし $\sigma$ を 1.0-7.0 と変化させた場合である。