透水係数の不均質分布構造同定における非適切問題の克服法

○浜口 俊雄

1. 目的

広域地下水解析では，地下水の挙動が複雑であっても観測データの量と質に見合うような地下水モデルを構築することが重要である．特に，地下水に関する物性値の空間分布の与え方がモデル再現性の良し悪しを左右する．いま，議論を簡素化するために一様な有効間隙率の下で不均一な透水係数分布を同定対象に絞る．本研究では，そこで生じる逆解析の非適切性 (ill-posedness) を克服する既往の手法の特徴を再考することで短所を補った新手法を提案する．

2. 一意解を算出するための必要条件

パラメータを未知量として，観測値から一意解を得るためには，少なくとも

条件 1 ： 観測数 ≥ パラメータ数

条件 2 ： 観測の時系列データが互いに全て独立

条件 3 ： 1つ以上の独立した観測データに対して，1つの分布区域が対応

が満たされていなければならない．**条件 1** は方程式の可解性から明らかである．**条件 2** は観測データの性質の問題で，特に近接した観測データに多く見受けられる．観測データの少なくとも2つ以上がほぼ同値な時系列変化を示す場合，複数の観測データがほぼ同じ場合，それらは1つのデータとしか見なせない．それ故，実質の観測数はその分だけ減ってしまっていることになるので，独立データとして扱える数を再確認するものである．**条件 3** は観測データからパラメータ分布への影響力の問題で，1つのパラメータ均一区域に存在する1つ以上の観測データは，その区域のみの感度が隣接する区域よりも圧倒的に高い．各区域に1つ以上の観測点が存在する分布の区域化になっていることを確認するものである．

実問題では非適切な条件ものが多い．**条件 1** を満たさない場合はいわゆる不定解となって解が定まらない．そこで先験情報 (事前情報) を導入することにより解の安定性を得ようとする策が講じられる．**条件 2** を満たさない場合は従属するデータ数だけ減らす，または用いる観測データを変えた後，**条件 1** を考え直せばよい．**条件 3** を満たさない場合はパラメータ分布の区域化を再考するか，観測点を新たに設ける策を講じるか，その区域以外のパラメータ同定を全て高精度で求めればよい．ところで後述の同定実験では，事前情報を利用し，かつ，観測データの質を考慮して同定に反映させられる拡張 *Kalman* フィルタ有限要素法[1), 2)]を採用することにした．

$$k^*(\boldsymbol{x}) = \hat{k}_0 + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{C}^{-1} \widehat{\boldsymbol{w}} \tag{1}$$

ただし，

$$\hat{k}_0 = \frac{\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha}} \tag{2}$$

$$\widehat{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\alpha} \frac{\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha}} \tag{3}$$

ここに，$\hat{k}_0$：トレンド定数(ドリフト)，$\widehat{\boldsymbol{w}}$：観測点でのランダム成分ベクトル，$\boldsymbol{\alpha}$：成分が全て1の定数ベクトル，$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$：求める推定点 $\boldsymbol{x}$ と各観測点間の共分散ベクトル，$\boldsymbol{C}$：各観測点間の $w(\boldsymbol{x})$ の共分散行列．

$$C(d) = \begin{cases} \sigma^2 \left\{ 1 - 1.5\left(\dfrac{d}{a}\right) + 0.5\left(\dfrac{d}{a}\right)^3 \right\} & (0 \leq d \leq a) \quad \text{(4a)} \\ 0 & (d > a) \quad \text{(4b)} \end{cases}$$

3. 分布モデルの導入

条件 3 に対処するため，透水係数分布そのもの，ないしは，その常用対数値の分布が空間的に連続分布していると仮定し，ここではその分布モデルとして ordinary block kriging(OBK) による地盤統計モデルを当てはめる．利点とは透水係数の空間不均一性をひとまとめで扱うことで，未知数が同一透水係数の区域数 (＝要素数) から OBK のパラメータ数まで減少し，観測数の方が未知数を逆に上回り，**条件 1**,**3** を同時に満たせる点である．OBK による推定式は式 (1)～(3) と書ける．そこでの共分散関数は式 (4) で与えた．なお，常用対数透水係数の分布を推定する場合は式 (1) 左辺を $\log k^*(\boldsymbol{x})$ とおけばよい．

4. 数値実験

ここで提案した分布モデルに対しての同定精度について検討すべく図1のような仮想の不圧帯水層を対象とした数値実験を行った．この帯水層の不透水基盤面は，流れ断面が谷状になっており，流下方向に一定傾斜している．図中の○印は水位観測位置 (9 点)，●印は水位境界 (5 点)，□印は揚水位置 (3 点) である．また図の左端 (地下水集水域) と上方 (地表面) から地下水涵養があるものと設定した．透水係数の観測は，Z_1, Z_7, Z_{16}, Z_{18} にて，そこでの一要素以上に大きくならない影響圏での原位置試験ないしは室内要素試験で観測値が得られたと考える．この同定を行ったところ，σ^2=20.0($\mathrm{m}^2/\mathrm{day}^2$), a=1000.0(m), $\hat{k}_0$= 243.7905(m/day) が得られた．それを地盤統計学の OBK で推定した結果，真の分布と全く同じ図2が得られた．不均一な透水係数分布に空間相関性がある場合，本手法のようにその分布を地盤統計学的にモデル化してやれば同定できるようになると言える．

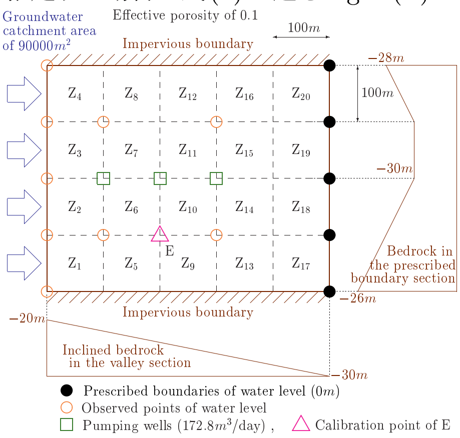

図 1: 仮想帯水層

Case 3	215.3322 (Z_4)	255.5558 (Z_8)	321.1791 (Z_{12})	400.0000 (Z_{16})	383.3276 (Z_{20})
	173.9983 (Z_3)	200.0000 (Z_7)	272.5400 (Z_{11})	329.4123 (Z_{15})	346.6049 (Z_{19})
	136.6654 (Z_2)	171.4817 (Z_6)	226.1393 (Z_{10})	273.9904 (Z_{14})	300.0000 (Z_{18})
	100.0000 (Z_1)	146.4934 (Z_5)	194.3980 (Z_9)	235.9593 (Z_{13})	265.2360 (Z_{17})

Unit: m/day

図 2: 透水係数分布の同定結果

5. 結論

以上より，本手法は非適切条件を大幅に改善して高精度の一意解が得られることから．パラメータ分布の非適切問題を克服するには非常に有効な手段であると言える．

参考文献

1) 例えば，長谷川高士, 村上　章, 浜口俊雄：拡張 Kalman フィルタによる地下水モデルのパラメータ同定と地下水位変動量評価による揚水量決定, 土木学会論文集, No.505/ III –29, 1994.

2) 浜口俊雄, 村上　章, 長谷川高士：平面解析で移動境界を考慮した地下水モデルと逆解析への応用, 土木学会論文集, No.568/ III –39, pp.133–145, 1997.