高精度非静力学大気モデルの開発（１）：方程式系

○里村雄彦・秋庭清香

1. はじめに

精密科学を指向する 21 世紀の気象学にとって，高精度の大気モデルは必要不可欠の道具である。特に，対象現象のスケールに制限のない完全圧縮流体力学方程式に基づく非静力学モデルの構築への要請は高く，既に幾つかの試みが発表されている（例えば，WRF model，Satoh 2002）。ここでは我々の研究室で行っている高精度圧縮性大気モデルの開発状況について，流体力学方程式系のいくつかの表現形式の差分化を行ったときの精度について発表する。

2. 方程式系

ここでは以下のような２次元完全圧縮流体力学方程式の表現形式について検討する。ただし，$U = \rho u, W = \rho w, \Theta' = (\rho\theta)'$ とする。

(a) 移流形式（Tapp and White 1977; Carpenter 1979: Satomura 1989）

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} + c_p\theta\frac{\partial \pi'}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} + c_p\theta\frac{\partial \pi'}{\partial z} = -g\frac{\theta'}{\Theta} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + u\frac{\partial \theta'}{\partial x} + w\frac{\partial \theta'}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi'}{\partial t} + u\frac{\partial \pi'}{\partial x} + w\frac{\partial \rho pi'}{\partial z} - \frac{gw}{c_p\theta}\\ = \frac{R\pi}{c_v\theta}\frac{d\theta'}{dt} - \frac{R\pi}{c_v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

(b) 完全フラックス形式（WRF）

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial uU}{\partial x} + \frac{\partial wU}{\partial z} + \gamma R\pi\frac{\partial \Theta'}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial uW}{\partial x} + \frac{\partial wW}{\partial z} + \gamma R\pi\frac{\partial \Theta'}{\partial z}\\ = -g\left(\bar\rho\frac{\pi'}{\bar\pi} - \rho'\right)\end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \Theta'}{\partial t} + \frac{\partial U\Theta'}{\partial x} + \frac{\partial W\Theta'}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

(c) 準フラックス形式１（MRI/JMA-NHM）

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial uU}{\partial x} + \frac{\partial wU}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial uW}{\partial x} + \frac{\partial wW}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} = -g\rho' \tag{10}$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \theta' U}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \theta W}{\partial z} = \frac{\theta}{\rho}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{c_pR\theta}{c_v}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/c_p}\\ \times\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\rho}{\theta}\frac{\partial \theta'}{\partial t}\right) = 0\end{aligned} \tag{12}$$

(d) 準フラックス形式２

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial uU}{\partial x} + \frac{\partial wU}{\partial z} + c_p\rho\theta\frac{\partial \pi'}{\partial x} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial uW}{\partial x} + \frac{\partial wW}{\partial z} + c_p\rho\theta\frac{\partial \pi'}{\partial z} = -g\rho\frac{\theta'}{\Theta} \tag{14}$$

$$\frac{\partial \pi'}{\partial t} + u\frac{\partial \pi'}{\partial x} + w\frac{\partial \pi}{\partial z} = \frac{R\pi}{c_v\theta}\frac{d\theta'}{dt} - \frac{R\pi}{c_v}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{15}$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + u\frac{\partial \theta'}{\partial x} + w\frac{\partial \theta'}{\partial z} = 0 \tag{16}$$

(e) 準フラックス形式３（秋庭 2002）

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial uU}{\partial x} + \frac{\partial wU}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial uW}{\partial x} + \frac{\partial wW}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} = -g\rho' \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{c_pR}{c_vp_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/c_p}\\ \times\left(\frac{\partial U\theta'}{\partial x} + \frac{\partial W\theta}{\partial z}\right) = 0\end{aligned} \tag{19}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{20}$$

これらの方程式系を時間・空間について単純な中央差分で離散化し，計算の安定性，質量保存の状態，時間分割法導入の容易さなどについて比較した。その結果，保存性に付いては当然移流形式は良くないが，(b) の完全フラックス形式および (c) の準フラックス形式１は静水圧平衡を満たすことがこの差分化では困難であることが分かった。また，(d) と (e) の保存性を比べると，非フラックス部分の少ない (e) の方が保存性が良いことも分かった。