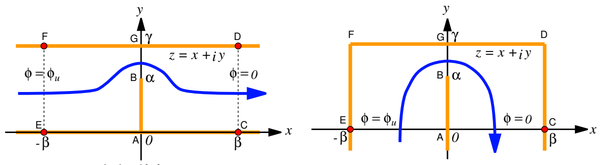
地下ダム湖満水時の地下水の堤体迂回流ならびに越流に関する数学的考察

○浜口俊雄

1. 目的

地下ダムには止水壁，余水吐，取水施設，放流施設，涵養施設，管理施設がある．満水時には止水壁(堤体)天端を越流して下流へ自然放流されるが，洪水時の強化策として，余水吐から余剰水を排水するか，ダム軸端部に自然余水吐となる開口部を設け，堤体迂回流で余剰水を排水させる．本研究では満水時の迂回流量Qを対象とし，それを二次元解析で活用する，あるいは地下ダム建造前にQだけを簡便的に得るための評価式を提案する．

2. 等角写像のための境界条件



(a) 状況1　(b) 状況2

図 1: 堤体迂回流の物理面

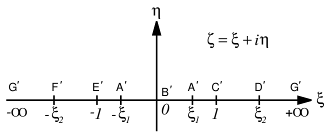
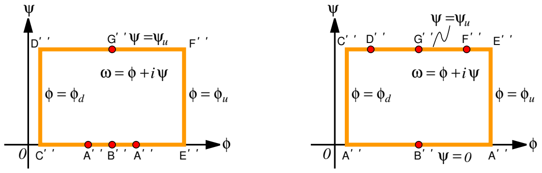


図 2: 媒介複素平面



(a) 状況1　(b) 状況2

図 3: 複素速度ポテンシャル面

等角写像による流れ場の数学的解法は以前から様々行われてきた[1]．これは流れ場(物理面)を複素平面場と見立て，Schwarz-Christoffel変換(SC変換)を適用して物理面から複素速度ポテンシャル面に写像することで，場の理論解を得る手法である．本研究では，ダム軸を中心とした部分領域内の平面不圧地下水に応用[2]し，定常計算を非定常計算への布石とする．地下ダム堤体迂回流は**状況1**: 満水時[3]，**状況2**: 満水に向かう水位上昇時[4]，といったプロセスで発生することが考えられる．

まず状況1では，地下ダム湖面ではダム軸にほぼ平行な比較的間隔の広い等水位線分布となり，越流が発生した際にもさほど大きな越流深とはならない[3]．また堤体下流側の流動も上流からの流入が比較的少ないため，上流側と同様の特徴をもつ等水位線分布となる．状況1の解析領域は，図1(a)の様に下流端CDを水位境界($\phi=\phi_d$)とし，ダム軸が中央に来るような位置に上流水位境界EFを設け，その他は地下分水界とした部分領域を考える．このときのEFでは上流の等水位線がダム軸に平行と考え，その水位境界には$\phi=\phi_u$を与える．

次に状況2では，地下ダム湖面のほとんどは天端よりも低いが，ダム軸端部の開口部周辺の流動だけが堤体に沿って開口部にせり出したかたちで迂回して流れる[4]．その堤体直上・直下の流動は，上流からの下流への流入が迂回流に限られるため，ダム軸に垂直な比較的間隔の狭い等水位線分布となる．また越流現象が生じたとしても堤体端部で発生するため，迂回流の一部と見なしてやればよい．ここでの解析領域は，迂回流のある堤体近傍という部分領域であり，図1(b)の様に考える．上述の説明を踏まえると，そのせり出し域の開始位置EAでの水位境界には$\phi=\phi_u$を，同域の終了位置ACでの水位境界には$\phi=\phi_d$を各々与えればよい．その他の領域端は全て地下水面に流入出のない境界として扱う．

3. 等角写像による理論解

両状況とも，図2の様な媒介複素平面を介して，SC変換により物理面から複素速度ポテンシャル面(図3)に写像する．物理面から媒介変数面への写像の理論解は共通に式(1)で表せる．なおξ_1,ξ_2(またはμ)に関しては式(2)の非線形連立方程式から求まる．

$$z=\frac{\gamma}{K(\mu)}F\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{\zeta^2-{\xi_1}^2}{1-{\xi_1}^2}},\ \mu'\right) \tag{1}$$

ここに，$K(\mu)$: 第一種完全楕円積分，$F(\nu,\mu)$: 第一種楕円積分，ν: 振幅，μ: 母数，$\mu'(=\sqrt{1-\mu^2}=\sqrt{({\xi_2}^2-1)/({\xi_2}^2-{\xi_1}^2)})$: μの補母数

$$\frac{K(\mu)}{K(\mu')}=\frac{\gamma}{\beta},\quad p=\mathrm{sn}\left(\frac{\alpha}{\gamma}K(\mu),\ \mu\right) \tag{2}$$

ここに，$\mathrm{sn}(\nu,\mu)$: Jacobiの楕円関数

$$\omega=\frac{\phi_u+\phi_d}{2}-\frac{\phi_u-\phi_d}{2K(1/\xi_2)}F\left(\sin^{-1}\zeta,\ \frac{1}{\xi_2}\right) \tag{3}$$

$$\omega=\frac{\phi_u+\phi_d}{2}-\frac{\phi_u-\phi_d}{2K(\xi_1)}F\left(\sin^{-1}\frac{\zeta}{\xi_1},\ \xi_1\right) \tag{4}$$

$$\phi_d=kh_d,\quad \phi_u=k(h_d+\Delta h) \tag{5}$$

$$\psi_u=\frac{\phi_u-\phi_d}{2}\frac{K(1/{\xi_2}')}{K(1/\xi_2)}=\frac{k\Delta h}{2}\frac{K(1/{\xi_2}')}{K(1/\xi_2)} \tag{6}$$

ここに，$1/{\xi_2}'(=\sqrt{1-1/{\xi_2}^2})$: $1/\xi_2$の補母数，k: 透水係数，h_d: 下流端の境界水位，Δh: 境界水位差

$$\psi_u=\frac{\phi_u-\phi_d}{2}\frac{K({\xi_1}')}{K(\xi_1)}=\frac{k\Delta h}{2}\frac{K({\xi_1}')}{K(\xi_1)} \tag{7}$$

ここに，${\xi_1}'(=\sqrt{1-{\xi_1}^2})$: ξ_1の補母数

$$\bar{d}=\frac{d_u+d_d}{4}+\frac{d_g}{2} \tag{8}$$

$$Q=\psi_u\bar{d} \tag{9}$$

複素速度ポテンシャル面から媒介複素平面への同様の写像の理論解は状況1,2の順に式(3)(4)で書ける．また地下水に対する速度ポテンシャルは式(5)，ψ_uは状況1,2の順に式(6)(7)で表せる．

ところで，帯水層単位厚における流量は，考察断面を通る流関数$\psi(x,y)$値の差で求まる．本稿の帯水層単位厚あたりの迂回流量qは流関数の設定からψ_uに等しい．地下ダムは基盤層の谷あいに建造されるので，いま帯水層厚には近似的に平均を用いる．E,C,G各点での水深をそれぞれd_u,d_d,d_gとすると式(8)の様に書ける．このとき流量Qは両状況とも式(9)で与えられる．

4. 結論

堤体迂回流の理論解を求めることで様々な考察が式展開としてでき，計算負荷の大きい三次元計算を回避して二次元計算で解析するといった応用にも使える．実用化に向けては，ダム軸断面がV字型であるので，堤幅αと流域幅γが鉛直方向に変化するため同方向に積分した流量の評価をしていく必要がある．現在，三次元解析の結果と本理論解を照合している．結果は追って報告する．

参考文献

1) 例えば，Theory of Ground Water Movement:Polubarinova-Kochina, Princeton Univ. Press, 1962.　2) ダム取り付け部地山のう回浸透流に関する研究：木村勝行・大根義男，土木学会論文集，第336号，pp.95–103, 1983.　3) 地下ダムサイトを対象とした地下水流動の２・３次元複合モデルの開発：穴田夏野・岡　太郎・浜口俊雄，平成14年度土木学会関西支部年次学術講演概要，pp.II–28，2002.　4) 地下ダムサイトの３次元地下水流動解析：瀧　敏之・岡　太郎・浜口俊雄，平成14年度土木学会関西支部年次学術講演概要，pp.II–27，2002.