

## ひずみ空間多重せん断モデルによる粘土地盤の圧密解析

井合 進

### 要 旨

砂の力学モデルとしてのひずみ空間多重せん断モデルは、これまで、地盤の液状化を含む地震時の地盤構造物系の解析や被害程度予測に広く用いられてきている。これに対して、本研究では、粘土地盤の圧密解析を対象として、同モデルの適用性を検討した。地盤材料の構成モデルにおいては、砂と粘土の力学挙動における基本的な相違は、体積弾性係数の拘束圧依存性の指数、および、限界状態（砂の場合のSteady State）の定式化、の 2 点である。本研究では、これらの点を考慮した上で、同モデルにより粘土地盤の圧密解析を行い、その基本的な適用性を確認した。

**キーワード:** 圧密解析, 構成式, 多重せん断モデル, 砂, 粘土

### 1. はじめに

ひずみ空間多重せん断モデル (Iai et al, 2011) は、地震時の液状化を含む地盤・構造物系の動的解析に広く利用されている。本研究では、このモデルの粘土地盤の圧密解析への適用性について、検討することとした。

ひずみ空間多重せん断モデルの構成式の観点から砂と粘土との相違点を眺めると、両者間で本質的な相違は皆無であり、指定するモデルパラメタが相互に異なるだけである。具体的には、接線剛性の拘束圧依存性を規定する指数を、砂の場合には0.5、粘土の場合には1.0とすること、および、限界状態（砂の場合のSteady state）の指定方法が異なること、の 2 点が、主な相違点となる。また、砂の液状化解析をより高精度で行うために指定するパラメタ類は、ほぼ、ゼロまたは 1 という基本値（デフォルト値）にクリアすることで、粘土地盤の圧密に関する基本的な解析が可能となる。

以下においては、これらの点を反映した具体的な定式化を行うとともに、同モデルにより粘土地盤の圧密解析を行い、その適用性について検討する。

### 2. 積分形の構成式（基本形）

ひずみ空間多重せん断モデルでは、2次元解析の場合、応力、ひずみベクトルを以下で与える。

$$\hat{\sigma}^T = \{\sigma_x', \sigma_y', \tau_{xy}\} \quad (1)$$

$$\hat{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\} \quad (2)$$

多重せん断モデルの積分形の基本形を、以下で与える。

$$\hat{\sigma}' = -p\hat{n}^{(0)} + \sum_{i=1}^I q^{(i)}\hat{n}^{(i)}\Delta\omega \quad (3)$$

ここに、

$$\hat{n}^{(0)T} = \{1 \ 1 \ 0\} \quad (4)$$

$$\hat{n}^{(i)T} = \{\cos \omega_i, -\cos \omega_i, \sin \omega_i\} \quad (\text{for } i = 1, \dots, I) \quad (5)$$

$$\omega_i = (i-1)\Delta\omega \quad (6)$$

$$\Delta\omega = \pi / I \quad (7)$$

式(3)の等方成分  $p$  および仮想単純せん断応力  $q^{(i)}$  は、有効体積ひずみ  $\varepsilon'$  および仮想単純せん断ひずみ  $\gamma^{(i)}$  の関数として、以下で与える。

$$p = p(\varepsilon') \quad (8)$$

$$q^{(i)} = q^{(i)}(\gamma^{(i)}, \varepsilon', \varepsilon'') \quad (9)$$

なお、式(9)において、仮想単純せん断ひずみ  $\gamma^{(i)}$  のみの関数とせず、有効体積ひずみ  $\varepsilon'$ 、仮想有効体積

ひずみ  $\varepsilon''$  を含む関数としている理由は、「4. 積分形の構成式 (粘性土解析)」で記述するとおり、仮想単純せん断機構の拘束圧力依存性および液状化状態依存性を考慮するためである。

さて、式(8)(9)における有効体積ひずみ  $\varepsilon'$  は、体積ひずみからダイレイタンシーによる体積ひずみ成分を除去したものであり、以下で与える。

$$\varepsilon' = \hat{\mathbf{n}}^{(0)T} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \hat{\mathbf{n}}^{(0)T} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_d) \quad (10)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_d = \frac{\varepsilon_d}{2} \hat{\mathbf{n}}^{(0)} \quad (11)$$

式(11)におけるダイレイタンシー成分は、以下のように収縮的成分  $\varepsilon_d^c$  および膨張的成分  $\varepsilon_d^d$  よりなる。

$$\varepsilon_d = \varepsilon_d^c + \varepsilon_d^d \quad (12)$$

すなわち、

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_d = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^c + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^d \quad (13)$$

ここに、

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^c = \frac{\varepsilon_d^c}{2} \hat{\mathbf{n}}^{(0)} \quad (14)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^d = \frac{\varepsilon_d^d}{2} \hat{\mathbf{n}}^{(0)} \quad (15)$$

また、収縮的ダイレイタンシー増分の液状化状態依存性を表現するため、仮想有効体積ひずみ  $\varepsilon''$  を導入する。これは、有効体積ひずみから膨張的ダイレイタンシー成分を除去したもので、ひずみ空間多重せん断モデル (Iai and Ozutsumi, 2005) の液状化フロントパラメタ  $S_0$  に対応する有効体積ひずみであり、以下で与える。

$$\varepsilon'' = \hat{\mathbf{n}}^{(0)T} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = \hat{\mathbf{n}}^{(0)T} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^c) \quad (16)$$

仮想単純せん断ひずみ  $\gamma^{(i)}$  は、以下で与える。

$$\gamma^{(i)} = \hat{\mathbf{n}}^{(i)T} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_d) = \hat{\mathbf{n}}^{(i)T} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (17)$$

ダイレイタンシー成分の増分は、ひずみ増分の線形変換で与えられるものと仮定し、これを以下のとおり書く。

$$d\varepsilon_d = \hat{\mathbf{n}}_d^T d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (18)$$

$$d\varepsilon_d^c = \hat{\mathbf{n}}_d^{cT} d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (19)$$

$$d\varepsilon_d^d = \hat{\mathbf{n}}_d^{dT} d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (20)$$

よって、式(12)より、

$$\hat{\mathbf{n}}_d = \hat{\mathbf{n}}_d^c + \hat{\mathbf{n}}_d^d \quad (21)$$

### 3. 増分形 (基本形)

増分形の構成式は、式(3)の両辺の微分をとれば、以下で与えられる。

$$d\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = -dp\hat{\mathbf{n}}^{(0)} + \sum_{i=1}^I dq^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \Delta\omega \quad (22)$$

$$dp = \frac{dp}{d\varepsilon'} d\varepsilon' \quad (23)$$

$$dq^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}} d\gamma^{(i)} + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon'} d\varepsilon' + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon''} d\varepsilon'' \quad (24)$$

式(23)(24)に、式(10)(16)(17)を代入すると、

$$dp = \frac{dp}{d\varepsilon'} \hat{\mathbf{n}}^{(0)T} d(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_d) \quad (25)$$

$$dq^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}} \hat{\mathbf{n}}^{(i)T} d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon'} \hat{\mathbf{n}}^{(0)T} d(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_d) + \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon''} \hat{\mathbf{n}}^{(0)T} d(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^c) \quad (26)$$

式(25)(26)および式(18)~(20)を式(22)に代入すれば、増分形の構成式が以下のとおり与えられる。

$$d\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{D} d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & K_{LU} \hat{\mathbf{n}}^{(0)} \hat{\mathbf{n}}^{(0)T} + \sum_{i=1}^I G_{LU}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)T} \Delta\omega \\ & - K_{LU} \hat{\mathbf{n}}^{(0)} \hat{\mathbf{n}}_d^T + \sum_{i=1}^I (H^{(i)} + L^{(i)}) \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(0)T} \Delta\omega \\ & - \sum_{i=1}^I (H^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}_d^T + L^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \hat{\mathbf{n}}_d^{cT}) \Delta\omega \end{aligned} \quad (28)$$

ここに、

$$K_{LU} = -\frac{dp}{d\varepsilon'} \quad (29)$$

$$G_{LU}^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}} \quad (30)$$

$$H^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon'} \quad (31)$$

$$L^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon''} \quad (32)$$

式(28)の右辺の第1項、第2項は、それぞれ圧縮伸張およびせん断に関する増分形を表し、対称マトリクスである。第3項は圧縮伸張へのダイレイタンシーの影響、第4項はせん断機構の拘束圧依存性および液状化状態依存性、第5項はせん断機構に与えるダイレイタンシーの影響を表すものである。これら第3~5項は、いずれも圧縮伸張の機構とせん断に

関する機構のカップリングの3種類の機構を示すもので、非対称マトリクスとなる。

#### 4. 積分形の構成式（粘性土系）

##### 4.1 状態変数の定義

(1) 正規圧密の場合

まず、初期応力ベクトル（解析立上げ時）の方向と横軸（ $(\sigma_x' - \sigma_y')/2p$  方向）のなす角度を以下で定義する。

$$\cos \omega_0 = \left( \frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p} \right)_0 / \eta_0 \quad (33)$$

$$\sin \omega_0 = \left( \frac{\tau_{xy}}{p} \right)_0 / \eta_0 \quad (34)$$

ここに、

$$\eta_0 = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p} \right)_0^2 + \left( \frac{\tau_{xy}}{p} \right)_0^2} \quad (35)$$

次に、現在の応力ベクトルの方向（初期応力点 A を起点とする相対的な応力ベクトルの方向）を以下で求める。

$$\cos \omega^* = \left[ \left( \frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p} \right) - \left( \frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p} \right)_0 \right] / \eta^* \quad (36)$$

$$\sin \omega^* = \left[ \left( \frac{\tau_{xy}}{p} \right) - \left( \frac{\tau_{xy}}{p} \right)_0 \right] / \eta^* \quad (37)$$

ここに、

$$\eta^* = \sqrt{\left[ \left( \frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p} \right) - \left( \frac{\sigma_x' - \sigma_y'}{2p} \right)_0 \right]^2 + \left[ \left( \frac{\tau_{xy}}{p} \right) - \left( \frac{\tau_{xy}}{p} \right)_0 \right]^2} \quad (38)$$

これを用いて、初期応力ベクトルの方向（式(33)(34)）との相対的な角度（Fig.1）を以下で求める。

$$\omega^{*'} = \omega^* - \omega_0 \quad (39)$$

これを、限界状態における応力ベクトルの方向の当面の予測値とし、以下により、限界状態でのベクトルの方向（原点を起点とする初期応力ベクトルの方向に対する相対的な方向）の予測値を求める。

$$M \cos \omega' = \eta_0 + \eta_{us}^* \cos \omega^{*'} \quad (40)$$

$$M \sin \omega' = \eta_{us}^* \sin \omega^{*'} \quad (41)$$

ここに、2次元解析においては、

$$M = \sin \phi_f \quad (42)$$

これを用いて、限界状態（B 点）での  $\eta_{us}^*$  の予測値

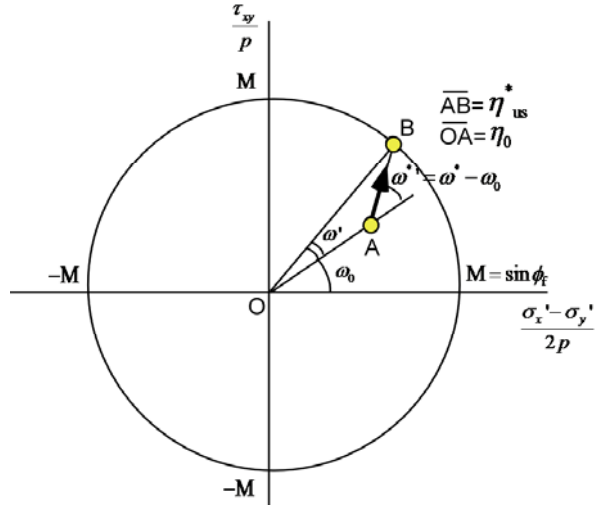


Fig.1 Initial stress vector and the stress vector expected at the steady state

を以下で与える。

$$M^2 = \left[ \eta_0 + \eta_{us}^* \cos \omega^{*'} \right]^2 + \left( \eta_{us}^* \sin \omega^{*'} \right)^2 \quad (43)$$

これを  $\eta_{us}^*$  について解いて、

$$\eta_{us}^* (\omega^{*'}) = -\eta_0 \cos \omega^{*'} + \sqrt{\left( \eta_0 \cos \omega^{*'} \right)^2 + M^2 - \eta_0^2} \quad (44)$$

これを用いて、粘性土のせん断応力比の状態変数として、以下を定義する。

$$S_\eta = \max \left[ \left( \frac{\eta^*}{\eta_{us}^*} \right)^{\eta_e} \right] \quad (45)$$

$$S_\eta^* = S_\eta \left( \frac{\eta_{us}^*}{M} \right)^{\eta_e} \quad (46)$$

これらの状態変数は、式(45)における max の導入により、塑性的（非可逆的）な状態を記述するもので、代表的な状態は、以下のとおりである。

$S_\eta = 0$  : 初期状態

$S_\eta = 1$  : 終局状態

$0 < S_\eta < 1$  : 途中

また、式(46)の  $(\eta_{us}^*/M)^{\eta_e}$  の項により、初期の誘導異方性が保持される（Fig.2）。

以上のとおり，正規圧密においては，状態変数として，有効圧力  $p$ ，せん断応力比系の状態変数  $S_\eta$  および  $S_\eta^*$  の3つの状態変数によりモデルの状態を表現する。

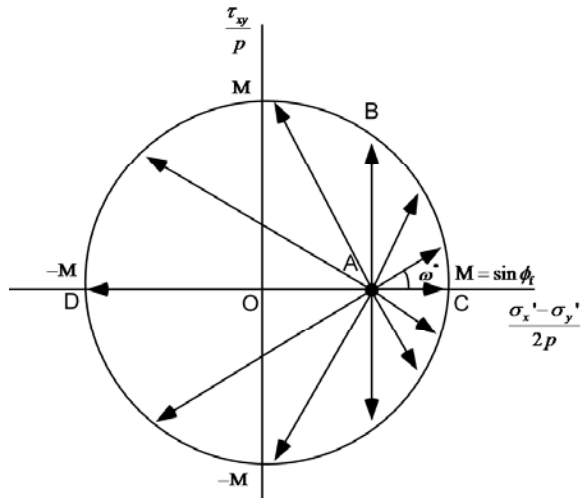


Fig.2 Initial anisotropic stress state (A) and the stress point expected at the steady state (B)

## (2)過圧密の場合

過圧密の場合には，Hvorslev 角を  $\phi_e$  として，せん断強度を，以下で与える (Fig.3)。

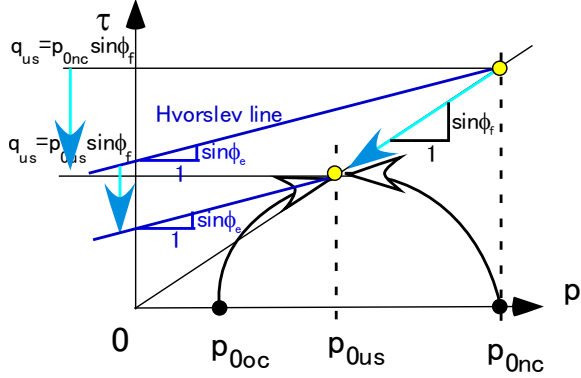


Fig.3 Limit state for overconsolidated condition

$p \leq p_{us}$  の時

$$\tau_m = p_{us} \sin \phi_f - (p_{us} - p) \sin \phi_e^* \quad (47)$$

ここに，

$$\sin \phi_e^* = (1 - S_\eta) \sin \phi_f + S_\eta \sin \phi_e \quad (48)$$

$p > p_{us}$  の時

$$\tau_m = p \sin \phi_f \quad (49)$$

これに伴い，式(45)(46)でのせん断応力比  $\eta^*$  の定義を，式(38)に代えて，以下のとおり一般化する。

$$\eta^* = \sqrt{\left( \left( \frac{\sigma'_x - \sigma'_y}{2\tau_m} \right) - \left( \frac{\sigma'_x - \sigma'_y}{2\tau_m} \right)_0 \right)^2 + \left( \left( \frac{\tau_{xy}}{\tau_m} \right) - \left( \frac{\tau_{xy}}{\tau_m} \right)_0 \right)^2} M \quad (50)$$

これを用いて，式(44)により，終局状態での  $\eta_{us}^*$  などを求める。

なお，正規圧密でのせん断強度は，式(49)で与えられるので，式(50)は，正規圧密におけるせん断応力比の定義式(38)に還元されることとなり，正規圧密，過圧密の両状態において，式(50)を共通して，せん断応力比の定義式として用いることができる。

過圧密におけるせん断応力比系の状態変数は，正規圧密の場合と同じく，式(45)(46)で定義する。また，過圧密においては，せん断応力比系の状態変数に加えて，過圧密比系（有効圧力比系）の状態変数を，以下のように導入しておく。

$$S = p / p_0 \quad (51)$$

$$S_0 = \min(p'' / p_0) \quad (52)$$

ただし， $S, S_0$  の下限値を  $S_1$ （小さな正の値）とする。

ここに， $p_0$  は解析立上げ時の圧力， $p''$  は仮想有効圧力で，仮想有効体積ひずみ  $\varepsilon''$ （式(16)）の関数として，「4.3 圧縮伸張成分  $p$  の定式化」に準じて，以下のとおり与える。まず，体積弾性係数の低減パラメータ  $r_k$  に準じて，新たなパラメータ  $r_k''$  を導入して，体積ひずみに関する仮想基準ひずみ  $\varepsilon_{m0}''$  を以下のとおり定義する。

$$\varepsilon_{m0}'' = p_0 / (r_k'' K_{U0}) \quad (53)$$

これを用いて，

a)  $l_k > 1$  の場合

$$\varepsilon^* = -(1 - l_k)(\varepsilon'' - \varepsilon_0'') / \varepsilon_{m0}'' \quad (54)$$

$$p'' = p_0 (\varepsilon^* + 1)^{\frac{1}{1-l_k}} \quad (55)$$

b)  $l_k = 1$  の場合：

$$\varepsilon^* = -(\varepsilon'' - \varepsilon_0'') / \varepsilon_{m0}'' \quad (56)$$

$$p'' = p_0 \exp(\varepsilon^*) \quad (57)$$

式(51)(52)の状態変数は，カクテルグラスモデルでは，

それぞれ、状態変数  $S$ 、液状化フロントパラメタ  $S_0$  と呼ばれていたものに相当する。式(52)における  $\min$  の導入により、液状化フロントパラメタ  $S_0$  は、塑性的（非可逆的）な状態を記述する。

これらの状態変数に加え、液状化フロントパラメタに類似の以下の状態変数を導入しておく。

$$S_0^* = p^*/p_0 \quad (58)$$

ただし、 $S_0^* \geq S_1$  とする。

このパラメタは、過剰間隙水圧消散に伴う状態の復帰の程度（再液状化現象などを含む）など可逆性がある液状化の状態を表現するものである。

以上のとおり、過圧密においては、状態変数として、過圧密比系状態変数  $S$ 、 $S_0$ 、 $S_0^*$  および、せん断応力比系の状態変数  $S_\eta$ 、 $S_\eta^*$  の合計5つの状態変数によりモデルの状態を表現する。

なお、後述のとおり、解析途中において、正規圧密から過圧密にはじめて反転する場合には、式(50)～(58)類において、初期値  $p_0$ 、 $\varepsilon_0'$ 、 $\varepsilon_0''$  類を、反転した時点での値  $p_r$ 、 $\varepsilon_r'$ 、 $\varepsilon_r''$  に更新し、それ以降の（過圧密領域での）解析を続ける。

なお、状態変数  $S_\eta$ 、 $S_\eta^*$  類による定式化は、Sekiguchi, Ohta (1977) および Ohta et al (2011) によるモデルに準じて、これを、ひずみ空間多重せん断モデルに適した変数類へと一般化したものに相当する。

## 4.2 限界状態の定式化

### (1) 限界状態線の定義

粘性土の限界状態は、Fig.4 に破線で示すとおりモデル化する。この限界状態線の勾配（上段の図） $\lambda^*$  を、せん断応力比系の状態変数  $S_\eta$  に応じて、以下のとおり与える。

$$\lambda^* = (1 - r_\lambda) \kappa + r_\lambda \lambda \quad (59)$$

ここに、

$$r_\lambda = S_\eta^{q_6} \quad (60)$$

$q_6 > 0$  であれば、限界状態線の勾配は、せん断応力比系の状態変数に応じて、以下のとおり変化していく。

$$S_\eta = 0 : \text{初期状態} : \lambda^* = \kappa$$

$$S_\eta = 1 : \text{終局状態} : \lambda^* = \lambda$$

$$0 < S_\eta < 1 : \text{途中} : \kappa < \lambda^* < \lambda$$

なお、「4.3 圧縮伸張成分の定式化」で述べるとおり、過圧密曲線の勾配も、限界状態線の勾配と同じとする。

デフォルト  $q_6 = 0$  では、過圧密点からの解析における  $e$ - $\ln p$  曲線は、常に  $\lambda$  の傾きを持つようになる。この場合には、過圧密点を求めるための事前の過圧密解析においては、その際の  $e$ - $\ln p$  曲線の傾きが通常の  $\kappa$  となるようにする。

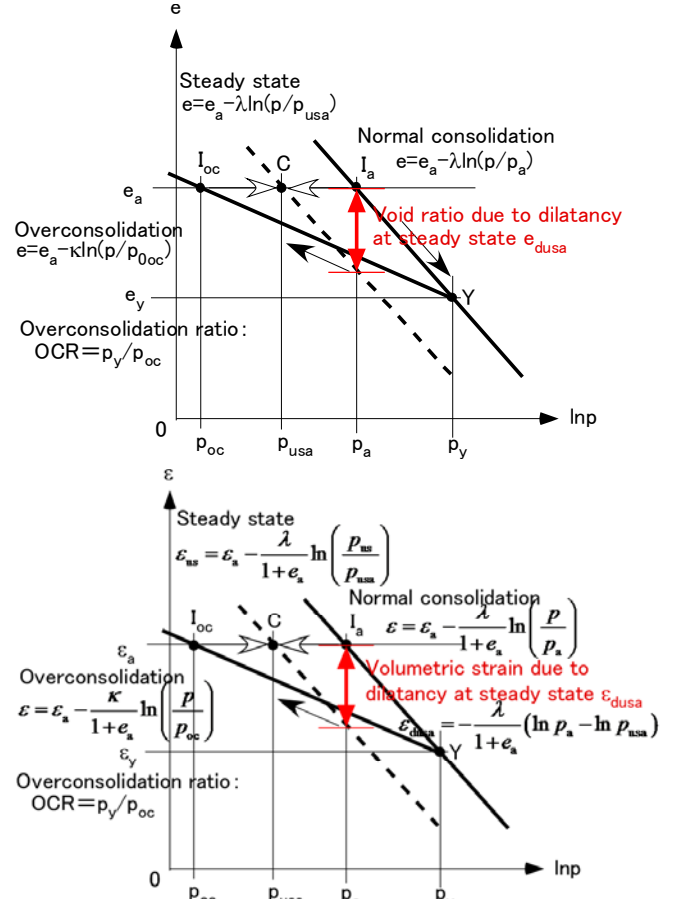


Fig.4 Steady state line ( $e$ - $\ln p$  relationship) (upper figure),  $\varepsilon$ - $\ln p$  relationship (lower figure)

なお、正規圧密からの繰返しせん断の解析では、デフォルト  $q_6 = 0$  を用い、正規圧密から過圧密領域へ連続して引継ぐダイレイタンスーに対応する平均有効応力の連続性を確保する。

さて、この勾配に応じて、基準とする間隙比  $e_{usa}$  における限界状態での基準有効圧力  $p_{usa}$  を以下で与える。

$$p_{usa} = p_a \exp\left(-r_{\varepsilon_{dus}} \frac{1}{n_E} \frac{\lambda^* - \kappa}{\lambda^*} S_\eta^*\right) \quad (61)$$

$$= p_a \exp\left(-r_{\varepsilon_{dus}} \frac{1 - r_{\kappa}^*}{n_E} S_\eta^*\right)$$

ここに、

$$r_K^* = \frac{\kappa}{\lambda^*} \quad (62)$$

これをもとに、間隙比  $e_{us}$  における限界状態での有効圧力を以下で与える。

$n_{K_{us}} \neq 1$  の場合

$$p_{us} = p_{usa} (\varepsilon^* + 1)^{\frac{1}{1-n_{K_{us}}}} \quad (63)$$

$$\varepsilon^* = -(1-n_{K_{us}}) \ln \left( \frac{1+e_{us}}{1+e_{usa}} \right) / \varepsilon_{mus} \quad (64)$$

また、 $n_{K_{us}} = 1$  の場合

$$p_{us} = p_{usa} \exp \varepsilon^* \quad (65)$$

$$\varepsilon^* = -\ln \left( \frac{1+e_{us}}{1+e_{usa}} \right) / \varepsilon_{mus} \quad (66)$$

ここに、

$$\varepsilon_{mus} = p_{usa} / K_{usa} \quad (67)$$

なお、式(64)(66)の間隙比は、以下のように、限界状態での体積ひずみに関連づけることができる。

$$\dot{\varepsilon}_{us} = \frac{\dot{e}_{us}}{1+e_{us}} \quad (68)$$

すなわち、

$$\varepsilon_{us} - \varepsilon_{usa} = \ln \left( \frac{1+e_{us}}{1+e_{usa}} \right) \quad (69)$$

## (2) 正規圧密、過圧密の判定基準

正規圧密、過圧密の判定を以下にて行う。

まず、式(63)(65)で与えられる正規圧密の状態曲面を、変数  $p, \eta^*$  により規定される空間での状態曲面であるとみなし、以下のとおり与える。

$n_{K_{us}} \neq 1$  の場合

$$\begin{aligned} f(p_c, \eta^*) \\ = \ln \left( \frac{p_c}{p_a} (\varepsilon^* + 1)^{\frac{1}{1-n_{K_{us}}}} \right) + \frac{r_{\varepsilon_{dus}}}{n_E} (1-r_K^*) \left( \frac{\eta^*}{M} \right)^{n_E} = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

ここに、 $\varepsilon^*$  は式(64)で与えられる。

また、 $n_{K_{us}} = 1$  の場合

$$\begin{aligned} f(p_c, \eta^*) &= \ln \left( \frac{p_c \exp(-\varepsilon^*)}{p_a} \right) + \frac{r_{\varepsilon_{dus}}}{n_E} (1-r_K^*) \left( \frac{\eta^*}{M} \right)^{n_E} \\ &= \ln \left( \frac{p_c}{p_a} \right) - \varepsilon^* + \frac{r_{\varepsilon_{dus}}}{n_E} (1-r_K^*) \left( \frac{\eta^*}{M} \right)^{n_E} = 0 \end{aligned} \quad (71)$$

ここに、 $\varepsilon^*$  は式(66)で与えられる。

式(71)の限界状態は、Sekiguchi-Ohta モデル(1977)における降伏曲面に他ならない。

この曲面の外側 ( $p_c$  が増加する側、すなわち正規圧密領域側) に向く垂直ベクトル  $\mathbf{n}_s$  は、これの微分 (ただし、間隙比の変化 (すなわち  $\varepsilon^*$  の変化) および  $r_K^*$  の変化の影響を無視) をとって、以下で与えられる。

$$\mathbf{n}_s = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_c} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_c} \\ \frac{r_{\varepsilon_{dus}}}{n_E} (1-r_K^*) \frac{1}{M} \left( \frac{\eta^*}{M} \right)^{n_E-1} \end{pmatrix} \quad (72)$$

また、状態変数ベクトル  $\mathbf{p}_s$  を以下であたえる。

$$\mathbf{p}_s = \begin{pmatrix} p \\ \eta^* \end{pmatrix} \quad (73)$$

以上を用いて、正規圧密上の状態曲面上の点  $p = p_c$  からの過圧密状態への移行などの判定を、以下で定義される  $df$  を用いて、 $df > 0$  なら正規圧密、 $df \leq 0$  なら過圧密とする。

$$df = \mathbf{n}_s d\mathbf{p}_s \quad (74)$$

なお、

$n_{K_{us}} \neq 1$  の場合

$$p_c = p_a (\varepsilon^* + 1)^{\frac{1}{1-n_{K_{us}}}} \exp \left[ -\frac{r_{\varepsilon_{dus}}}{n_E} (1-r_K^*) \left( \frac{\eta^*}{M} \right)^{n_E} \right] \quad (75)$$

ここに、 $\varepsilon^*$  は式(64)で与えられる。

また、 $n_{K_{us}} = 1$  の場合

$$p_c = p_a \exp(\varepsilon^*) \exp \left[ -\frac{r_{\varepsilon_{dus}}}{n_E} (1-r_K^*) \left( \frac{\eta^*}{M} \right)^{n_E} \right] \quad (76)$$

ここに、 $\varepsilon^*$  は式(66)で与えられる。

## 4.3 圧縮伸張成分 $p$ の定式化

### (1) 正規圧密の場合

自重解析後の正規圧密の場合の定式化を示す。

a)  $l_K > 1$  の場合 :

$$\varepsilon^{*'} = -(1-l_k)(\varepsilon' - \varepsilon_0') / \varepsilon_{Lm0} \quad (77)$$

(ただし,  $l_k > 1$ )。ここに,  $\varepsilon_{Lm0}$  は, 体積ひずみに関する規準ひずみ (規準体積ひずみ) であり, 正規圧密過程開始時 (初期) の圧力を  $p_0$ , 体積弾性係数  $K_{L0}$  により, 以下で与える。

$$\varepsilon_{Lm0} = p_0 / K_{L0} \quad (78)$$

これを用いて, 以下のとおり圧力  $p$  を与える。

$$p = p_0 (\varepsilon^{*'} + 1)^{\frac{1}{1-l_k}} \quad (79)$$

b)  $l_k = 1$  の場合 :

$$\varepsilon^{*'} = -(\varepsilon' - \varepsilon_0') / \varepsilon_{Lm0} \quad (80)$$

$$p = p_0 \exp(\varepsilon^{*'}) \quad (81)$$

(2) 過圧密の場合

a)  $l_k > 1$  の場合 :

$$\varepsilon^{*'} = -(1-l_k)(\varepsilon' - \varepsilon_0') / \varepsilon_{m0} \quad (82)$$

(ただし,  $l_k > 1$ )。ここに,  $\varepsilon_{m0}$  は, 体積ひずみに関する規準ひずみ (規準体積ひずみ) であり, 過圧密過程開始時の圧力を  $p_0$ , 体積弾性係数  $K_{U0}$  および低減パラメータ  $r_k^*$  により, 以下で与える。

$$\varepsilon_{m0} = p_0 / (r_k^* K_{U0}) \quad (83)$$

これを用いて, 以下のとおり圧力  $p$  を与える。

$$p = p_0 (\varepsilon^{*'} + 1)^{\frac{1}{1-l_k}} \quad (84)$$

b)  $l_k = 1$  の場合 :

$$\varepsilon^{*'} = -(\varepsilon' - \varepsilon_0') / \varepsilon_{m0} \quad (85)$$

$$p = p_0 \exp(\varepsilon^{*'}) \quad (86)$$

#### 4.4 せん断成分 $q^{(i)}$ の定式化

多重せん断モデルの定式化に基づき, 式(9)における仮想単純せん断モデルを, 骨格曲線上では, 以下のように双曲線型で与える。

$$q^{(i)} = \frac{\gamma^{(i)} / \gamma_v}{1 + \left| \gamma^{(i)} / \gamma_v \right|} q_v \quad (87)$$

ここに,  $q_v, \gamma_v$  は, 仮想単純せん断モデルのせん断強度, (せん断) 規準ひずみであり, せん断強度  $\tau_m$  およびせん断弾性係数  $G_m$  と, 以下のように関係づけら

れる。

$$G_m = \frac{q_v}{\gamma_v} \sum_{i=1}^I \sin^2 \omega_i \Delta \omega \quad (88)$$

$$\tau_m = q_v \sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega \quad (89)$$

逆に解けば,

$$\gamma_v = \left( \frac{\sum_{i=1}^I \sin^2 \omega_i \Delta \omega}{\sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega} \right) \frac{\tau_m}{G_m} = \left( \frac{\sum_{i=1}^I \sin^2 \omega_i \Delta \omega}{\sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega} \right) \gamma_m \quad (90)$$

$$q_v = \frac{\tau_m}{\sum_{i=1}^I \sin \omega_i \Delta \omega} \quad (91)$$

ここに,  $\gamma_m$  は, (せん断) 規準ひずみである。

なお,  $I \rightarrow \infty$  の時,

$$\gamma_v = \frac{\pi}{4} \gamma_m \quad (92)$$

$$q_v = \tau_m / 2 \quad (93)$$

仮想単純せん断機構が履歴ループに入った際には, 拡張 Masing 則を用いる。履歴ループに入った際の仮想せん断ひずみに応じて, 妥当な履歴減衰を表現するように定められるパラメータ  $\xi, \zeta$  を用いて, あらかじめ, 以下の正規化を行う。

$$\tilde{q}^{(i)} = \frac{q^{(i)} / q_v}{\zeta} \quad (94)$$

$$\tilde{\gamma}^{(i)} = \frac{\gamma^{(i)} / \gamma_v}{\xi} \quad (95)$$

これらを用いて, 履歴ループ内での仮想せん断応力は, 次のとおり与えられる (詳細は文献参照のこと)。

$$\frac{\tilde{q}^{(i)} - \tilde{q}_r^{(i)}}{2\delta} = \frac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_r^{(i)}}{1 + \left| \frac{\tilde{\gamma}^{(i)} - \tilde{\gamma}_r^{(i)}}{2\delta} \right|} \quad (96)$$

$q^{(i)}$  を規定する式(87)(90)(91)は, 以下のように与える。

(1) 正規圧密の場合 :

非液状化解析に準じて,

$$\tau_m = p \sin \phi_t = m_1 p \quad (97)$$

$$G_m = G_{ma} \left( \frac{p}{p_a} \right)^{m_G} \quad (98)$$

$$\gamma_m = \frac{\tau_m}{G_m} = m_1 \frac{p}{G_{ma}} \left( \frac{p}{p_a} \right)^{-m_G} \quad (99)$$

(2)過圧密の場合：

過圧密でのせん断強度については，Hvorslev(1960)面の組込みを以下のように行う。

このためには，Hvorslev角を $\phi_e^*$ として，せん断強度を，以下で与えればよい。

$p \leq p_{us}$ の時

$$\tau_m = p_{us} \sin \phi_f - (p_{us} - p) \sin \phi_e^* \quad (100)$$

ここに，

$$\sin \phi_e^* = (1 - S_\eta) \sin \phi_f + S_\eta \sin \phi_e \quad (101)$$

$p > p_{us}$ の時

$$\tau_m = p \sin \phi_f \quad (102)$$

液状化解析に準じて，状態変数 $S$ および液状化フロントパラメタ $S_0$ を用いて，以下のような拘束圧力依存性および液状化状態依存性を与える。ただし，

$$G_m = \tau_m / \gamma_m \quad (103)$$

$$\gamma_m = \gamma_{mr} / (S_0 / S_{0bd})^{q_4} \quad (104)$$

ここに， $\gamma_{mr}$ は，式(99)における $p = p_r$ での値である。また，

$$S_{0bd} = 1.0 \quad (105)$$

#### 4.5 ダイレイタンシーの収縮的成分の定式化

式(12)におけるダイレイタンシーの収縮的成分 $\varepsilon_d^c$ は，収縮的ダイレイタンシーおよび膨張的ダイレイタンシーに共通してかかるパラメタ $r_{\varepsilon_d}$ ，収縮的成分のみにかかるパラメタ $q_1$ を用いて，仮想塑性せん断ひずみ増分 $d\gamma_p^{(i)}$ に応じて，以下で与える。

$$\varepsilon_d^c = \varepsilon_{d\eta^*}^c + \varepsilon_{dS_0}^c \quad (106)$$

$$\varepsilon_{d\eta^*}^c = -r_{\varepsilon_d} q_1 \frac{MD^*}{n_E} S_\eta^* \quad (107)$$

$$\varepsilon_{dS_0}^c = \int d\varepsilon_{dS_0}^c \quad (108)$$

$$D^* = \frac{\lambda^* - \kappa}{(1 + e_a)M} \quad (109)$$

このダイレイタンシーの定式化は，柴田(1963)によるダイレイタンシー式の一般化に他ならない。

さて，これらの増分形は，以下のとおりである。

a)応力 ( $d\eta^*$ ) 型収縮的ダイレイタンシー：

$dS_\eta' > 0$ の時：

$$d\varepsilon_{d\eta^*}^c = -r_{\varepsilon_d} q_1 D^* \left( \frac{\eta^*}{M} \right)^{n_E - 1} d\eta^* \quad (110)$$

$dS_\eta' \leq 0$ の時：

$$d\varepsilon_{d\eta^*}^c = 0 \quad (111)$$

ここに，

$$S_\eta' = \left( \frac{\eta^*}{\eta_{us}^*} \right)^{n_E} \quad (112)$$

$$dS_\eta' = \frac{\partial S_\eta'}{\partial \eta^*} d\eta^* + \frac{\partial S_\eta'}{\partial \eta_{us}^*} d\eta_{us}^* \quad (113)$$

$$\frac{\partial S_\eta'}{\partial \eta^*} = \frac{n_E}{\eta_{us}^*} \left( \frac{\eta^*}{\eta_{us}^*} \right)^{n_E - 1} \quad (114)$$

$$\frac{\partial S_\eta'}{\partial \eta_{us}^*} = -\frac{n_E}{\eta^*} \left( \frac{\eta^*}{\eta_{us}^*} \right)^{n_E + 1} \quad (115)$$

b)ひずみ ( $d\gamma$ ) 型収縮的ダイレイタンシー：

正規圧密では，以下とする。

$$d\varepsilon_{dS_0}^c = 0 \quad (116)$$

過圧密では，以下とする。

$dS_\eta' > 0$ の時：

入れ子オプション指定の場合：

$$d\varepsilon_{dS_0}^c = 0 \quad (117)$$

重ね合わせオプション指定の場合：

$$d\varepsilon_{dS_0}^c = -r_{\varepsilon_d} r_{\varepsilon_d} r_{S_0} r_t \sum_{i=1}^I M_v |d\gamma_p^{(i)}| \Delta\omega \quad (118)$$

$dS_\eta' \leq 0$ の時：

いずれのオプションにも共通して，以下による。



$$d\varepsilon_{dS_0}^c = -r_{\varepsilon_d} r_{\varepsilon_d^c} r_{S_0} r_t \sum_{i=1}^I M_v \left| d\gamma_p^{(i)} \right| \Delta\omega \quad (119)$$

なお、カクテルグラスモデルでは、液状化フロントパラメタ  $S_0^* > S_{bi} (= 0.8)$  の場合について、 $r_{S_0}$  にパラメタ  $q_1$  を用いた補正項を入れているが、粘土の場合には、この補正に相当するものが、式(110)により与えられるので、この補正は必要がなく、パラメタ  $r_{S_0}^{cmin}$  を導入して、以下で与える。

$$r_{S_0} = (1 - r_{S_0}^{cmin}) (S_0^*)^{q_2} + r_{S_0}^{cmin} \quad (120)$$

#### 4.6 限界状態でのダイレイタンシー

##### (1) 正規圧密

正規圧密においては、逐次更新されていく限界状態面の基準圧力 ( $S_\eta^* = 0$  の時の限界状態面上の有効圧力) を、現在の限界状態圧力 (の更新値)  $p_{us}$  および  $S_\eta^*$  を用いて、以下で定義する。

$$p_0^* = p_{us} \exp\left(\frac{r_{\varepsilon_{dus}}}{n_E} (1 - r_k^*) S_\eta^*\right) \quad (121)$$

これを用いて、限界状態での有効圧比に相当する状態変数  $S_c$  を、以下で定義する。

$$S_c = p_{us} / p_0^* \quad (122)$$

これを用いて、限界状態でのダイレイタンシーを、以下により与える。

a)  $l_k > 1$  の場合：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{dus}^c + \varepsilon_{dus}^d &= \varepsilon_{dus} \\ &= \frac{1}{1 - l_k} (S_c^{1-l_k} - 1) \varepsilon_{Lm0}^* - \frac{n}{K_f} (1 - S_c) p_0^* \end{aligned} \quad (123)$$

ここに、

$$\varepsilon_{Lm0}^* = p_0^* / K_{L0}^* \quad (124)$$

$$K_{L0}^* = K_{L0} \left( \frac{p_0^*}{p_0} \right)^{l_k} \quad (125)$$

b)  $l_k = 1$  の場合：

$$\varepsilon_{dus}^c + \varepsilon_{dus}^d = \varepsilon_{dus} = \varepsilon_{m0} \ln S_c - \frac{n}{K_f} (1 - S_c) p_0 \quad (126)$$

##### (2) 過圧密

Steady state でのダイレイタンシーは、その時の状態変数を  $S_c$  とする時、状態変数を、式(121)ではなく、解析初期の拘束圧力  $p_0$  を用いて、以下により定義す

る。

$$S_c = p_{us} / p_0 \quad (127)$$

これを用いて、限界状態でのダイレイタンシーを、以下により与える。

a)  $l_k > 1$  の場合：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{dus}^c + \varepsilon_{dus}^d &= \varepsilon_{dus} \\ &= \frac{1}{1 - l_k} (S_c^{1-l_k} - 1) \varepsilon_{m0} - \frac{n}{K_f} (1 - S_c) p_0 \end{aligned} \quad (128)$$

ここに、 $\varepsilon_{m0}$  は、式(83)により与えられる。

b)  $l_k = 1$  の場合：

$$\varepsilon_{dus}^c + \varepsilon_{dus}^d = \varepsilon_{dus} = \varepsilon_{m0} \ln S_c - \frac{n}{K_f} (1 - S_c) p_0 \quad (129)$$

なお、正規圧密よりはじめて過圧密に反転した際には、上における圧力  $p_0$  に代えて、反転した際の圧力  $p_r$ 、 $\varepsilon_{mr}$  を用いる。

#### 4.7 ダイレイタンシーの膨脹的成分の定式化

以下の積分形を採用する。

$$\varepsilon_d^d = r_{\varepsilon_d} r_{S_0}^d \sum_{i=1}^I \left[ \frac{\gamma^{(i)}}{\gamma_v} - \ln \left( 1 + \frac{\gamma^{(i)}}{\gamma_v} \right) \right] \gamma_v m_{1v} \Delta\omega \quad (130)$$

ここに、パラメタ  $r_{S_0}^{dmin}$ 、 $q_5$  を導入して、

$$r_{S_0}^d = (1 - r_{S_0}^{dmin}) (S_0^*)^{q_5} + r_{S_0}^{dmin} \quad (131)$$

デフォルト ( $r_{S_0}^{dmin} = 1$ ) の場合は、現在 (FLIP723 版など) のカクテルグラスモデルの膨脹的ダイレイタンシーに一致する。

以上の積分形の定式化に 3 章での微分を適用することにより、増分形が定式化される。本論文では、省略する。

## 5. 適用例

### 5.1 土要素としての挙動

ひずみ空間多重せん断モデルによる粘性土の土要素としての基本的な挙動を検討するため、Fig. 5 に示すように、非排水せん断での初期の間隙比を同一とするように条件をそろえて、種々の過圧密比での非排水せん断を行った。

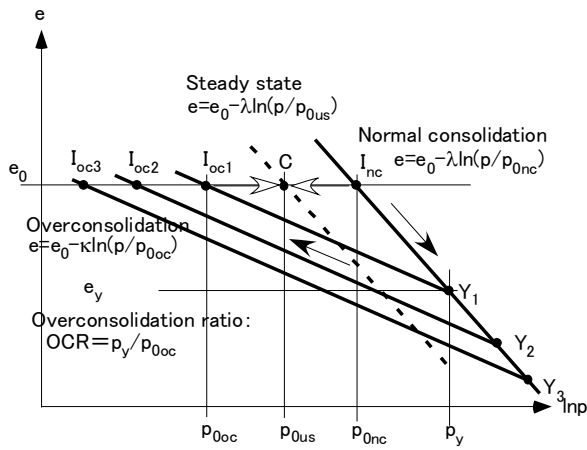


Fig.5 Conditions for the monotonic undrained shear test

過圧密比は、1, 2, 5, 20, 解析初期の静止土圧係数  $K_0 = 0.65$  とし、粘性土の主なパラメタは、以下のとおりとした。

$$\lambda = 0.245, \quad \Lambda = 1 - \kappa / \lambda = 0.549, \quad e_0 = 0.84$$

$$D = \frac{\lambda - \kappa}{M(1 + e_0)} = 0.076, \quad M = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'} = 0.961$$

また、ひずみ空間多重せん断モデルに固有のパラメタ類は、 $r_{\epsilon'_d} = r_{\epsilon'_{us}} = q_1 = n_E = 1.0$ ,  $q_6 = q_7 = \phi_e = 0$  などの標準値とした。結果は、Figs.6 and 7 のとおりとなった。

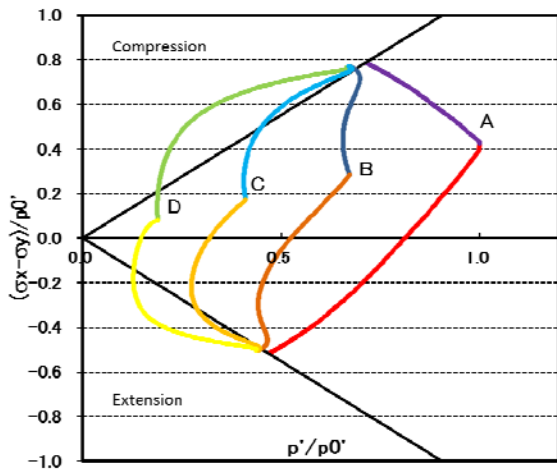


Fig.6 Computed stress path through strain space multiple mechanism model

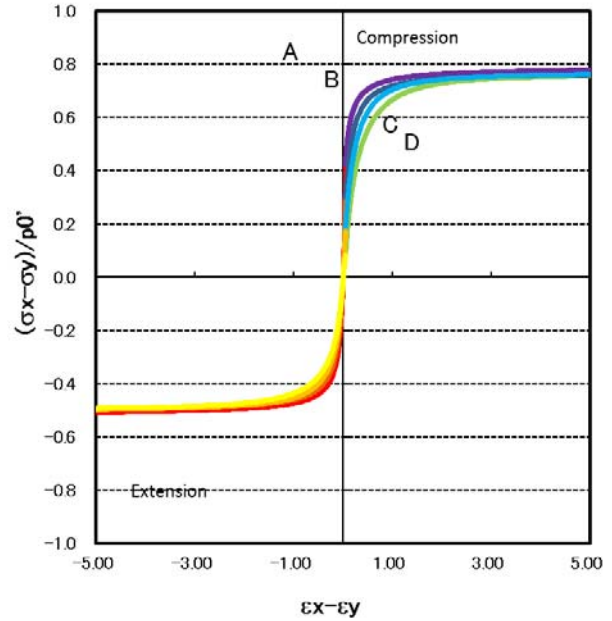


Fig.7 Computed stress strain through strain space multiple mechanism model

比較のため、同じ解析条件で、Sekiguchi-Ohtaモデル (1977) による粘性土の挙動解析を実施した。この解析では、コンピュータプログラムDACSAR (Iizuka and Ohta, 1987) を用いた。この結果は、Figs.8 and 9に示すとおりとなった。

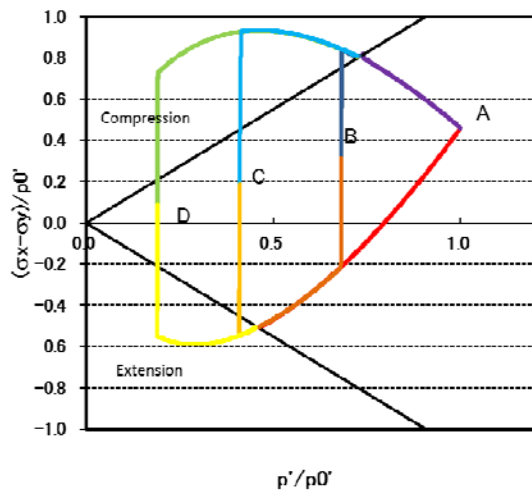


Fig.8 Computed stress path through Sekiguchi-Ohta model

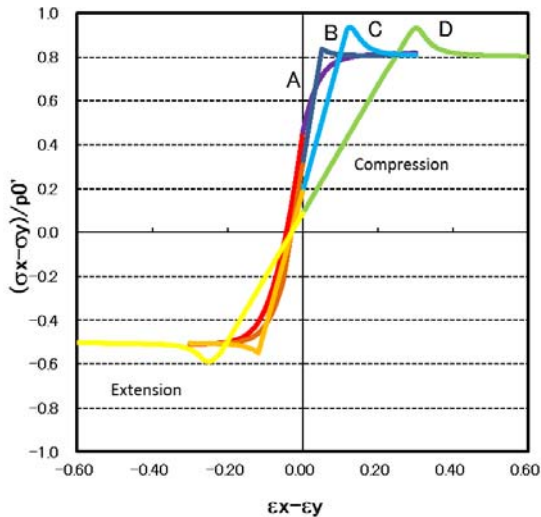


Fig.9 Computed stress-strain through Sekiguchi-Ohta model

いずれのモデルも限界状態はほぼ同じ応力点となり、初期の異方性を反映した結果が得られた。そこに至る途中の応力経路や応力ひずみ関係も、正規圧密状態からの非排水せん断では、両モデルで同様の結果となったが、過圧密状態からの非排水せん断では、それぞれのモデルの特徴が現れる結果となった。

## 5.2 粘土地盤の圧密解析

粘土地盤の圧密解析に対するひずみ空間多重せん断モデルの全体的な適用性を見通しを得るため、粘土地盤の圧密解析テストを実施した。対象とした事例は、地盤工学会(2005)による一斉解析用の例題(藤山, 杉江, 2005)であり、Fig.10のような水平地盤に、盛土が建設され、これにより生じる水平地盤の圧密沈下を解析するものである。主な解析対象となる粘土層(AC2層)のパラメータは、 $\lambda = 0.596$ ,  $\kappa = 0.272$ ,  $e_a = 2.299$ ,  $k = 7.33 \times 10^{-8} \text{ cm/s}$ , などである。圧密解析は、簡単のため、1次元水平成層地盤として行った。ひずみ空間多重せん断モデルによる解析結果は、Figs.11 and 12のとおりとなり、最終沈下量も

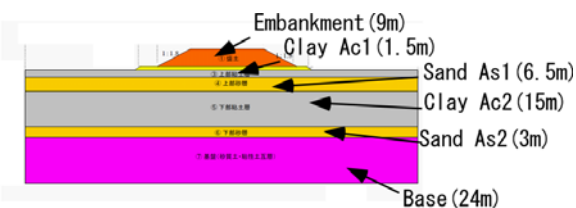


Fig.10 Cross section for consolidation analysis (after Fujiyama, Sugie, 2005, with modification)

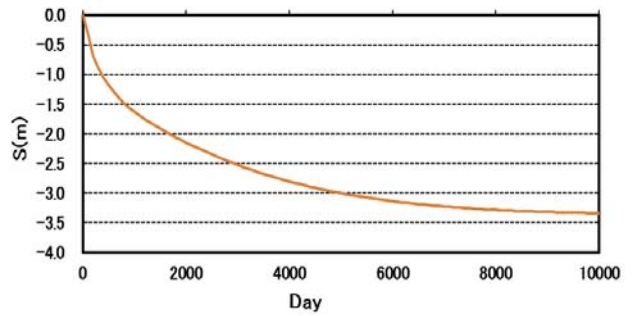


Fig.11 Computed settlement

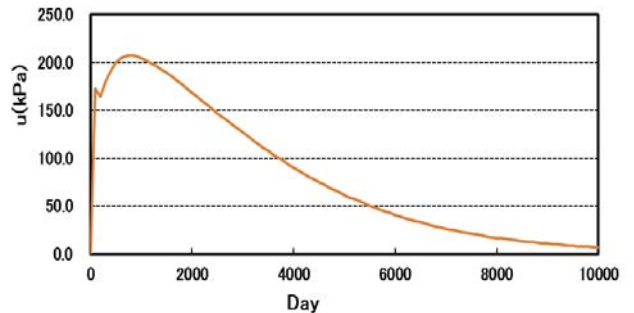


Fig.12 Computed excess pore water pressure in the middle of AC2 layer

地盤工学会で算定された値と整合するものとなり、本解析モデルの粘土地盤圧密解析への基礎的な適用性に関する見通しが得られた。

## 6. おわりに

本研究では、砂の力学モデルとしてのひずみ空間多重せん断モデルに、柴田(1963)による粘土のダイラタンシーモデルとSekiguchi-Ohta (1977)による限界状態への初期異方性の影響を組み込むことにより、粘性系の挙動を解析する新たなモデルの定式化を示した。このモデルにより粘性土地盤の要素解析、圧密解析を行い、その適用性について、ある程度の見通しを得ることができた。今後は、粘性土の非排水繰返しせん断挙動の解析、砂と粘土の複合的な地盤の地震時挙動の解析など、複合的な問題への展開を予定している。

## 参考文献

- 柴田 徹(1963): 粘土のダイラタンシーについて, 京都大学防災研究所年報 6号, pp.128-134
- 藤山哲雄, 杉江茂彦 (2005): 複数のFEMプログラムによる解析結果の比較と考察—軟弱地盤上における盛り土の圧密解析の場合—, 土と基礎, Vol.53, No.8, pp.13-15

Iai S, Ozutsumi O. (2005): Yield and cyclic behaviour of a strain space multiple mechanism model for granular materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*; Vol.29, No.4, pp.417-442.

Iai S, Tobita T, Ozutsumi O, Ueda K. (2011): Dilatancy of granular materials in a strain space multiple mechanism model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.35, No.3, pp.360-392.

Iizuka, A. and Ohta, H. (1987): A determination procedure of input parameters in elasto-viscoplastic finite element analysis, *Soils and Foundations*, Vol.27, No.3, p.71-87.

Ohta H, Iizuka, A., Ohno, S. (2011): Constitutive

Modelling for Soft Cohesive Soils, in Iai, S. (ed), *Geotechnics and Earthquake Geotechnics towards Global Sustainability*, Springer, pp.231-250

Sekiguchi, H., Ohta, H. (1977): Induced anisotropy and time dependency in clays, *Constitutive equation of soils. Proc. Of the specialty session 9, 9<sup>th</sup> ICSMFE, Tokyo*, pp.306-315

(論文受理日 : 2012年6月8日)

## **Consolidation Analysis of Clayey Ground through Strain Space Multiple Mechanism Model for Granular Materials**

Susumu IAI

### **Synopsis**

The strain space multiple mechanism model has been widely applied for earthquake response analysis of soil-structure systems, including liquefaction. Herein, the applicability of this model to the analysis of consolidation of clayey ground is studied. Primary difference in sand and clay is represented by the power index of confining pressure for tangential stiffness and the formulation of critical state (i.e. steady state in sand). The model is applied for consolidation of a clayey ground by setting the power index equal to unity with Shibata's (1963) dilatancy model for clay. The results indicate reasonable applicability of this model to consolidation analysis of clayey ground.

**Keywords:** clay, consolidation, constitutive equation, sand, multiple mechanism model