

## 浸透性路床上の流れにおける物質輸送

岩佐 義朗・綾 史郎・中井 俊雄

### MASS TRANSPORT BETWEEN TURBULENT SURFACE AND SUBSURFACE FLOWS OVER PERMEABLE BOUNDARIES AND ITS EFFECT ON LONGITUDINAL DISPERSION

By Yoshiaki IWASA, Shirou AYA and Toshio NAKAI

#### Synopsis

This paper presents the results of experimental study on the vertical mass transport between surface and subsurface flows over permeable boundaries and theoretical and experimental study on the longitudinal dispersion in flows over them. In the first phase of study, the flow visualization with dye solution was made and this experiment discloses the existence of interaction cells in a permeable layer. The geometry of an interaction cell and the vertical mass transport characteristics in forms of characteristic time scale, the mass exchange velocity and the diffusion coefficient are measured under different conditions of flow. In the second phase of study, the effects of vertical mass transport on longitudinal transport and dispersion are studied in accordance with information obtained in the first phase of study. The convective velocity and the dispersion coefficient of tracer clouds given by the theoretical analysis are quite different from those in the flow over impermeable boundaries. These theoretical results are also examined by dispersion experiments in the laboratory flume with a permeable boundary. Theoretical results are in good agreement with the experimental ones.

#### 1. はじめに

通常、河川の河床は砂、礫などの比較的透水性の良い材料により形成されており、河床面下に浸透流が存在するものと考えられる。このような礫性路床上の流れでは、浸透層上の流れ（以下、主流と呼ぶ）と、浸透層内の流れ（以下、浸透流と呼ぶ）との間に相互作用、すなわち、主流と浸透流との間で運動量、質量の輸送が生じ、流れの特性、物質輸送の特性は、不浸透性路床上の流れにおけるものと異なってくる。すなわち、浸透層上の開水路流れでは、平均流速分布は、浸透層上面においてスリップ速度を考慮した対数則で表現され、多くの場合、抵抗が増加することが知られている<sup>1,2</sup>。また、浸透層内の流れは、境界面上のスリップ速度の影響を受け、指數関数的に減少し、一様流速分布に漸近することが知られている<sup>1,2,3</sup>。しかし、これらの特性と主流、浸透流の水理特性、あるいは、浸透層構成材料の特性との関係の詳細は未だ明らかとは言い難いようである。

一方、物質輸送について述べると、主流と浸透流間の物質輸送を取り扱った研究例は少なく、また、浸透性路床上の流下方向の平均的輸送特性についての研究も少なく、その成果は十分とは言えない。しかし、Einstein<sup>4</sup>、芦田・江頭・金屋敷・小川<sup>5</sup>らにより、浸透性路床上の流れでは、ウォッシュ・ロードの流下方向の濃度低減が生じることが実験により確認されている。また、中井・岩佐・綾<sup>6</sup>は、不浸透性路床、および数種の浸透性路床上の流れにおいて、50%粒径が 1, 4, 10 μ の 3 種の微粒子の懸濁液を用いて、濁質の流下実験を行い、濁質濃度が流下方向に低減することを示し、低減特性の路床材料、水理量に対する依存性を

検討した。更に、彼等は、このような微粒子からなる濁度が、山地小河川においても、実際に流下方向に低減することを観測結果を整理することにより、明らかにしている。これらの研究では、粒子濃度の低減が浸透性路床上の流れの特性として指摘されているが、その低減機構については概念的な説明しかなされておらず、その低減特性と主流水理量、路床材料との関係については、不明のままである。また、長岡・大垣・花木<sup>2)</sup>は、礫性路床上層に生息する細菌の生物学的作用による主流水質の変化について研究し、主流と浸透流の相互作用が細菌の生物量、主流水質の変化に密接に関係していることを示している。

以上にみられるように、主流と浸透流との相互作用による質量交換が物質輸送に果す役割の重要性については、指摘されているものの、質量交換が浸透層内のどの領域にまで及ぶのか、その強さはどの程度なのか、またそれらと主流、浸透流の水理特性、浸透層構成材料の特性との関係はどうであるのかといった点については、未知のままとなっている。これらのことより、本研究では、まず初めに、主流と浸透流間の物質交換の実態を実験的に明らかにする。ついで、浸透性路床上の流れにおける保存性物質の分散現象の特性について、理論的、実験的に検討するものである。

## 2. 主流と浸透流の物質交換に関する実験的研究

### 2.1 実験目的

本実験の目的は、浸透層内において、主流と浸透流間の運動量、質量輸送に寄与する領域とその領域内の流れ場の特性を知ること、および質量輸送の特性を知ることである。具体的には、1)染料を用いた可視化による浸透層内の流れの観察と交換層厚さの測定、2)主流に定常的にトレーサーを投入し、浸透層上層を一様濃度とした後、トレーサー投入を停止し、その後の浸透層内の濃度の時間的変化を測定することによる減衰時間定数の測定からなっている。

### 2.2 実験概要

実験は京都大学工学部土木工学教室地階水理実験室に設置してある循環式の全長34mの長方形断面を有するアクリル製可変勾配水路の下流5.5mを用い、水路幅を角型鋼で5.8cmに調整して行われた。

この水路中に、粒径1.25cmのガラスビーズ(Run A series)を1層毎に最密となるように10層積み上げ、約10cmの浸透層を構成した。また、1号ケイ砂(Run B series)、2号ケイ砂(Run C series)および3号ケイ砂(Run D series)を用いて同様に厚さ10cmの浸透層を構成した。浸透層の特性は、Table 1に示されており、また、3種のケイ砂の粒度分布がFig. 1に示されている。なお、一部の実験においては、流砂のみられる場合もあったが、顕著な河床波の発達はみられなかった。

通水時には、水路底面より水位を極くやるやかに上昇させていくことにより、また、通水開始後砂層を金属棒でかきまわした後、再び敷きならす等のことにより

浸透層内の残留空気の除去に努めた。

また、水路下流部では、浸透層内に止水板を設けており、主流、浸透流の合計流量が計量用ポリバケツ、スト

Table 1 Characteristics of permeable boundaries

(1) Run No.	(2) dm (cm)	(3) $\lambda$	(4) K (cm/sec)	(5) Material
A Series	1.25	0.411	53.3	GLASS BEADS
B Series	0.354	0.407	7.81	SAND
C Series	0.218	0.420	5.10	SAND
D Series	0.113	0.427	2.70	SAND

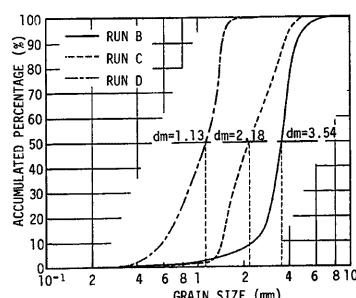


Fig. 1 Grain size accumulation curves of permeable boundary materials.

ップウォッチ、メスシリンダーにより計測された。

トレーサーとしては、メタノールにより比重調整された NaCl 溶液を用い、濃度測定は導電率計（計測技研製 MK 106）を用い、出力電圧の時間的变化をサーボ式ペンレコーダにより記録し、目視によりこれを読みとった。電圧から、濃度への変換は、あらかじめ静水中、浸透層中において求めておいた校正曲線を用いて行った。なお、導電率計プローブの特性より、浸透層中における計測は、浸透層表面より 1.5 cm の深さの点で行われている。

実験水理量は、Table 2 にまとめた通りであり、前述の 4 種の浸透層に対して、合計 20 通りの実験が行われた。浸透層内の流れの詳細については、第 3 章で述べるが、Darcy 流速、代表粒径を用いて計算される浸透層内の Reynolds 数は 10 程度以下であり、浸透層下層は全て層流である。

浸透層上層に存在するとみられる主流と浸透流の交換層と、流れのパターンの観測を主目的とする染料を用いた可視化実験は次のように行われた。染料投入は、実験区間上端より下流側約 2 m 浸透層下層不浸透面付近より、ローダミン B 水溶液を用いて行い、着色された領域が 1.25 m 以上となった時点でローダミン B 水溶液に染った領域の境界線をペンでマークした。次に、浸透層表面付近の主流部にウラニン水溶液を定常投入し、浸透層を表面より着色し、着色された領域をペンでマークした。ローダミン B、およびウラニンで着色された 2 領域は、ほとんどオーバラップすることもなく、比較的安定した境界面となることが観察された。更に、ウラニン水溶液の投入を止めると、浸透層上層にセル状のウラニン水溶液が脱色される領域が多数出現する。ウラニン水溶液の投入停止約 1 分後までに脱色された領域を更にペンでマークした。このようにして得られた浸透層内の領域区分を示すと、Fig. 2 のようである。同図中、ローダミン B 水溶液で染色された領域が浸透層 C であり、ウラニン水溶液で染色された領域が浸透層 A および B であり、ウラニン水溶液が脱色された領域が浸透層 A である。浸透層 A、および浸透層 A、B をあわせた浸透層面積を測定区間長で除して得られる平均的な交換層厚さ  $y_{bA}$ ,  $y_{bB}$  を示すと Tale 3 第(2)欄、第(3)欄のようであり、浸透層構成材料の粒径が小さくなるほど、 $y_b$  も小さくなるようである。

Table 2 Experimental conditions

(1) Run No.	(2) Ie	(3) h (cm)	(4) $u_*$ (= $\sqrt{ghI_e}$ ) (cm/s)	(5) Q (cm <sup>3</sup> /s)	(6) U <sub>A</sub> (cm/s)	(7) Re. No. ( $\nu = 0.01$ )	(8) Fr. No. (= $U_A/\sqrt{gh}$ )
A-11	1/4000	1.23	0.549	16.2	2.27	279	0.076
A-12	1/3600	2.14	0.763	68.1	5.49	1174	0.139
A-14	1/4000	4.19	1.01	214.4	8.82	3697	0.159
A-21	1/2065	1.25	0.770	44.4	6.12	766	0.175
A-22	1/2065	1.98	0.969	98.8	8.60	1703	0.195
A-24	1/2065	4.20	1.41	242.0	9.93	4172	0.155
A-31	1/1126	1.03	0.947	50.7	8.49	874	0.315
A-32	1/1126	2.03	1.33	173.7	14.8	2995	0.383
A-34	1/1126	4.05	1.88	425.8	18.1	7341	0.333
A-41	1/ 505	1.02	1.41	85.4	14.4	1472	0.530
A-42	1/ 505	1.99	1.97	261.9	22.7	4516	0.596
A-44	1/ 505	4.01	2.79	601.5	25.9	10371	0.479
B-61	1/ 126	1.32	3.20	195.3	25.5	3367	0.709
B-52	1/5714	1.99	0.584	91.6	7.94	1579	0.180
B-54	1/6111	3.97	0.780	158.9	6.90	2740	0.110
C-21	1/2065	1.38	0.809	85.6	10.7	1476	0.291
C-22	1/2065	2.79	1.15	265.4	16.4	4576	0.314
C-24	1/2065	4.13	1.40	507.1	21.2	8743	0.333
D-71	1/ 100	0.963	3.07	170.1	30.5	2933	0.993
D-72	1/ 100	1.41	3.72	269.6	33.0	4648	0.888

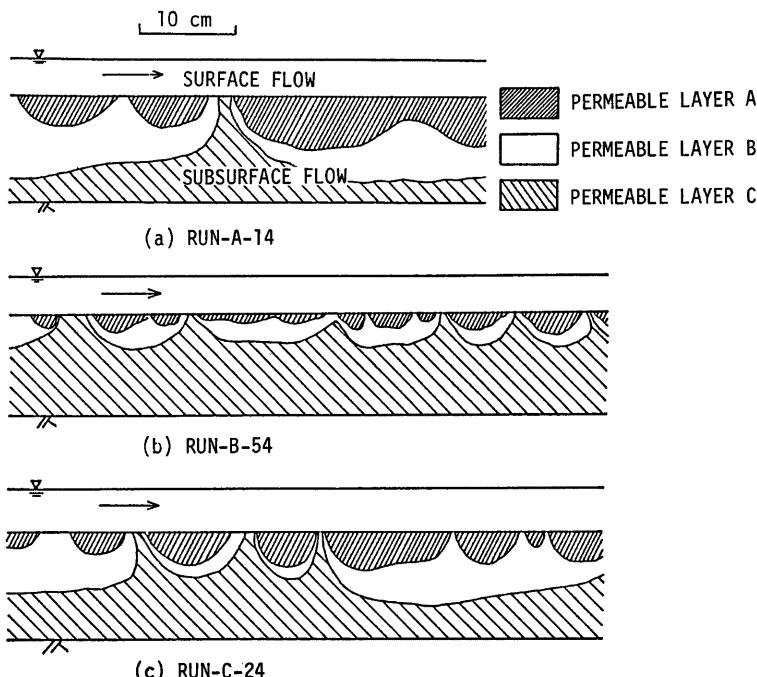


Fig. 2 Example of permeable boundary classification obtained by dye experiments.

次に、減衰時間定数の測定法について述べる。まず、濃度の測定は、あらかじめ可視化により得られた浸透層Aの領域内に導電率測定プローブを挿入して行った。更に、主流中にトレーサーを定常投入し、浸透層内のトレーサー濃度を一様定常とした後、トレーサーの投入を止め、その後の浸透層内の濃度変化を計測することにより行われた。**Fig. 3** は、濃度測定結果の一例を片対数紙上にプロットしたものであるが、濃度は時間に関して指数関数的に低減し、同図より濃度が $1/10$ に減衰する時間  $T_{10}$  を求め、これを減衰時間定数とした。 $T_{10}$  の値は、前出の **Table 3** 第(4)欄にまとめられているが、 $T_{10}=10\sim100 \text{ sec}$  程度の値であり、水理量、浸透層構成材料に対する依存性がみられる。

### 3. 物質交換機構に関する検討

#### 3.1 交換層に関する検討

##### (1) 浸透層内の流れ

前章で述べた可視化実験の結果、浸透層は流れの形態、現象の時間スケールにより3層に分類されることができたが、これを模式的に示すと **Fig. 4** のようである。浸透層Aにおいては、1分程度の短い時間スケールで、領域内の染料の希薄化(あるいは、主流からの染料による着色)がみられ、主流との質量交換の最も活発な領域である。流れは、多分に乱流的な時間的、空間的にランダムな水深方向の流れが卓越しており、流下方向の流れは、顕著ではないが、セル自体は、1時間に数cm程度の速さで、流下方向に移動している。浸透層Bは、浸透層Aに比べ染料の希薄化により長い時間スケールを要し、浸透層Aを取り囲むように存

Table 3 Thickness of interaction layer and characteristic time of decay

(1) Run No.	(2) $y_{bA}$ (cm)	(3) $y_{bB}$ (cm)	(4) $T_{10}$ (sec)
A-11	1.68	3.56	280
A-12	3.68	5.53	66.0
A-14	2.77	6.38	46.0
A-21	2.13	4.42	96.5
A-22	1.81	4.08	56.5
A-24	2.44	4.87	37.0
A-31	2.82	5.07	84.5
A-32	3.58	4.55	38.5
A-34	3.44	4.25	25.0
A-41	2.46	5.16	44.0
A-42	3.24	5.36	20.0
A-44	2.80	4.88	17.5
B-61	1.71	4.67	21.0
B-52	0.962	2.55	63.0
B-54	0.841	2.65	42.0
C-21	1.71	3.91	28.5
C-22	1.33	3.84	28.5
C-24	1.91	5.28	20.5
D-71	0.596	1.92	27.5
D-72	0.664	5.37	10.0

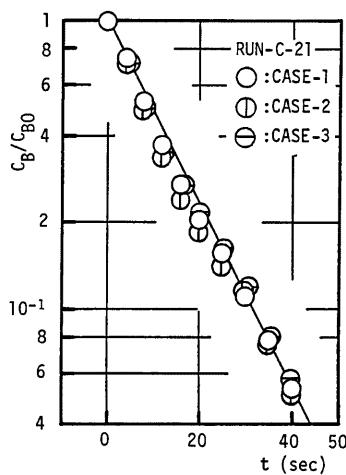


Fig. 3 Example of concentration decay measured in interaction layer.

在する領域である。この領域では比較的安定したゆっくりとした流下方向の流れが観察され、浸透層Aにおいて見られるような水深方向の流れは顕著でない。浸透層AとBを分離する明確な指標的なものは観察されず、両者の主たる相違は、浸透層内の希薄化に要する時間が異なるものであり、境界面の設定には、現在までのところ多分に主観的なものがはいり込む余地がある。

浸透層Cは、いくつかの空間スケールを持った主流への吹き出しを有する最下層の領域である。この層では、Darcy流速程度の非常にゆっくりとした流下方向への流れが存在する。浸透層Bとの境界面は、砂粒によって構成された浸透層( Run B, C, D series)では、非常に明確であり、長時間にわたって安定した境界面が観察された。また、主流からの染料によって染まった領域(浸透層B)の境界と浸透層下部からの染料に染まった領域(浸透層C)の境界はほぼ一致している。これらのことから、浸透層Cと主流との交換は、ほとんどないものと考えられる。

## (2) 交換層の形状特性

主流と浸透流の間で最も活発な質量交換が生じている浸透層Aを以下交換層呼び、その形状特性について検討する。

前出の Fig. 2 に示されるように、交換層の形態は様々であるが、交換層面積／区間長で求められる交換層の厚さは、前出の Table 3 に示されている。一方、測定区間上に長さ  $l_i$ 、面積  $a_i$  の交換層セルが  $n$  個存在するものとして、その平均形状特性を

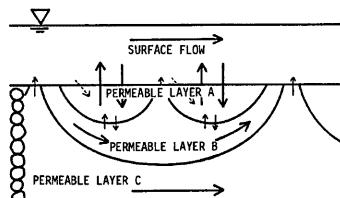


Fig. 4 Schematic illustration of flow in permeable boundaries.

によって求めると、 $y_b$  は交換層セルの平均厚さ、 $\eta$  は形状比、 $\xi$  は測定区間に於ける交換層セルの存在する率である。

$y_b$  は、後述するように  $\xi = 0.825$  程度の値であるから、前出の  $y_{bA}$  に比較して 20% 程度大きくなる。 $y_b$  と  $d_m$  および他の水理量との関係について次元解析的な検討も行ったが、顕著な関係は見い出しえず、 $y_b$  と  $d_m$  の関係を図示すると Fig. 5 のようであり、

の関係が得られる。

一方、Fig. 6, 7 は、 $\eta$ ,  $\xi$  を全ての実験ケースについて示したものであって、浸透層構成材料や、水理量に対する顕著な依存性はみられず、

$$\xi \doteq 0.825$$

$$\eta \doteq 0.25$$

程度の値となる。なお、単位長さ当たりに存在する交換層セルの個数は、これらの関係より、次式となる。

### 3.2 質量交換に関する特性パラメータ

### (1) 解析法

前述の実験結果より、交換層セル内では濃度は指数関数的に減衰する。その時間定数  $T_{10}$  より、交換速度  $v$  および拡散係数  $D_u$  が、流下方向の濃度変化を無視して次の様に求まる。

交換層セルの下端  $\gamma = \gamma_b$  において質量輸送はないものとし、セル内においては完全混合を仮定すると

となる。ここに、 $C_R$ : 交換層セル内濃度、 $C_A$ : 主流濃度である。 $C_A = 0, C_B|_{t=0} = 1$  の条件で(6)式を解くと、

であり、

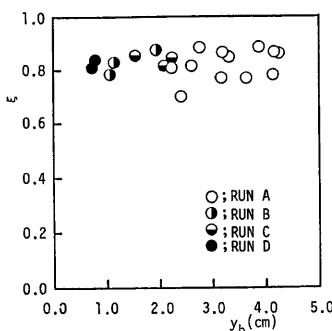


Fig. 6 Interaction cell length in unit length.

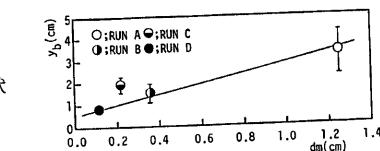


Fig. 5 Thickness of a interaction cell and characteristic grain size of permeable boundaries.

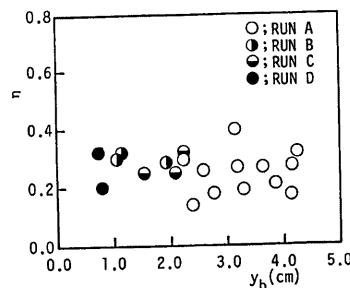


Fig. 7 Depth to length ratio of a interaction cell.

の関係となる。

一方、交換層セル内において、拡散型の質量輸送が存在するものと仮定すると

である。 $C_B|_{t=0}=1$ ,  $C_B|_{y=0}=0$ ,  $\partial C_B/\partial y|_{y=y_b}=0$  の条件で(9)式を解くと

となる。これを水深方向に平均し、減衰時間定数  $T_e$  を用いて表示すると

$$C(y, t) = \frac{8}{\pi^2} \left( e^{-i/T\epsilon} + \frac{1}{9} e^{-9t/T\epsilon} + \frac{1}{25} e^{-25t/T\epsilon} + \dots \right) \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

となる。ここに、

である。

## (2) 交換特性パラメータ

実験より求められた  $T_{10}$ 、および(1)式より求められる  $y_b$  を用いて、上述の関係式から計算される底を10とする交換速度  $k_{10}$ 、拡散係数  $D_y$  をまとめると、Table 4 のようである。

$T_{10}$  に関する次元解析結果を示せば、Fig. 8 のようであり、これより

$$\frac{d_m}{T^{10}U_A} = C \left( \frac{K}{U_A} \right) \left( \frac{h}{d_m} \right)^{3/5} \left( \frac{U_A}{\sqrt{gh}} \right)^{7/10} \dots \dots \dots \quad (13)$$

Table 4 Exchange velocity and diffusion coefficient

(1) Run No.	(2) $k_{10}$ $\left( = \frac{y_b}{T_{10}} \right)$ (cm/s) $\times 10^{-2}$	(3) $D_g$ (cm $^2$ /s) $\times 10^{-2}$
A-11	0.861	1.94
A-12	6.47	25.8
A-14	6.96	20.8
A-21	2.72	6.63
A-22	3.98	8.36
A-24	8.57	25.3
A-31	3.93	12.1
A-32	10.8	42.1
A-34	15.5	56.2
A-41	6.32	15.4
A-42	20.8	80.4
A-44	20.9	71.1
B-61	9.29	16.9
B-52	1.84	1.99
B-54	2.57	2.60
C-21	7.40	14.6
C-22	5.47	7.97
C-24	11.0	23.0
D-71	2.68	1.84
D-72	7.96	5.92

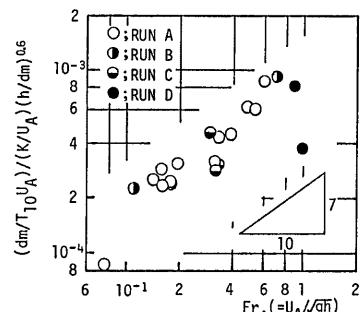


Fig. 8 Characteristic time and hydraulic parameters.

流速で無次元化すると  $k_{10}/U_A = (2.0 \sim 9.0) \times 10^{-3}$  の値となり、他の水理量への依存性をうかがわせる。

一方、拡散係数についてみると、 $D_y = (0.2 \sim 8.0) \times 10^{-1} (\text{cm}^2/\text{s})$  程度の値であり、これも、ばらつきが大きい。これを摩擦速度、主流水深で無次元化すると  $D/h u_* = (0.6 \sim 16) \times 10^{-2}$ 、浸透層の Darcy 流速、代表粒径で無次元化すると  $D/U_B d_m = 0.9 \sim 25$  の値となる。これは、Reynolds 相似によって得られる主流の水深方向の乱流拡散係数  $D/h u_* = \kappa/6$  と、同じオーダーの値であり、浸透層内の横分散係数  $D_T/U_B d_{50} = 0.04^{(8)}$  に比べてはるかに大きな値であり、主流が浸透流に及ぼす効果がでているものである。また、中川・津柳<sup>(9)</sup>が用いた仮定、実験値より彼等の方法により渦動粘性係数  $\mu_e$  を推定すれば、 $\mu_e/h u_* = (0.8 \sim 4.3) \times 10^{-3}$  程度の値となり、拡散係数は、渦動粘性係数に比較して、2 オーダー程度小さな値となる。

以上にみられるように、交換速度、拡散係数ともに本実験で得られた結果では、ばらつきが大きく、他の水理量への依存性をうかがわせるが、(8)、(12)式にみられるように、これらの値は  $y_0$  に依存しており、 $y_0$  の他の水理量との関係を合わせ、今後検討する必要がある。

#### 4. 浸透層上の流れにおける移流分散現象のモデル

前章までに述べたことより、浸透層上の流れにおいて浸透流と主流との間に存在する質量輸送の概略が明らかとなつた。この結果として、流下方向の平均的な質量輸送（移流分散現象）も、不浸透層上の流れにおけるそれと比較して、大きく変化するものと考えられる。不浸透層上の流れにおける移流分散現象においては、著者らの解析により、水深、水路幅両方向の局所平均流速分布形状、乱流拡散係数、水路幅水深比等が支配的要因であることが明らかとなっている<sup>10)</sup>。浸透層上の流れにおける移流分散現象についても、それらの変化の影響を検討する必要はあるが、前章までに述べたような、現時点における知見では、これらの影響をモデルに正確に反映させることは困難である。従って、本章では、これらの影響は簡略化したモデルによって取り扱うことにして、浸透層上の流れにおける物質輸送を最も特徴づけると考えられる主流と浸透流との間の質量輸送の存在が流下方向の平均的な質量輸送に及ぼす影響について簡単なモデルによって検討する。

4.1 基礎方程式系

**Fig. 9** に示されるような浸透性路床を有する矩形断面内の流下方向に一様で定常な流れにおける保存性物質の濃度保存則について考える。

主流における物質輸送の基礎方程式として Euler の乱流拡散方程式を用いるものとし、これに一次元解

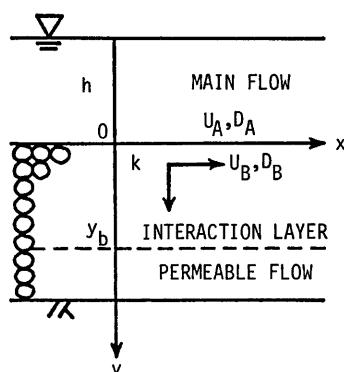


Fig. 9 Definition sketch of flows over permeable boundaries.

となる。ここに、下添字Aは主流における諸量であることを示しており、 $C_A$ : 断面平均濃度、 $U_A$ : 断面平均流速、 $A_A$ : 流積、 $D_A$ : 移流分散係数、 $\lambda_A$ : 有効間隙率( $=\xi A$ )、 $s$ : 渦辺、 $k$ : 主流と浸透流間の物質交換速度、 $C_B$ : 浸透流における濃度である。なお、移流分散係数  $D_A$  は、上式では

$$\int u_A'' C_A' dA + \int \overline{u_A' C_A'} dA = - A_A D_A \frac{\partial C_A}{\partial x} \quad \dots \dots \dots (15)$$

で定義されている。さらに、交換速度  $k$  は、第3章で示されたような主流と浸透流との間において、乱れ、定常的な流入出等によって生じる種々の形態の物質輸送を総括的に交換速度の形で表示したものであって、 $k$  は、単位長

さ当たりの交換にかかる面積が、 $\lambda_{AS}$  であることを示している。

主流が流下方向に一様な流れであること、および矩形断面水路であることを仮定して、(14)式を流積  $A = Bh$  で除せば、単位幅当たりにおける濃度の収支則

を得る。ここに,  $h$ : 水深である。(16)式においては, 物質交換は, 水路底面においてのみ生じているものとしている。また, 分散係数は, 著者らの研究<sup>10,11)</sup>に示されるように, 水路幅, 水深両方向の流速分布の非一様性の影響を受けるので, 水路幅  $B$  における分散係数である。

次に、浸透層内の濃度の収支であるが、第3章で述べたように、浸透層はその物質交換特性により2～3層に分割できる。本章の目的は、前章で示されたような主流と浸透流との間に存在する物質交換が流下方向の物質輸送に及ぼす影響を簡単なモデルにより解析的に検討することであり、前章で述べた交換層における物質保存の関係を次の様にモデル化する。浸透層のうち、側壁を不浸透面、上面を浸透層上面、下面をそれ以深の浸透流との水深方向の物質交換が非常に緩やかな面とする領域（交換層）の保存性物質の物質収支は、交換層の平均的断面積を  $A_B = B y_B$  ( $B$ : 水路幅,  $y_B$ : 交換層平均厚さ) として、次の様になる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\lambda A_B C_B) + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda A_B U_B C_B) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda A_B D_B \frac{\partial C_B}{\partial x} \right) - \lambda_A B k (C_B - C_A) \quad \dots \dots \dots \quad (17)$$

ここに,  $C_B$ : 交換層内平均濃度,  $U_B$ : 交換層内平均流速,  $D_B$ : 交換層内分散係数である。交換層内の流れは、浸透層上面から内部にかけて、浸透層構成材料の長さ程度のスケールで、乱流から層流へと変化し、しかも、その流れのパターンは複雑であるが、(17)式においては、流下方向の物質輸送を、断面平均流速  $U_B$  による移流輸送、および、分子・乱流拡散、流路・流向のランダム性による移流分散、流速分布の非一様性による移流分散等の勾配輸送型で表示される拡散輸送の2種の輸送にわけて表示した。次に交換層上面における定常的な流入出、乱れ等による主流との物質交換は、(14)式と同様に簡単に(17)式右辺第2項で示した。また、交換層下面における水深方向の物質輸送は無視できるものと仮定している。

(17)式を  $\lambda, A_B$  一定として、単位幅当たりの式に書き換えると

となる。(15), (18)式が本解析の基礎方程式である。

#### 4.2 基礎方程式系の解と移流速度、分散係数

(15), (18)式を摩擦速度  $u_*$ , 水深  $h$  を基本量として無次元化すると

となる。ここに、 $*$ は無次元量であることを示し、 $t^*=t/(h/u_*)$ 、 $x^*=x/h$ 、 $U_A^*=U_A/u_*$ 、 $U_B^*=U_B/u_*$ 、 $k^*=k/u_*$ 、 $D_A^*=D_A/hu_*$ 、 $D_B^*=D_B/hu_*$ 、 $S_A^*=1/\lambda_A$ 、 $S_B^*=1/\lambda_A(\lambda y_B/h)$ である。以下、混乱のない限り、簡単の為、無次元量であることを示す上添字 $*$ を省略する。

初期条件  $C_A(x, 0) = \delta(x)$ ,  $C_B(x, 0) = 0$ , すなわち,  $t=0$ において, 主流に濃度1の物質が  $W_0 = \rho k$  だけ投入された場合の  $C_A$ ,  $C_B$  のモーメントの挙動をフーリエ変換を用いて以下のように求める。すなわち,  $C_j(j=A, B)$  の  $x$  軸に関するフーリエ変換  $\tilde{C}_j$  を

で定義する。(19)式のフーリエ変換は

$$\frac{\partial \bar{C}_A}{\partial t} = im U_A \bar{C}_A - D_A m^2 \bar{C}_A - \frac{k}{s_A} (\bar{C}_A - \bar{C}_B) \quad \dots \dots \dots \quad (21. a)$$



$$W_B|_{t \rightarrow \infty} = (1 - \theta) W_0$$

となる。また、任意の時刻  $t$  における主流、交換層内に存在する物質量の総和は

$$W_A + W_B = \rho h = W_0$$

であり、初期投入量  $W_0$  に等しくなっている。すなわち、 $t=0$ において主流に投入された分散物質は、時間の経過とともに主流、浸透層に拡がり、 $t \rightarrow \infty$ においては、主流、交換層の流積比に対応して一定の比率で主流、浸透層に存在することとなる。

次に、1次モーメントを求める

$$\mu_A = \left\{ \frac{2\theta(1-\theta)}{s} (U_A - U_B)(1-e^{-st}) + \theta ut + (1-\theta)\tilde{u}te^{-st} \right\} / M_{A^0} \quad \dots \dots \dots \quad (31. \text{ a})$$

$$\mu_B = \left\{ \frac{(1-\theta)(2\theta-1)}{s} (U_A - U_B) (1 - e^{-st}) + \theta (ut - \tilde{u}te^{-st}) \right\} / M_{B0} \quad \dots \dots \dots \quad (31. b)$$

$$u = \frac{h}{h + \lambda y_b} U_A + \frac{\lambda y_b}{h + \lambda y_b} U_B$$

$$\tilde{u} = \frac{\lambda y_b}{h + \lambda y_b} U_A + \frac{h}{h + \lambda y_b} U_B$$

となる。(31)式より(26)式の定義に従って、主流、浸透流における分散雲の重心の移動速度  $U_C$  を求める  
と、 $t \rightarrow \infty$  で

となる。(32)式から明らかなように、移流速度は、主流、浸透流を通じて同一であり、主流の平均流速、浸透流の平均流速に、それぞれ主流流積、交換層流積を重みとして、加重平均したものに一致する。

最後に、2次中心モーメント  $\sigma_j^2$  を求めると

$$\begin{aligned}\sigma_A^2 &= -\frac{a_0}{M_{A0}} - \left(\frac{\Omega_A}{M_{A0}}\right)^2 + \frac{2a_1}{M_{A0}}t + \left(1 - \frac{\theta}{M_{A0}}\right) \frac{\theta}{M_{A0}} u^2 t^2 \\ &\quad + \left\{ \frac{a_0}{M_{A0}} + 2\left(\frac{\Omega_A}{M_{A0}}\right)^2 + \frac{2}{M_{A0}}\left(a_2 - \frac{a_3}{M_{A0}}\right)t + \left(\tilde{u} - \frac{2\theta u}{M_{A0}}\right) \frac{1-\theta}{M_{A0}} \tilde{u} t^2 \right\} e^{-st} \\ &\quad - \left\{ \frac{\Omega_A - (1-\theta)\tilde{u}t}{M_{A0}} \right\}^2 e^{-2st} \dots \end{aligned} \quad (33, a)$$

$$a_0 = -4\theta(1-\theta)(D_A - D_B)/s - 6\theta(1-\theta)(1-2\theta)(U_A - U_B)^2/s^2$$

$$a_1 = \theta D + \Omega_A u (1 - \theta/M_{A0})$$

$$a_2 = (1 - \theta) \tilde{D} - \Omega_A \tilde{u}$$

$$\alpha_3 = \Omega_A \{(1-\theta)\tilde{u} - \theta u\}$$

$$b_0 = -2\theta(1-2\theta)(D_A - D_B)/s - 2\theta\{(1-2\theta)^2 - 2\theta(1-\theta)\}(U_A - U_B)^2/s^2$$

$$b_1 = \theta D + \Omega_B u(1 - \theta/M_{B^0})$$

$$b_2 = -(\theta \tilde{D} + \Omega_B \tilde{u})$$

$$b_3 = Q_B \theta(u + \tilde{u})$$

$$D = \theta D_A + (1-\theta) D_B + \theta(1-\theta)(U_A - U_B)^2/s$$

$$\tilde{D} = (1-\theta)D_A + \theta D_B - \theta(1-\theta)(U_A - U_B)^2/s$$

$$\Omega_A = 2\theta(1-\theta)(U_A - U_B)/s$$

$$\Omega_B = \theta(1-2\theta)(U_A -$$

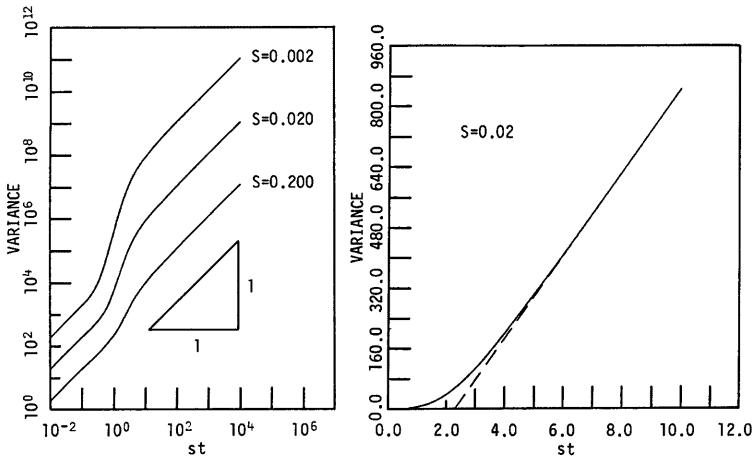


Fig. 10 Time dependent growth of variance.

となる。(33)式より、(27)式の定義に従って分散係数  $\bar{D}_j$  を求めると、 $t \rightarrow \infty$ において

$$\bar{D}_A = \bar{D}_B = \frac{h}{h + \lambda y_b} D_A + \frac{\lambda y_b}{h + \lambda y_b} D_B + \frac{\lambda y_b h}{(h + \lambda y_b)^2} \cdot \frac{y_b}{(h + \lambda y_b)k} (U_A - U_B)^2 \quad \dots \dots \dots \quad (34)$$

となる。(34)式より、主流、交換層において分散雲の拡がりより観測される分散係数は、主流、交換層において同一であり、その値は、主流の分散係数、浸透流の分散係数に、それぞれ主流流積、交換層流積を乗じて重みつき平均したものに加え、主流と交換層との平均流速の違いと主流、浸透流間の物質輸送によって生じる分散効果( (34)式第3項)を加えたものである。

**Fig. 10(a)** は、 $s$  をパラメータとして、 $\sigma_A^2$  と時間の関係を両対数紙上、および普通紙上に示したものであるが、これらの図より、 $\sigma_A^2$  は、 $1 \leq st \leq 10$  において急激に増加し、 $st \geq 10$  程度で線形的成長へ移行することがわかる。また、この特性は、 $s$  の値にはさほど依存しない。  
**Fig. 10(b)** は、同様の関係を普通紙に示したものである。図中の破線は、(33. a)式において、 $st \rightarrow \infty$ とした時の関係式

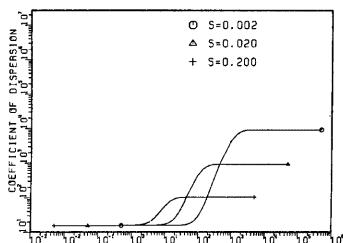


Fig. 11 Time dependent growth of dispersion coefficient

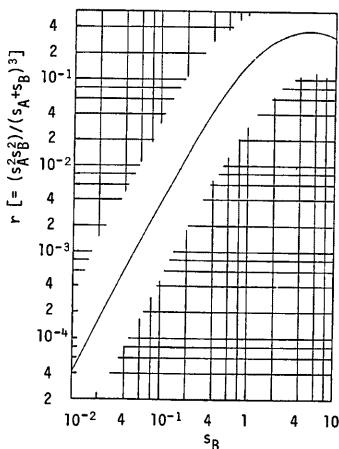


Fig. 12 Relationship between  $r$  and  $y_b/h$ .

$$\sigma_x^2|_{st \rightarrow \infty} = 2Dt - a_0/\theta - (\Omega_A/\theta)^2$$

をプロットしたものであるが、 $st=7$  で実線と破線は一致し、2次中心モーメントが非線形的成長から、線形的成長へ移行していくことがわかる。

次に、(33-a)式と(27)式の定義式によって計算される分散係数と時間の関係を  $s$  をパラメータとして両対数紙上に示したものが Fig. 11 である。同図においても、Fig. 10 に対応して、分散係数は  $st > 7 \sim 10$  で、 $s$  に対応した一定値となり、この領域で分散雲が線形的成長をすることがわかる。また、 $st < 7 \sim 10$  においては、分散係数は過少評価され、 $st < 10^{-1}$  で、主流の分散係数  $D_A$  に収束していることがわかる。

次に、分散係数の値についてみると、後述するような実験室スケールの流れでは、水理条件に対する依存性はあまりみられず、 $s$ (30)式の値による変化が顕著である。すなわち、主流水深、交換層厚さ、空隙率、交換速度の変化により、分散係数の値は大きく変化する。これは、(34)式第3項がこれらの値により大きく変化する為であって、Fig. 12 に、 $\gamma = \lambda h y_b^2 / (h + \lambda y_b)^3$  と、 $y_b/h$  の関係を示した。同図より、 $\gamma$  は  $10^{-2} \leq y_b/h \leq 10$  に対応して、 $4 \times 10^{-5} \leq \gamma \leq 4 \times 10^{-1}$  の値で大きく変化し、 $\lambda y_b = 2h$  の時極大値を有することがわかり、浸透層上の流れにおける分散係数の推定に際しては、 $y_b$  および、 $h$  の評価が重要となることが知れる。

## 5. 浸透層上の流れにおける移流分散実験

### 5.1 実験目的

前章の理論解析によって、浸透流と主流との間に物質交換が存在する浸透層上の流れにおいては、流下方向の物質輸送特性が不浸透層上の流れにおけるものと比較して著しく異なることが示された。実験は、前章の成果を検証することを目的とし、主流における塩水濃度の時間的変化の測定による移流速度と分散係数の測定を主たる目的としている。また、付随的に、交換層厚さの測定も行われた。

### 5.2 実験装置と実験法

実験には、第3章で述べた実験と同じく全長 34 m のアクリル製可変勾配水路が用いられた。水路幅は、角型鋼により 5 cm に調整された。これは、トレーサーが水路幅方向にすみやかに混合し、主流分散係数  $D_A$  もできるだけ小さくするためである。

浸透層は、Fig. 13 に示される粒径分布をもった2号ケイ砂（代表粒径  $d_{50}=2.77$  mm）を自然落下させ、その後平滑に 5 cm 厚さに敷きならし、第3章の実験と同様に空気泡を除去した。間隙率  $\lambda$  は、 $\lambda=0.416$  であり、また透水試験により求められた透水係数は  $K=0.014$  cm/s である。

流量測定は、水路下端に長さ 1 m のブリキ製の栓を主流部にはめこみ、主流部流量 ( $Q_A$ ) と浸透層内流量 ( $Q_B$ ) を分離し、計量用ボリバケツ、メスシリンダー、ストップウォッチにより個別に計測した。

トレーサーとしては、メタノールにより比重調整された食塩水が用いられ、水路中心、主流の半水深の1点、および、浸透層内で濃度測定した。

使用した水路系、濃度測定システムは、著者らがかつて行った不浸透層上の流れにおける移流分散実験において用いたものと同一であり、また、データ処理法もそれに準じているので、詳細は参考文献<sup>11)</sup>を参照されたい。

次に、交換層厚さの測定は、第3章における実験と同様に染料を用いた可視化によって行われているが、浸透層下

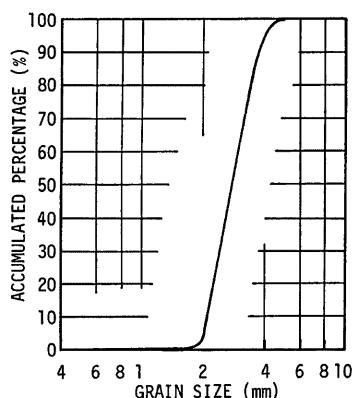


Fig. 13 Grain size accumulation curve of permeable boundary used in dispersion experiment.

層より染料投入を行った結果より染料に染まらなかった面積を用いて求められている。

### 5.3 実験結果

実験は、上述の水路において、路床勾配を3通りにかえ、また、同一の勾配において、2通りの流量を用いて計6回の実験を行った。実験諸量は、Table 5に示すとおりであり、同表中の第(9)欄  $U_A$  は  $Q_A$  を主流流積 ( $Bh$ ) で除した主流断面平均流速であり、第(10)欄  $U_B$  は、 $Q_B$  を浸透層内間隙面積 ( $25\lambda \text{ cm}^2$ ) で除した浸透層内断面平均実流速である。

主流、浸透流における濃度測定結果より得られた分散雲の1次モーメントと時間の関係を示すと Fig. 14 のようである。プロットされた点群は、それぞれ直線上に並んでおり、これらの直線の勾配より求まる伝播速度は、全測定区間を通じて、ほぼ一定であり、また、主流、浸透流における伝播速度も同一であることがわかる。なお、同図中には、主流における分散雲のピーク濃度の到達時間と距離の関係も示されているが、これよりピーク濃度の伝播速度は、分散雲の重心の移流速度よりもかなり速く、分散雲の濃度波形は、立ち上りが急で、後に尾をひく歪んだ形となっていることがわかる。また、このピーク濃度の伝播速度は、ほぼ主流断面平均流速に一致している。これらのことより、主流における分散雲の伝播速度は、断面平均流速に比較して小さく、前章で示したような主流と浸透流間の物質輸送の効果が生じていることがわかる。

次に、主流における分散雲の統計的分散（2次中心モーメント）と時間の関係の一例を示したもののが、Fig. 15 である。同図にみられるように不浸透層上の流れにおいて観測されるのと同様に、浸透層上の流れにおいても、2次中心モーメントは、トレーサー投入点近傍で非線形に成長し、流下距離が大きくなるにつれて線形的に成長する。しかし、この非線形成長区間は、不浸透層上の流れにおけるもの<sup>10)</sup>より、はるかに大きいものであり、前章の理論解析で示されたような、主流と浸透流における物質輸送による効果と考えられる。

同図の勾配より、分散係数  $D_A$  は

Table 5 Experimental conditions in dispersion experiments

RUN NO.	(1) I (cm)	(2) h (cm)	(3) $y_b$ (cm)	(4) $u_*$ (= $\sqrt{gRl}$ ) (cm/s)	(5) $Q_A$ ( $\text{cm}^3/\text{s}$ )	(6) $Q_B$ ( $\text{cm}^3/\text{s}$ )	(7) $A_A$ (= $Bh$ ) ( $\text{cm}^2$ )
A1	1/484	2.38	2.08	1.57	176.4	11.00	11.90
A2	1/484	1.19	2.55	1.28	63.0	6.95	5.95
B1	1/250	2.15	2.71	2.13	212.6	10.85	10.75
B2	1/250	1.48	3.27	1.91	125.4	7.55	7.40
C1	1/125	2.35	3.36	3.08	402.7	11.23	11.75
C2	1/125	1.74	2.95	2.84	264.8	9.90	8.70
	(8) $A_B$ ( $\lambda = 0.416$ ) ( $\text{cm}^2$ )	(9) $U_A$ ( $Q_A/A_A$ ) (cm/s)	(10) $U_B$ ( $Q_B/A_B$ ) (cm/s)	(11) $Re$ , $NO$ ( $\nu = 0.011$ )	(12) $Fr$ , $NO$ (= $U_A/\sqrt{gh}$ )	(13) $B/h$	
A1	10.4	14.8	1.06	3202	0.360	2.10	
A2	10.4	10.6	0.668	1147	0.310	4.20	
B1	10.4	19.8	1.04	3870	0.431	2.33	
B2	10.4	16.9	0.726	2274	0.444	3.38	
C1	10.4	34.3	1.08	7328	0.715	2.13	
C2	10.4	30.4	0.952	4809	0.736	2.87	

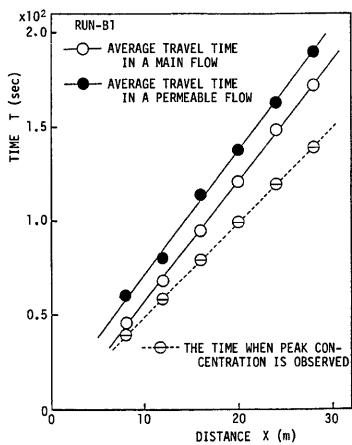


Fig. 14 Mean travel time of tracer cloud at measuring positions.

$$\bar{D}_A = \frac{1}{2} U_{CA}^3 \frac{d\sigma_t^2}{dx} \quad \dots \dots \dots \quad (35)$$

を用いて計算される。

## 5.4 考察

分散雲の1次モーメント、2次中心モーメントの挙動より求められた伝播速度、分散係数等が Table 6 に示されている。これらの実験結果と第4章で述べた理論的成果との検討を行えば、次のようである。

### (1) 分散雲の伝播速度

主流、および交換層における分散雲の伝播速度が Table 6 第(2), (3)欄に示されている。第(4)欄には、第4章で示された(32)式による理論値が示されている。また、第(5)欄は主流断面平均流速である。これらの値より、主流、交換層における分散雲の伝播速度は同一であり、その値は、(32)式によって推定される値に極めてよく一致することがわかる。

## (2) 分散係数

**Table 6** 第(6)欄に主流において観測された分散係数を示した。主流の分散係数  $D_A$  の推定値としては、

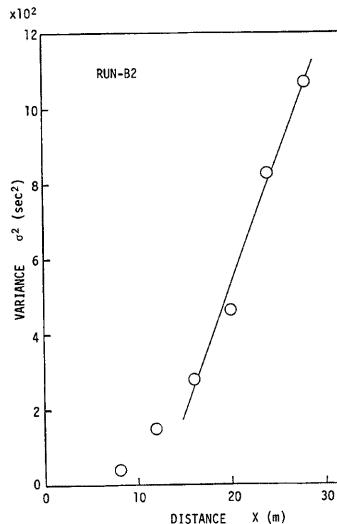


Fig. 15 Time dependent growth of variance obtained in a dispersion experiment.

Table 6 Experimental results in dispersion experiments

(1) RUN NO.	(2) $U_{CA}$	(3) $U_{CB}$	(4) $U_{CP}$ (cm/sec)	(5) $U_A$	(6) $D_{ob}$ hu*	(7) $D_A$ hu*	(8) B/h	(9) $D_B$ hu*	(10) k/u* ( $\times 10^{-2}$ )	(11) $k_{10}/u_*$
A1	13.0	12.0	11.5	14.8	178	13.1	2.10	8.06	7.54	3.27
A2	5.31	5.35	6.19	10.6	1204	26.2	4.20	11.3	1.97	0.856
B1	15.5	15.2	13.6	19.8	663	14.5	2.33	8.29	2.68	1.16
B2	10.7	10.8	9.28	16.9	1454	21.1	3.38	8.43	1.71	0.743
C1	24.5	21.2	22.0	34.3	1039	13.2	2.13	5.44	2.57	1.12
C2	20.0	19.4	18.4	30.4	1023	17.9	2.88	4.89	2.75	1.19

岩佐・綾・薬師寺の不浸透性路床上の開水路流れにおける分散係数測定実験値<sup>11)</sup>より、最小二乗法を用いて得られた

により推定した値を **Table 6** 第(7)欄に示した。また、第(9)欄には、山田ら<sup>1)</sup>の提案する浸透層内流速分布式を用いて、Elder の手法<sup>12)</sup>に従って求められた浸透層内分散係数  $D_B$  を示した。 $D_A$ ,  $D_B$  に比較して、 $D_{ob}$  は極めて大きな値を取っており、主流と浸透流間の物質交換の効果である(34)式第3項により、観測された分散係数が極めて大きくなったものと考えられる。

### (3) 交換速度

(34)式より、交換速度  $k$  が

により求まる。この値が、Table 6 第(10)欄に示されている。第(11)欄は、第3章におけるCシリーズの実験結果と比較の為、底を10とする場合の値に改めたものである。2種の実験では、水理量、交換層厚さの測定法が異っており、また、交換層厚さ、交換速度の水理量に対する依存性が明らかでない現在、直接比較する意味は大きくないが、共に  $10^{-2}$  cm/s のオーダーではあるが、第3章における測定値の方がやや大きくなる値となっている。

#### (4) 河川における分散係数に及ぼす浸透層の影響

河川は、本研究で対象としている浸透性路床上の流れの代表的な例である。Godfrey-Frederick による河川の分散係数の測定例<sup>13)</sup>では、 $D/hu_*$ =180~600 程度と報告されており、実験水路における分散実験により得られた(36)式をアスペクト比を  $20 \leq B/h \leq 50$  に外挿して得られる値は、 $D/hu_*=125\sim300$  程度の値である。

次に、(34)式第3項の値  $D_B$  を次の様に推定する。まず、交換速度としては本実験における平均的な値  $k = 2.0 \times 10^{-2} u_*$  を用いるものとし、空隙率は  $\lambda = 0.42$  を用いる。また、浸透層平均流速  $U_B$  は、河川の平均流速  $U_A$  に対して無視できるものとする。Goldfrey-Frederick らの資料では、 $U_A = 10u_*$  程度、 $h = 10^2 \text{ cm}$  程度である。河川における  $y_B$  の推定は予断を許さないが、本研究で得られたような  $y_B = 2 \sim 4 \text{ cm}$  程度の値とする。以上の値から、 $D_B = (0.5 \sim 5)hu_*$  と計算され、これは、前述の値に対して無視できる大きさであり、通常の河川においては、浸透層の影響は考慮する必要はないものと考えられる。しかし、 $y_B$  についての(4)式の関係がより大きなスケールの浸透層構成材料についても適用可能とするならば、水深が浅く、河床材料が大きい山地河川や、アスペクト比の小さい河川では、浸透層の影響を考慮する必要があることがわかる。

6. 結論

砂、礫等で構成される浸透性路床上の流れにおいて、浸透層内流れと浸透層上の流れの間に生じる物質輸送について実験的に明らかにした。また、その流下方向の物質輸送に及ぼす影響について、理論的に検討するとともに実験により検証した。本研究で得られた主要な結果を述べると、まず、水路方向の物質輸送について

- 1)主流と浸透流との間の物質輸送の見地からは、浸透層は、浸透層A、B、Cの3種に区分されるが、これらのうち、物質輸送に関係するのは主として、浸透層A、Bの2領域である。
  - 2)浸透層A（交換層セル）は、浸透層上部に位置し、セル状の形態をとり、最も主流との交換の盛んな領域である。この領域は、境界面のおよそ80%の面積を占め、その形状比は、浸透層構成材料、水理量にかかわらず、0.25程度となる。また、交換層セルの厚みは、浸透層構成材料の代表粒径に依存する。

3) 物質輸送特性が、減衰時間定数、交換速度、拡散係数の形で検討されたが、これらは、水理量、浸透層構成材料に依存する。

次に、流下方向の輸送については、理論的、実験的に以下のことが明らかとなった。

4) 分散雲の移流速度は、主流、浸透流を通じて同一であり、主流の平均流速、浸透流の平均流速にそれぞれ、主流流積、交換層流積を重みとして加重平均されたものに一致する。

5) 主流、浸透流において観測される分散係数は、両者で同一であり、主流の分散係数、浸透流の分散係数に、それぞれ、主流流積、交換層流積を重みとして加重平均したものに加え、主流と交換層との平均流速の差、およびその間の物質輸送によって生じる分散効果の和となる。

6) 移流速度、分散係数は、本研究で導入されたパラメータ  $\theta_s$  に依存し、水深が浅く路床材料の大きい流れや、アスペクト比の小さい流れでは、不浸透層上の流れに比較して、著しく異なってくるが、一般河川においては、その影響は、さほど大きないと推定される。

得られた知見は以上のようにあるが、浸透層内の流れは複雑であり、本実験で明らかとなった知見を基礎として、浸透層内流れ、およびそれに伴う物質輸送について、理論的、実験的検討を進めてゆきたいと考えている。

最後に、本研究を進めるにあたって京都大学大学院生三石真也（現在建設省勤務）、西内美宣両氏の協力を得た。記して深謝する。また、本研究の一部は、文部省科学研究費の補助を得て行われたものであることを付記して謝意を表する。

### 参 考 文 献

- 1) 山田 正・川端規之：浸透層上の流れの抵抗則に関する理論的研究、土木学会論文報告集、第325号、1982, pp. 69-80.
- 2) 辻本哲郎・中川博次：移動床流れにおける浸透流の存在の意義、第29回水理講演会論文集、1985, pp. 525-530.
- 3) 神田 徹・喜久里政宏・佐伯武俊：透水性床面下の流れに関する実験的研究、土木学会第33回年次学術講演会講演概要集第2部、1978, pp. 648-649.
- 4) Einstein, H. A.: Deposition of Suspended Particles in a Gravel Bed, J. Hydraulics Division, Proc. ASCE, Vol. 94, No. HY5, 1968, pp. 1197-1205.
- 5) 芦田和男・江頭進治・金屋敷忠儀・小川義忠：河道における微細土砂の生産・流出機構に関する研究、京大防災研年報、第23号B-2、1980, pp. 413-431.
- 6) 中井俊雄・岩佐義朗・綾 史郎：開水路流れにおける濁度の流下方向の低減について、土木学会第39回年次学術講演会講演概要集第2部、1984, pp. 593-594.
- 7) 長岡 裕・大垣真一郎・花木啓祐：浸透性河床における硝化機構：土木学会第40回年次学術講演会講演概要集第2部、1985, pp. 769-770.
- 8) 玉井信行：密度流の水理、新体系土木工学22、技報堂、1980, pp. 178-182.
- 9) 中川博次・狩津家久：透水性開水路乱流場における主流と浸透流との相互作用、土木学会論文報告集、第244号、1975, pp. 81-90.
- 10) Iwasa, Y. and S. Aya : Lagrangian Characteristics of Longitudinal Mixing in Free Surface Shear Flows, Proc. 21 IAHR Congress, Vol. 2, 1985, pp. 181-185.
- 11) 岩佐義朗・綾 史郎・薬師寺公文：開水路流れにおける分散係数、京大防災研年報、第26号B-2、1983, pp. 445-460.
- 12) Elder, J. W.: The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow, J. Fluid Mechanics, Vol. 5, 1959, pp. 544-560.
- 13) Godfrey, R. G. and B. J. Frederick : Stream Dispersion of Selected Sites Professional paper 433-K, U. S. Geological Survey, 1970.