

## せん断乱流場における Lagrange 相関関数

岩佐 義朗・綾 史郎・三石 真也

LAGRANGIAN AUTO-CORRELATION FUNCTION IN  
TURBULENT SHEAR FLOWBy *Yoshiaki IWASA, Shirou AYA, and Shinya MITSUIHSI*

## Synopsis

This paper deals with a longitudinal mixing of particles which are instantaneously released in a bounded turbulent shear flow. The movements of particles are described in view of the Lagrangian particle analysis. The similarity of concerned phenomena to the turbulent diffusion by continuous movements in a uniform turbulent flow is studied. The discrepancy of two phenomena is also shown with some discussions. In the mixing the Lagrangian auto-correlation function plays the most important role. Some auto-correlation functions in a turbulent shear flow are introduced and their dependency on a released position and travel time is discussed. The discussion gives useful information of estimating the Lagrangian auto-correlation function in a turbulent shear flow. Finally, the model of the Lagrangian auto-correlation function proposed by the authors in the other paper is referred, and the general features of longitudinal mixing given by the proposed model are compared with the past knowledge experimentally obtained.

## 1. はじめに

Taylor は、一様乱流場において、点  $\mathbf{x}=\mathbf{a}$  を時刻  $t=0$  に、出発する流体粒子の  $t$  秒後の位置の統計的分散  $\langle X'^2(\mathbf{a}, t) \rangle$  は、Lagrange の自己相関関数  $B_L(\tau)$  の時間積分で表現され、乱流拡散係数  $D$  は、Lagrange の乱れ強さ  $\langle v'^2 \rangle$  と積分時間スケール  $T_L$  の積であらわされることを示した<sup>1)</sup>。すなわち、

$$\langle X'^2(\mathbf{a}, t) \rangle = 2 \int_0^t (t-\tau) B_L(\tau) d\tau \dots\dots\dots (1)$$

$$D = \int_0^t B_L(\tau) d\tau \dots\dots\dots (2.a)$$

$$= \langle v'^2 \rangle T_L (t \rightarrow \infty) \dots\dots\dots (2.b)$$

である。ここに  $\langle \quad \rangle$ : 標本平均を示しており、また、

$$B_L(\tau) = \langle v'(t) v'(t+\tau) \rangle \dots\dots\dots (3)$$

$$T_L = \frac{1}{\langle v'^2 \rangle} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t B_L(\tau) d\tau \dots\dots\dots (4)$$

である。

本研究は、局所平均流速の分布形が  $y$  軸（水深）、 $z$  軸（水路幅）方向に非一様であるが、 $x$  軸（主流）方向には一様な、境界で囲まれた定常な 3 次元せん断乱流場を対象とし、このような流れに瞬間的に面源として投入された拡散粒子の主流方向の混合について扱い、このような現象が、上述の Taylor の乱流拡散理論と相似な手法で解析できることを示すものである。

すなわち、まずはじめに、混合現象を流体粒子の主流方向の散らばりとしてモデル化し、Lagrange 的に粒子の運動と拡がりを見述し、Taylor の古典乱流拡散理論との相似性、および相違について述べる。つき

に、理論の中心となる Lagrange の自己相関関数とその定義について考察を行うとともに、せん断乱流場におけるいくつかの自己相関関数について述べる。最後に、著者らが提案した、せん断乱流場における Lagrange の自己相関関数のモデル<sup>2)</sup>の特性について述べるとともに、従来の移流分散理論、および、移流分散実験において得られている知見との関係についてまとめた。

## 2. せん断乱流場における分散現象と乱流拡散理論

本章では、境界面で囲まれた流下方向に一樣なせん断乱流場における流下方向の混合現象を Lagrange 的に記述し、瞬間面源の条件における流下方向の物質輸送現象と、一樣乱流場における点源からの乱流拡散現象を記述する Taylor の乱流拡散理論との相似性について述べる。

### 2.1 平均量の定義

時刻  $t=t_0$  において、位置  $\mathbf{x}=\mathbf{a}$  に存在した粒子の  $t=t_0+s$  における速度、位置などの Lagrange 的量を、 $b(s; \mathbf{a}, t_0)$  で示すものとする。

$b(s; \mathbf{a}, t_0)$  について、以下の2種の平均を定義する。

$$\langle b \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N b(s; \mathbf{a}, t_{0i}) \dots\dots\dots (5)$$

$$[b] \equiv \frac{1}{A} \iint \langle b \rangle d\mathbf{a}_x d\mathbf{a}_z \dots\dots\dots (6)$$

$\langle b \rangle$  は、点  $\mathbf{x}=\mathbf{a}$  を異なった時刻  $t=t_{0i}$  に出発した  $N$  個の粒子に関する平均を示している。また、 $[b]$  は  $\langle b \rangle$  の出発断面  $(0, a_y, a_z) ((a_x, a_z) \cap A)$  に関する平均である。

乱流場は、定常であり、流下方向に一樣と仮定し、次の関係式の成立を仮定する。

$$\langle b \rangle = \frac{1}{L} \int b(s; \mathbf{a}, t_0) d\mathbf{a}_x \dots\dots\dots (7)$$

すなわち、点  $\mathbf{a}(0, a_y, a_z)$  を異なった時刻に出発する粒子群の標本平均  $\langle b \rangle$  と、時刻  $t=t_0$  に点  $\mathbf{a}(0, a_y, a_z)$  を通る  $x$  軸に平行な直線  $L$  上に存在する粒子群に関する平均とは一致するものと仮定する。

(7)式の仮定により、(6)式の平均は、

$$[b] = \frac{1}{A} \iint d\mathbf{a}_x d\mathbf{a}_z \frac{1}{L} \int b d\mathbf{a}_x \dots\dots\dots (8)$$

$$= \frac{1}{V_x} \iiint b d\mathbf{a}_x d\mathbf{a}_z d\mathbf{a}_x \dots\dots\dots (9)$$

であり、時刻  $t=t_0$  に領域  $V_x=AL(A$ ; 流積,  $L$ ;  $x$  軸方向の長さ) に存在する粒子群に関する体積平均に一致する。

### 2.2 分散現象の Lagrange 的記述

時刻  $t=t_0$  に  $x=0$  上の断面  $A_0$  に瞬間面源として、流下方向に一樣なせん断乱流場に投入された分散物質の流下方向の拡がりについて考える。

時刻  $t=t_0$  に点  $\mathbf{a}(0, a_y, a_z)$  を出発した粒子の時刻  $t=t_0+s$  における粒子速度を  $\mathbf{v}(s; \mathbf{a}, t_0)$ 、粒子位置を  $\mathbf{X}(s; \mathbf{a}, t_0)$  と記すと、

$$\mathbf{X}(s; \mathbf{a}, t_0) = \int_0^s \mathbf{v}(s'; \mathbf{a}, t_0) ds' + \mathbf{a} \dots\dots\dots (10)$$

である。

$x$  軸方向の粒子位置  $X(s; \mathbf{a}, t_0)$  に注目し、平均粒子位置を(6)式の平均操作により求めると、

$$[X(s; \mathbf{a}, t_0)] = \int_0^s [v_x(s'; \mathbf{a}, t_0)] ds' \dots\dots\dots (11)$$

である。ここに、 $X, v_x$  は、それぞれ  $\mathbf{X}, \mathbf{v}$  の  $x$  軸成分であり、 $[v_x]$  は、次式により定義される。

$$[v_x] \equiv \frac{1}{A_0} \iint \langle v_x(s; \mathbf{a}, t_0) \rangle da_x da_y \dots \dots \dots (12)$$

(8), (9)式の関係より(12)式は、

$$[v_x] = \frac{1}{V} \iiint v_x(s; \mathbf{a}, t_0) da_x da_y da_z \dots \dots \dots (13)$$

となる。Lagrange 的速度  $v_x(s; \mathbf{a}, t_0)$  は、点  $\mathbf{x} = \mathbf{X}(s; \mathbf{a}, t_0)$  における Euler 的速度  $u_x(\mathbf{x}, t_0+s)$  と等しいことより

$$v_x(s; \mathbf{a}, t_0) = u_x(\mathbf{x}, t_0+s) \dots \dots \dots (14)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(s; \mathbf{a}, t_0) \dots \dots \dots (15)$$

である。したがって、(13)式は

$$[v_x] = \frac{1}{V} \iiint v_x(s; \mathbf{a}, t_0) da_x da_y da_z \dots \dots \dots (16.a)$$

$$= \frac{1}{V} \iiint u_x(\mathbf{x}, t_0+s) dx dy dz \dots \dots \dots (16.b)$$

であり、Lagrange 積分 ((16.a)式) は、Euler 積分 ((16.b) 式) に変換される。すなわち、(16.a) 式の平均操作は、 $t=t_0$  に領域  $V$  に存在した粒子群の時刻  $t=t_0+s$  における粒子速度の出発点位置に関する平均であり、(16.b) 式は、 $t=t_0+s$  における位置に関する平均であり、両者は、積分順序が異なるだけであり、平均量は一致する。

$$\frac{1}{V} \iiint u_x(\mathbf{x}, t_0+s) dx dy dz = \frac{1}{A} \iint dy dz \frac{1}{L_x} \int u_x(\mathbf{x}, t_0+s) dx \dots \dots \dots (17)$$

であり、

$$\frac{1}{L_x} \int u_x(\mathbf{x}, t_0+s) dx = \frac{1}{T} \int_0^T u_x(\mathbf{x}, t_0+s') ds' = \bar{u}_x \dots \dots \dots (18)$$

の関係 (Euler 的速度  $u_x$  の時間平均は、 $x$  軸に関する平均に一致する) を用いれば、(16.b) 式は

$$[v_x] = \frac{1}{A} \int \bar{u}_x dy dz = U \dots \dots \dots (19)$$

であり、断面平均流速に等しいことが説明された。

次に、粒子の Lagrange 的乱れ  $v'_x$  は、

$$v'_x(s; \mathbf{a}, t_0) \equiv v_x(s; \mathbf{a}, t_0) - [v_x] \\ = v_x(s; \mathbf{a}, t_0) - U \dots \dots \dots (20)$$

となる。(14), (15)式の関係を用いれば、

$$v'_x(s; \mathbf{a}, t_0) = u_x(\mathbf{X}(s; \mathbf{a}, t_0), t_0+s) - U \dots \dots \dots (21)$$

であり、 $u_x$  を局所平均流速  $\bar{u}_x$  と、Euler 的な乱れ  $u'_x$  に分解すれば

$$v'_x(s; \mathbf{a}, t_0) = u'_x(\mathbf{X}, t_0+s) + \bar{u}_x(\mathbf{Y}) - U \dots \dots \dots (22)$$

となる。ここに、 $\bar{u}_x$  は、流下方向に一樣と考えているので、粒子の断面内の位置  $\mathbf{Y}(Y(s; \mathbf{a}, t_0), Z(s; \mathbf{a}, t_0))$  の関数となっている。さらに、 $\bar{u}_x$  を水深平均流速  $\bar{u}^y$  とそれからの偏差  $u''_x$  に分解すれば

$$u''_x \equiv \bar{u}_x(y, z) - \bar{u}^y(z) \dots \dots \dots (23)$$

$$\bar{u}^y \equiv \frac{1}{d} \int_0^d \bar{u}_x(y, z) dy \dots \dots \dots (24)$$

より、

$$v'_x(s; \mathbf{a}, t_0) = u'_x(\mathbf{X}, t_0+s) + u''_x(Y, Z) + \bar{u}^y(Z) - U \dots \dots \dots (25)$$

に分解できる。(25)式は、流下方向に一樣な境界で囲まれたせん断乱流場における Lagrange 的乱れが、Euler 的な乱れ成分  $u'_x(\mathbf{X}, t_0+s)$ 、局所平均流速が水深方向に非一樣に分布することによる乱れ成分  $u''_x(Y, Z)$ 、および局所平均流速が水路幅方向に非一樣に分布することによる乱れ成分  $\bar{u}^y(Z) - U$  から成り立っている。

ることを示している。

粒子の位置の平均位置からの偏差  $X'(s; \mathbf{a}, t_0)$  は

$$X'(s; \mathbf{a}, t_0) \equiv X(s; \mathbf{a}, t_0) - [X] \dots\dots\dots (26)$$

で定義され、(11), (20)式の関係より

$$\begin{aligned} X'(s; \mathbf{a}, t_0) &= \int_0^s (v_x(s'; \mathbf{a}, t_0) - U) ds' \\ &\overset{b)}{=} \int_0^s v'_x(s'; \mathbf{a}, t_0) ds' \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

となる。

粒子位置の統計的分散は、(6)式の平均化操作により、

$$[X'^2] = \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 B_L(s_1, s_2; \mathbf{a}, t_0) \dots\dots\dots (28)$$

である。ここに、 $B_L$  は Lagrange 相関関数であって、(6)式より

$$B_L(s'_1, s'_2; \mathbf{a}, t_0) \equiv \frac{1}{A_0} \int \langle v'_x(s'_1; \mathbf{a}, t_0) v'_x(s'_2; \mathbf{a}, t_0) \rangle da_x da_z \dots\dots\dots (29)$$

である。次章で証明するように、境界で囲まれた流下方向に一樣なせん断乱流場では、 $B_L$  は、 $\sigma = s_1 - s_2$  のみの関数であるから、

$$[X'^2] = 2 \int_0^s (s - \sigma) B_L(\sigma) d\sigma \dots\dots\dots (30)$$

となる。

次に、乱流拡散(移流分散)係数は、

$$\begin{aligned} D_L &\equiv \frac{1}{2} \frac{d[X'^2]}{ds} = \int_0^s B_L(\sigma) d\sigma \dots\dots\dots (31) \\ &= [v_x'^2] T_{sL} (s \rightarrow \infty) \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

$$T_{sL} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T B_L(\sigma) d\sigma / [v_x'^2] \dots\dots\dots (33)$$

となる。

(30)~(33)式の関係は、Taylor が示した一樣乱流場における乱流拡散理論(1)~(4)式と同等の関係を示している。しかしながら、以上の導出にも明らかなように、Lagrange 的乱れとして、(22)式を、Lagrange の相関関数として、(29)式による平均化操作によるものを用いる点が異なっている。

### 3. せん断乱流場における Lagrange 相関関数

本章では、次の3種の Lagrange 相関関数について考察するとともに、それらの相互関係について述べる。なお、考えている乱流場は、前章と同じく、局所平均流速の分布形が  $y$  軸(水深)方向、 $z$  軸(水路幅)方向に非一樣であるが、 $x$  軸(主流)方向には一樣な、境界で囲まれた定常なせん断乱流場である。

#### 3.1 自己相関関数の定義

Lagrange 的乱れを、(21)式で定義し、関数

$$b_L(s_1, s_2; \mathbf{a}, t_0) = v'_x(s_1; \mathbf{a}, t_0) v'_x(s_2; \mathbf{a}, t_0) \dots\dots\dots (34)$$

に関する以下の平均量について考える。

$$\langle b_L(s_1, s_2; \mathbf{a}, t_0) \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v'_x(s_1; \mathbf{a}, t_{0i}) v'_x(s_2; \mathbf{a}, t_{0i}) \dots\dots\dots (35)$$

$$[b_L(s_1, s_2; \mathbf{a}, t_0)] \equiv \frac{1}{A} \iint da_x da_z \langle b_L(s_1, s_2; \mathbf{a}, t_0) \rangle \dots\dots\dots (36)$$

$$\bar{b}_L(s_1, \sigma; \mathbf{a}, t_0) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v'_x(s_1; \mathbf{a}, t_0) v'_x(s_1 - \sigma; \mathbf{a}, t_0) ds_1 \dots\dots\dots (37)$$

$\langle b_L \rangle$  は、点  $\mathbf{x}=\mathbf{a}$  を異なった時刻  $t=t_{0i}$  に出発した粒子の  $t=t_{0i}+s_1$ ,  $t=t_{0i}+s_2$  における Lagrange 速度について、出発粒子数  $N$  により平均化して求められる Lagrange 相関である。 $[b_L]$  は、 $\langle b_L \rangle$  を粒子の出発断面 ( $A_0$ ) に関して平均化したものである。

第2章で述べたと同様に

$$\langle b_L \rangle = \frac{1}{L} \int b_L da_x \dots\dots\dots (38)$$

の成立を仮定すると、(36)式の平均操作は、体積平均操作に一致する。すなわち、

$$[b_L(s_1, s_2; \mathbf{a}, t_0)] = \frac{1}{V_a} \iiint b_L da_x da_y da_z \dots\dots\dots (39)$$

また、 $b_L$  は、1個の時系列  $v'_x(s; \mathbf{a}, t_0)$  より通常の時系列解析により得られる Lagrange 相関関数である。

**3.2 自己相関関数の空間依存性**

まず、準備として、遅れ時間  $\sigma=s_1-s_2$  を用いて、 $b_L$  を書きかえる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} v'_x(s_2; \mathbf{a}, t_0) &= v'_x(\sigma; \mathbf{a}', t_0+s_1-\sigma) \\ v'_x(s_1; \mathbf{a}, t_0) &= v'_x(\sigma; \mathbf{a}', t_0+s_1-\sigma) \\ \mathbf{a}' &= \mathbf{X}(s_1-\sigma; \mathbf{a}, t_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

より、(34)式は、

$$\begin{aligned} b_L(s_1, s_2; \mathbf{a}', t_0) &= v'_x(\sigma; \mathbf{a}', t_0+s_1-\sigma) v'_x(\sigma; \mathbf{a}', t_0+s_1-\sigma) \\ &= b(\sigma; \mathbf{a}', t_0+s_1-\sigma) \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

である。すなわち、(34)式では、 $t=t_0$  に  $\mathbf{x}=\mathbf{a}$  を出発した粒子の  $t=t_0+s_1$  と  $t=t_0+s_2$  における粒子の乱れ速度の積として表現していたが、(41)式では、 $t=t_0+s_1-\sigma$  に、 $\mathbf{x}=\mathbf{a}'$  に存在する粒子の  $t=t_0+s_1-\sigma$  と、 $t=t_0+s_1$  とにおける粒子の乱れ速度の積で表現する。

(1)  $[b_L]$

$[b_L]$  は、第2章で述べたようなせん断乱流場における乱流拡散(移流分散)現象を記述する最も基礎的な相関関数であり、これは、以下に示すような考察より、遅れ時間  $\sigma$  のみの関数であることがわかる。

(39)、(41)式の関係より

$$\begin{aligned} [b_L] &= \frac{1}{V_a} \iiint b(\sigma; s_1; \mathbf{a}, t_0) da_x da_y da_z \\ &= \frac{1}{V_a} \iiint b(\sigma; \mathbf{a}', t_0+s_1-\sigma) da'_x da'_y da'_z \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{A'} \iint \langle b'_L \rangle da'_x da'_z \dots\dots\dots (43)$$

$$\langle b'_L \rangle = \frac{1}{L_a} \int b(\sigma; \mathbf{a}', t_0+s_1-\sigma) da'_x \dots\dots\dots (44)$$

(42)~(44)式の積分の変形の意味は、Fig. 1 に示すとおりである。対象としている乱流場は、 $x$  軸方向に

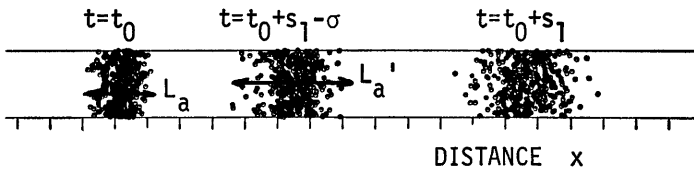


Fig. 1 Diffusion of particles released at time  $t=t_0$

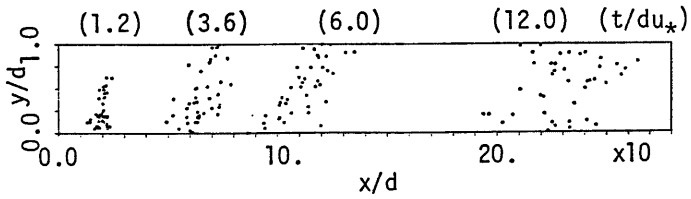


Fig. 2 Diffusion of particles released at a point  $x=a$

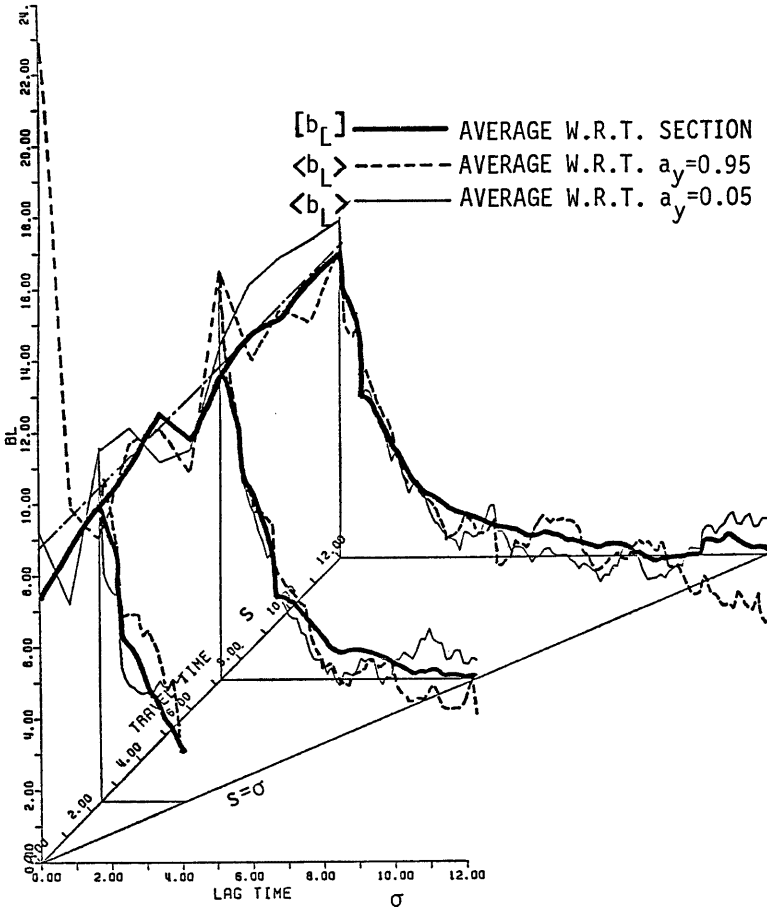


Fig. 3 Relationship of  $\langle b_L \rangle$  with  $[b_L]$

一様であり、定常であるから、 $\langle b_L \rangle$  は、出発時刻  $t = t_0 + s_1 - \sigma$  に依存しない。すなわち、

$$\langle b_L \rangle = \langle b_L \rangle(\sigma; a'_s, a'_s)$$

である。更に、(43)式の平均化を行うことにより、 $[b_L]$  は、遅れ時間  $\sigma$  のみの関数となる。

また、 $\langle b_L \rangle(\sigma) = \langle b_L \rangle(-\sigma)$  であることも、 $-\sigma = s_1 - s_2$  とおくことにより、同様に考察される。

(2)  $\langle b_L \rangle$

第2章で述べたように、点  $(0, a_s, a_s)$  を  $t = t_0$  に出発する拡散粒子に関して平均化される相関関数である。対象とする乱流場は、定常であること、および、 $y, z$  軸方向に非一様であることより、出発時刻には依存しないが、トラベルタイム  $s_1, s_2$  (あるいは、 $s_1, s_2$  のいずれかにかえて遅れ時間  $\sigma$ )、および、出発点  $(0, a_s, a_s)$  の関数である。しかし、トラベルタイム  $s_1$  が大きくなれば、 $\langle b_L \rangle$  は、遅れ時間  $\sigma$  のみの関数となることが以下の考察により知れる。すなわち、(41)式の関係より

$$\langle b_L \rangle = \langle v'_x(\sigma; a', t_0 + s_1 - \sigma) v'_x(0; a', t_0 + s_1 - \sigma) \rangle \dots \dots \dots (45)$$

であり、トラベルタイム  $s_1$  が十分大きくなると、 $t = t_0$  に点  $a$  に存在していた粒子群は、断面内に十分拡がり、その存在確率は、断面内の位置  $(a'_s, a'_s)$  に依存しなくなりどこでも等しく (Fig. 2)、平均操作  $\langle \rangle$  は、断面平均操作と同等となることが期待でき、これは  $[b_L]$  に一致する。

著者らの開発した Lagrange 的数値実験法<sup>9)</sup>により、2次元せん断乱流場を対象として、模擬発生させた Lagrange 的乱れを用いて、 $\langle b_L \rangle$  と  $[b_L]$  の関係を示したものが Fig. 3 であり、トラベルタイム  $s$  が小さい間、出発点に依存していた  $\langle b_L \rangle$  が、 $s$  の増大とともに、 $[b_L]$  に漸近していく様子が示されている。

(3)  $b_L$

$b_L$  は(37)式により定義されるが、 $T$  が十分大きいとき、出発点  $(0, a_s, a_s)$  に依存せず、遅れ時間  $\sigma$  のみの関数となり、 $[b_L]$  に一致することが、次に示す考察より明らかである。

(37)式の平均化は、時間  $T$  を  $N$  分割し、断面内の小領域  $dA_i$  に粒子が存在する回数を  $n_i$  とすると、 $dA_i$  に粒子が存在した時刻  $t = t_0 + s_{ij} - \sigma$  ( $1 \leq j \leq n_i$ ) を引数として、

$$b_L = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} ds v'_x(0; a', t_0 + s_{ij} - \sigma) v'_x(\sigma; a', t_0 + s_{ij} - \sigma) \dots \dots \dots (46)$$

となる。ここに、 $ds = T/N$ 、 $\sum_i n_i = N$ 、 $a' = X(s_{ij} - \sigma; a, t_0)$  である。(46)式の平均化の意味は、Fig. 4 に示している。Fig. 5 は、 $t = t_0$  に点  $a$  を出発した1つの粒子の軌跡を例示したものであるが、トラベルタイム  $s_1$  が大きくなるにつれて、粒子は、断面内をくまなく動きまわる。断面内の部分領域  $dA_i$  に粒子が存在する確率は、 $p_i = \sum_{j=1}^{n_i} ds/T$  で示されるが、 $T$  が十分大きくなると  $p_i$  は、断面内の位置に依存せず、どこでも等しくなり、 $a'$  に関する積分と等価とすることができる。

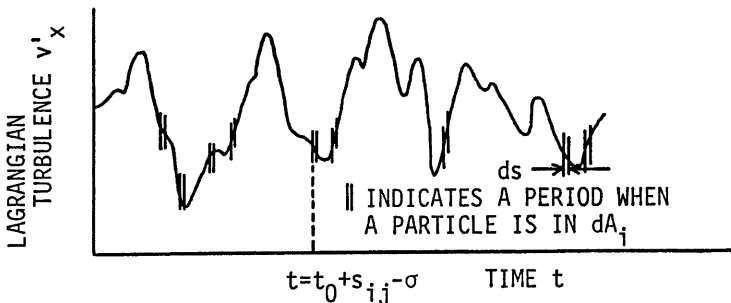


Fig. 4 Temporal Averaging Process of  $v'_x(s)v'_x(s-\sigma)$

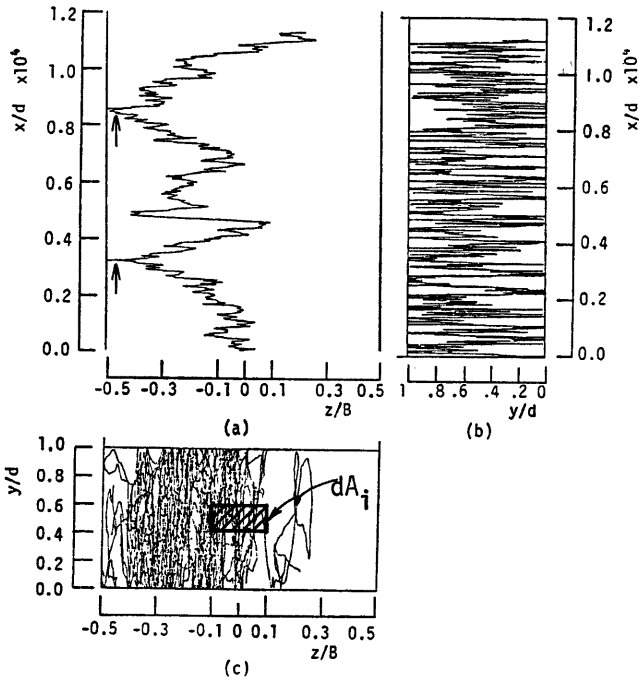


Fig. 5 Movements of a particle released at a point  $\mathbf{x}=\mathbf{a}$

以上に示されるように、せん断乱流場における Lagrange 相関関数  $\langle b_L \rangle$ ,  $b_L$  は拡散粒子がトラベルタイムの増大とともに、有限の断面内に一様に拡がることにより、出発点  $\mathbf{x}=\mathbf{a}$  に対する依存性を失い、 $\langle b_L \rangle$  に漸近していくことが期待される。しかし、その漸近度は、拡散粒子の断面内への拡がり速度、せん断乱流場の非一様性の強さに依存するものであり、このような現象における Lagrange の相関関数の測定法に留意する必要があることが示された。

#### 4. 3次元せん断乱流場における相関関数モデルの特性

筆者らは、本論文で対象とするようなせん断乱流場における Lagrange の自己相関関数について、理論的に考察するとともに、数値実験を行ない、以下のような特性を明らかにした<sup>23,33,43</sup>。

$$B_L(0) = [v_i^2] = [v_x^2] + [v_y^2] + [v_z^2] \dots (47)$$

$$T_{sL} = \frac{[v_x^2]}{[v_y^2]} T_i + \frac{[v_y^2]}{[v_z^2]} T_s + \frac{[v_z^2]}{[v_x^2]} T_r \dots (48)$$

$$D_L = [v_x^2] T_i + [v_y^2] T_s + [v_z^2] T_r \dots (49)$$

ここに、



$$\left. \begin{aligned}
 [v_x'^2] &= \frac{1}{A} \int \bar{u}_x'^2 dA \\
 [v_y'^2] &= \frac{1}{A} \int \bar{u}_y'^2 dA \\
 [v_z'^2] &= \frac{1}{A} \int (\bar{w} - U)^2 dA \\
 T_t &= 0.72 d/u_* \\
 T_v &= \frac{1}{14.8} \frac{d^2}{\theta_s du_*} \\
 T_l &= \frac{1}{14.8} \frac{(B/2)^2}{\theta_s du_*}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$
  

$$\left. \begin{aligned}
 T_t &= 0.72 d/u_* \\
 T_v &= \frac{1}{14.8} \frac{d^2}{\theta_s du_*} \\
 T_l &= \frac{1}{14.8} \frac{(B/2)^2}{\theta_s du_*}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

である。

また、具体的な相関関数形のモデルとして、

$$B_L(\tau) = \frac{1}{[v'^2]_i} \sum_j [v'^2] \exp\left(-\frac{\tau}{T_i}\right) \quad (i=t, v, l) \dots\dots\dots (52)$$

を提案した。

これらの諸関係の成立と妥当性については、著者らの別報<sup>2),4)</sup>に既に報告したとおりであり、本論文では、著者らの水理実験結果<sup>6)</sup>を参考に、積分時間スケール  $T_{SL}$ 、自己相関関数  $B_L(\tau)$ 、および分散係数  $D_L$  の特性等について、水路の幾何学的特性や、従来からの知見との関係について述べる。

なお、以上の各式において、下添字  $t$  は、Euler 的速度場における時間的な乱れによる量に、 $v$  は、水深方向の局所平均流速の非一様性による量に、 $l$  は、水路幅方向の局所平均流速の非一様性による量に対応していることを示している。

**4.1 Lagrange の乱れ強さ:  $[v'^2]$**

Lagrange の乱れ強さは、(47)式のように3項の和で示されるが、局所平均流速の分布が一様な乱流場では、明らかに  $[v_x'^2] = [v_y'^2] = 0$  であり、また、局所平均流速の水深方向の分布形が水路幅方向に一様な2次元の流れでは  $[v_z'^2] = 0$  である。

各項の大きさについて一般的に論じることは困難であるが、浅野らの実験結果<sup>5)</sup>を参照すれば、 $[v_z'^2]/u_*^2 \approx 1.0 \sim 2.0$  程度の値であり、また、対数則が成立すれば、 $[v_x'^2]/u_*^2 = 6.25 \sim 11.0$  程度の値である。 $[v_y'^2]/u_*^2$  は、著者らの矩形断面水路における Euler 的流速測定結果<sup>4)</sup>からは、ほぼ、 $[v_x'^2]/u_*^2 \approx 10$  程度の値であるが、アスペクト比  $B/d$  の関数であって、アスペクト比が大きくなると2次元的に扱える領域が大きくなり、 $[v_y'^2]/u_*^2$  は減少する。なお、自然河川における流速測定結果の解析<sup>6)</sup>では、自然河川においても、三項の中で、 $[v_y'^2]/u_*^2$  が必ずしも卓越するものではないことが知られている。

**4.2 積分時間スケール:  $T_{SL}$**

(48)式にみられるように、積分時間スケール  $T_{SL}$  は、時間スケール  $T_t, T_v, T_l$  を各乱れ成分  $[v'^2]$  を重みとして、重みつき平均したものである。Fischer の仮定<sup>7)</sup>と異なり、3次元せん断乱流場においては、混合時間スケール  $T_i (i=t, v, l)$  と積分時間スケール  $T_{SL}$  は、異なった概念であり、その値も一致しない。

(51)式にみられるように、(48)式右辺第1、第2項は、水深  $d$ 、摩擦速度  $u_*$  の関数と考えられるが、第3項は、アスペクト比  $B/d$  の関数である。アスペクト比の大きい通常の開水路では、

$$T_t \gg T_v, T_l$$

であり、第3項が卓越する。また、(48)式より

$$T_l > T_{SL}$$

である。

#### 4.3 分散係数: $D_L$

(49)式にみられるように, 乱れ強さと同じく, Euler 的な速度場における時間的乱れによる項 (右辺第1項), 局所平均流速分布の水深方向の非一様性による項 (右辺第2項), および, 局所平均流速分布の水路幅方向の非一様性による項 (右辺第3項) の和からなっていることがわかる。各項は, いずれも, (乱れ強さ)  $\times$  (混合時間スケール) の形で表示されている。3次元せん断乱流場においては, 4.1, 4.2で示されたように,  $[v_i^2]/u_*^2$  の重みは, それほど大きいものではないが,  $T_i$  がアスペクト比の2乗に比例して大きくなる結果, 2次元せん断乱流場の分散係数に比較して, 大きな分散係数となる。

また, Fischer が直観的な Lagrange 的考察より導いた分散係数の推定公式<sup>7)</sup>

$$D = \frac{1}{A} \int (\bar{u} - U)^2 dA \cdot \frac{(B/2)^2}{14.8 \theta_* u_*^2}$$

では, 積分時間スケール  $T_{sL}$  と混合時間スケール  $T_i$  に混同があり, (49)式との比較からも明らかのように, 過大な推定値を与えることが推察される。

#### 4.4 相関関数形: $B_L/\tau$

(52)式の関数形からわかるように, 統計的分散  $\sigma_t^2$  は,  $t=0$  で,  $\sigma_t^2 \propto t^2$ ,  $t > (3 \sim 6) T_i$  で,  $\sigma_t^2 \propto t$  の関係があり, 統計的分散は, 線形に成長する。これは, 著者らが矩形断面水路における Euler 的な移流分散実験において得た知見<sup>9)</sup>に一致する。

したがって, 水理実験等において, モーメント法や, ルーチン法により分散係数を測定する際には, 統計的分散が線形に成長する領域

$$t > (3 \sim 6) T_i \quad \text{or} \quad x > (3 \sim 6) T_i U$$

における測定資料の解析によらなければならないが, これは, Fischer の示した領域区分<sup>7)</sup>に一致するものとなる。

## 5. 結 論

局所平均流速の分布形が水路幅, 水深方向には, 非一様であるが, 流れ方向には一様な境界で囲まれた定常な3次元せん断乱流場において, 瞬間的に面源として投入された拡散物質の主流方向の混合について Lagrange 的に論じた。得られた主要な結果を示せば, 次の様である。

1) 対象とする混合現象は, Taylor の乱流拡散理論と相似な方法によって解析される。ただし, Lagrange 的乱れは, 局所平均流速の分布形の非一様性を考慮したものであり, また, Lagrange の自己相関関数についても取り扱い, 異なったものとなる。

2) せん断乱流場におけるいくつかの Lagrange 相関関数を示し, その空間依存性, 相互関係について論じ, 1)の解析の中心となる Lagrange 相関関数の計測上の問題について述べた。

3) 著者らの提案する Lagrange 相関関数モデルについて述べ, 同モデルから導かれる積分時間スケール, 移流分散係数, 統計的分散の挙動についてまとめ, それらと, 従来の理論的成果, 移流分散実験より得られている知見との関係について述べた。

## 参 考 文 献

- 1) Taylor, G. I. : Diffusion by Continuous Movements, Proc. London Math. Society, A20, 1921, pp. 196-214.
- 2) Iwasa, Y. and Aya, S. : Lagrangian Characteristics of Longitudinal Mixing in Free Surface Shear Flows, Proc. 21st IAHR Congress, Melbourne, 1985 (accepted).
- 3) 岩佐義朗・綾 史郎・森田義則・西川秀昭: せん断乱流場における混合現象の Lagrange 的シミュ

レーション, 京都大学防災研究所年報第25号B-2, 1982, pp. 573-583.

- 4) 岩佐義朗・綾 史郎・薬師寺公文：開水路流れにおける分散係数, 京都大学防災研究所年報 第 26 号 B-2, 1984, pp.455~460.
- 5) 浅野富夫：開水路流れにおける乱れの時空間構造に関する研究, 京都大学博士論文, 1980.
- 6) 薬師寺公文：開水路流れにおける混合過程と分散係数に関する基礎的研究, 京都大学修士論文, 1983.
- 7) Fischer, H. B. : Longitudinal Dispersion in Laboratory and Natural Streams, Report No. KH-R-12, California Institute of Technology, 1966.