雨水流モデルの集中化に関する基礎的研究

高 棹 琢 馬・椎 葉 充 晴

LUMPING OF THE KINEMATIC WAVE MODEL

By *Takuma* TAKASAO and *Michiharu* SHIIBA

Synopsis

The kinematic wave flow model, which is a distributed runoff model, is transformed into a lumped runoff model which we call a "reservoir cascade" model.

The reservoir cascade model is obtained through the following procedure: the flow field is partitioned into a number of sections; the relation of the discharge at the end of each section and the storage within the section is determined by assuming that the water-surface profile can be approximated by that in a steady state; each section is regarded as a reservoir having the above storage-discharge relation, and the total system is regarded as a cascade of reservoirs.

After investigating several methods of partitioning the flow field, we found it preferable to partition the flow field so that the propagation time of rainwater disturbance in a steady state within each section is equal to each other, because it is robust against numerical round-off errors.

The relation of the lumping error and the number of reservoirs is clarifyed and is summarized in the form of a figure.

1. 序　　論

流域への降雨が対象地点の流出量に変換される過程の内実は流域内の雨水の流動過程にある。したがって雨水流動の物理的法則を明らかにし，それに基づいて降雨流出過程をモデル化することによってのみ，流出現象を普遍的に解明することができる。この観点に立って構成された流出モデルの一つが kinematic wave モデルである。

kinematic wave モデルは，数式上は，流量が流積の関数として表される一次元流れのモデルであって，流れの連続式に流量～流積関係式を代入して得られる一従属変数二独立変数の一階準形偏微分方程式で記述される。このように時刻以外に位置を表す独立変数を含むモデルは分布型モデルと呼ばれる。

一方，降雨から流出への変換過程に対して水文学的知識・経験に基づいて概念的な変換規則を設定し，これによって降雨から流出量を算定するモデルも考えられてきた。こうしたモデルの多くは，流出系の状態を有限個の変数で表し，設定された変換規則によってこれらの変数の時間的変化を常微分方程式で記述するものである。このように時刻以外の独立変数を含まないモデルは集中型モデルと呼ばれる。

降雨流出過程の内実は流域内の雨水流動にあり，その雨水流動法則は偏微分文程式で記述されるのが普通である。にもかかわらず集中型の流出モデルが構成され用いられてきた理由は，その取り扱いの容易さにある。一般に常微分方程式の方が偏微分方程式より解きやすいのである。しかしながら集中型モデルでは空間的変動は無視されるので，実際の現象が空間的広がりの中で生起するという事実の影響が大きい場合には，これを表現するために複数個の集中型モデルを連結したモデル化を考えなければならない。これを集中型モデルの分布化と呼んでよいだろう。こうした集中型モデルの分布化は，取り扱いの容易さをある程度保持しながら分布系としての流出系の特性をも考慮しようとするものであるが，分布化の規準は必ずしも明確では

ない。

本研究ではむしろ分布型モデルである kinematic wave モデルを集中型モデルに変換すること，すなわち集中化を考える。分布型モデルを出発点としてその集中化を議論することによって，集中型モデルの分布化と同じ利点を生み出すことができると同時に，集中化の規準を理論的に検討していくことができる。本論文では，kinematic wave モデルのなかでも特に単一要素 kinematic wave モデルの集中化を議論する。単一要素 kinematic wave モデルはその解法も容易であり，集中化を議論すべきはむしろ河道網系 kinematic wave モデルの方であるが，河道網系 kinematic wave モデルの集中化を直接議論するのは容易でないので，単一要素 kinematic wave モデルの特性とその集中化誤差構造を分析した上で，その考え方または結果を河道網系 kinematic wave モデルの集中化に応用するという方針で研究を進める。その意味で，本論文は kinematic wave モデルの集中化論の基礎編である。

kinematic wave モデルを連立常微分方程式系で近似するという考え方は，たとえば Muzik[1] にみられるが，単なる近似論であって本研究の観点とは異なるものである。

2. 単一要素 kinematie wave モデルの無次元化

本章では，単一要素 kinematic wave モデルを無次元化する。無次元化によって以後の議論が簡明になると同時に系の変換構造がより鮮明になる。

単一要素 kinematic wave モデルとは，

$$\partial h/\partial t+\partial q/\partial x=r(t),\quad q=\alpha h^m,\quad 0\leq x\leq L \quad\cdots\cdots(2.1)$$

で表わされるモデルのことをいう。ただし，t は時刻，x は位置を表わす独立変数，$\alpha>0$, $m\geq 1$ は流れの定数，$L>0$ は斜面長，$r(t)$ は時刻 t の降雨強度，h は水深，q は単位幅流量である。

(2.1)式による降雨から流出への変換構造を表現する最も重要な要素は時間遅れである[2]。そこで，降雨継続時間を t_r とおき，平均降雨強度

$$\bar{r}=\frac{1}{t_r}\int_0^{t_r}r(t)\,dt \quad\cdots\cdots(2.2)$$

を基準雨量強度として，降雨強度が一定値 $\bar{r}$ をとったとき斜面上流端 $x=0$ を出発した雨水擾乱が下流端 $x=L$ に到達するのに要する時間

$$t_c=\{L/(\alpha m\bar{r}^{m-1})\}^{1/m} \quad\cdots\cdots(2.3)$$

を基準時間として採用して，無次元時間 T, 無次元降雨強度 $R(T)$ を

$$T=t/t_c,\quad R(T)=r(t_cT)/\bar{r} \quad\cdots\cdots(2.4)$$

と定義する。位置，水深，流量についても，それぞれ，

$$X=x/L,\quad H=h/(\bar{r}t_c),\quad Q=q/(\bar{r}L) \quad\cdots\cdots(2.5)$$

によって無次元量を定義すると，(2.1) 式は，

$$\partial H/\partial T+\partial Q/\partial X=R(T),\quad Q=H^m,\quad 0\leq X\leq 1 \quad\cdots\cdots(2.6)$$

と無次元化される。

集中化問題を議論するには，降雨の時間的分布を，継続時間と配分のパターンとに分離した方が好都合であるので，降雨の時間的配分パターンを表わす関数 $P(\tau)$, $0<\tau<1$ を

$$P(\tau)=r(t_r\tau)/\bar{r} \quad\cdots\cdots(2.7)$$

によって定義する。$R(T)$ は，

$$T_R=t_r/t_c \quad\cdots\cdots(2.8)$$

とおくと，時間配分パターン $P(\tau)$ と T_R とを用いて，

$$R(T)=P(T/T_R) \quad\cdots\cdots(2.9)$$

と表わされるから，(2.6)式は

$$\partial H/\partial T+\partial Q/\partial X=P(T/T_R),\quad Q=H^m,\quad 0\leq X\leq 1 \cdots\cdots (2.10)$$

となる。よって，系の変換特性は，流れの非線形性を表わす指数 m, 降雨の継続時間に関する指標 T_R, 降雨の時間配分パターン $P(\tau)$ によって決定づけられることがわかる。

容易に知られるように，入力が一定の場合，$Q(X)$ は X に比例するから，水深 $H(X)$ は

$$H(X)\propto X^{1/m} \cdots\cdots (2.11)$$

にしたがう。よって，定常状態では，貯留量が与えられると各点 X での水深を求めることができる。(2.10)式は，水深分布 $\{H(X, T), 0\leq X\leq 1\}$ を状態量とする分布型状態空間型モデルである。しかし，系が定常であれば一個の状態量である貯留量から水深分布が決定づけられる。したがって，系が定常状態に近ければ少数個の状態量で水深分布を推定できるはずである。(2.10)式より，系が定常状態に近いかどうかは，指標 T_R が大きいか小さいかに依存することがわかる。よって，分布型状態空間型モデル (2.10) は，指標 T_R が大きいほど少数個の状態量をもつモデルで近似＝集中化できるはずである。逆に T_R が小さければより多くの状態量をもつモデルで集中化されなければならない。

3. 多段貯水池モデルによる単一要素 kinematic wave モデルの集中化

3.1 多段貯水池モデル

無次元化式(2.10)に対して，

$$0=X_0<X_1<\cdots<X_K=1 \qquad (3.1)$$

なる分点 X_i, $i=0, 1, \cdots, K$ (K はある自然数) をとって，区間 (X_{i-1}, X_i) での X に関する H の積分値を S_i, 分点 X_i での H, Q をそれぞれ H_i, Q_i と表わすと (**Fig. 1**),

$$dS_i/dT=F_iP(T/T_R)+Q_{i-1}-Q_i,$$
$$Q_i=H_i^m,\quad i=1, 2, \cdots, K \qquad (3.2)$$

が得られる。ただし，$F_i=X_i-X_{i-1}$, $Q_0=0$ とおく。

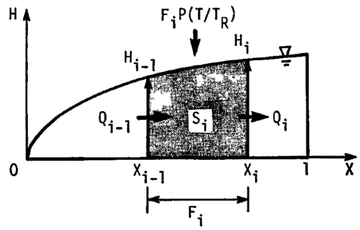

Fig. 1 Representation of a kinematic wave flow by a cascade of reservoirs

H_i が S_i の関数であれば(3.2)式で元の kinematic wave モデルが集中化できる。一般には H_i は S_i の関数として一意的に定まらないが，定常時には (2.11) の関係があるから，

$$H_i=b_iS_i/F_i \cdots\cdots (3.3)$$

とおくとき，

$$b_i=aX_i^{1/m}F_i/(X_i^a-X_{i-1}^a) \cdots\cdots (3.4)$$

と表わされる。ただし，$a=(m+1)/m$ とおいた。b_i は，区間 (X_{i-1}, X_i) の下流端水深 H_i の区間内平均貯水深 S_i/F_i に対する比を表わし，一般に $b_i>1$ である。(3.4) 式は，定常時にはこの b_i が定常入力値に依存しない定数であることを示している。

入力 $P(T/T_R)$ の時間的変化が緩やか，すなわち，T_R が大きいときは，水面形状を定常時のそれで近似してよいので，(3.2) 式の2番目の式に (3.3) 式を代入した多段貯水池モデル (reservoir cascade model) で kinematic wave モデルを集中化できる。

貯水池個数 K が与えられたときに分点 X_i をどのようにとるのがよいかは次の **3.2** で検討するが，ここでは，各分割区間 (X_{i-1}, X_i) での定常時伝播時間が等しくなるようにとることにし，b_i を決定する公式 (3.4) が適切であることを確認しておこう。このとき，分点 X_i は

$$X_i=(i/K)^m,\quad i=0, 1, \cdots, K \cdots\cdots (3.5)$$

によって定められる。**Fig. 2(a), (b)** は，降雨の時間配分パターン $P(\tau)$ が2等辺三角形状であり，降雨継続時間の指標 T_R が2，貯水池個数 K が2，流れの非線形指数 m が5/3の場合を例にとり，多段貯水池

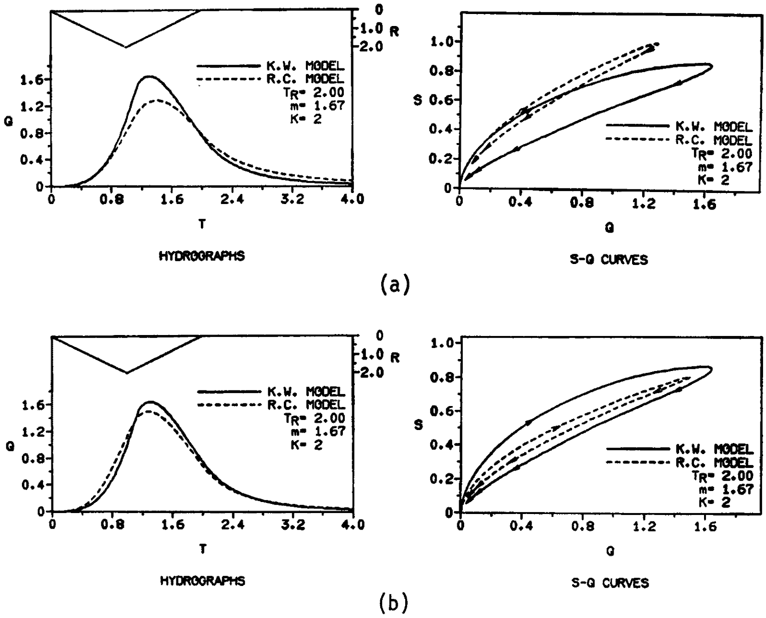

Fig. 2 Simulation of kinematic wave flows by reservoir cascade models (a) with $b_i=1$ and (b) with b_i given by eq. (3.4)

モデルによる流出計算結果・貯留量～流出量曲線をkinematic wave モデルによるそれと比較したものである。ただし，**Fig.2(a)** では $b_1=b_2=1$，すなわち，区間下流端水深が区間内平均貯水深に等しいとしており，**Fig.2(b)** では，b_1, b_2 を公式 (3.4) によって定めている。明らかに公式 (3.4) を用いた方がkinematic wave モデルをよく近似している。また，降雨継続時間の指標 T_R が5の場合について，b_1, b_2 を種々変化させたときの流出量を多段貯水池モデルで $\Delta t=0.05$ 間隔で $T=2T_R$ まで計算し，kinematic wave モデルによる値との差の2乗和を求めて等値線を示したのが **Fig.3** である。**Fig.3** 中，黒丸で示した点が公式 (3.4) による b_1, b_2 で，これからも公式 (3.4) が適切であることが確認できる。

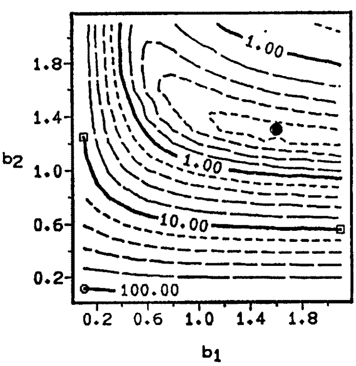

Fig. 3 Isoplethes of the sums of simulation errors for various sets of b_i. The number of reservoirs is 2.

3.2 区分法―分点の決定方法

貯水池 K が与えられたときに，分点 X_i をどのような規準で決定するかという問題が残されている。本研究では，次の4つの区分法を検討する。

①等伝播時間規準 (Equal Propagation Time Principle) 各区間（X_{i-1}, X_i）の擾乱の定常時伝播時間が相等しくなるようにする規準。上流端から位置 X までの擾乱の伝播時間は $X^{1/m}$ に比例する（(2.2) 式参照）から，この規準のもとでは，

$$X_i=(i/K)^m \qquad (3.6)$$

とすることになる。

②安定性規準 (Stability Principle)

(3.4) 式を用いて多段貯水池モデルは，

$$dS_i/dT=F_iP(T/T_R)+Q_{i-1}-Q_i, \quad Q_i=\alpha_i S_i^m \qquad (3.7)$$

と表される。ただし，$a=(m+1)/m$ とおいて，α_i は

$$\alpha_i=a^m X_i(X_i^a-X_{i-1}^a)^{-m} \qquad (3.8)$$

で与えられる。定常解近傍で微分方程式 (37) ができるだけ安定になるように分点 X_i を定めるという規準を安定性規準とよぶ。定常解近傍で準線形化し，係数行列の固有値の負の実部の最大値が小さいほど安定であることから，この規準のもとでは，

$$\frac{X_1}{X_1^a-X_0^a}=\cdots=\frac{X_i}{X_i^a-X_{i-1}^a}=\cdots=\frac{X_K}{X_K^a-X_{K-1}^a} \qquad (3.9)$$

を満たすように X_i を決めることになる。ただし，$X_0=0$, $X_K=1$ である。(3.9) 式を満たす X_i を陽に求めることは不可能で，これを解くには Newton 法によらねばならない。

③等分割規準 (Equal Distance Principle)

各区間の長さ $F_i=X_i-X_{i-1}$ を相等しくするという規準で

$$X_i=i/K \qquad (3.10)$$

とする。

④等貯水量規準 (Equal Storage Principle)

各区間の定常時の貯水量を相等しくするという規準で

$$X_i=(i/X)^{m/(m+1)} \qquad (3.11)$$

とする。

以上の4つの区分法と集中化誤差の関係を数値計算によって求める。集中化誤差は，kinematic wave モデル，多段貯水池モデルによる流出量をそれぞれ $Q_K(T)$, $Q_R(T)$ としたとき，

$$e=\max_{T\geq 0}|Q_K(T)-Q_R(T)|/Q_K(T_P) \qquad (3.12)$$

で評価する。ただし，T_P は $Q_K(T)$ が最大となる時刻である。

Fig. 4 は，降雨配分パターンを二等辺三角形とし，T_R が 2, 5, のそれぞれについて，$m=1$, 2, 3 の場合の集中化誤差 e を，4種類の区分法で，貯水池個数 $K=1\sim20$ について求めたものである。集中化誤差 e の値にばらつきがあり，振動している。この振動には，①m の値が大きいほど大きい，② T_R の値が大きい方が大きい，③貯水池個数 K の値が大きくなると生じるという傾向がある。

この振動の原因は，$dS_i/dT=F_iP(T/T_R)+Q_{i-1}-Q_i$ による dS_i/dT の評価の際の丸めの誤差にあると考えられる。丸め誤差は，同じ大きさの量の引算をするときに問題となるが，前述した振動の傾向はこの観点から説明される。実際，①m の値の増加とともに水面形は **Fig. 5** のように変化し，m が大きい程，

$$(Q_i-Q_{i-1})/X_i\simeq(X_i-X_{i-1})/X_i \qquad (3.13)$$

が小さくなり，桁落ちが生じる。②T_R が大きくなると定常状態に近づき，$F_iP(T/T_R)+Q_{i-1}$ と Q_i の差が小さくなる。③ K の値が大きくなると区間長が短くなり，その結果，(3.13) が小さくなり，桁落ちが生じるのである。

水面形状が **Fig. 5** のような形であることと (3.13) 式とから，下流側を細分する区分法ほど丸めの誤差の影響を受けやすい。実際に，集中化誤差 e のグラフが最も大きく振動している等貯水量規準は下流側を細分する区分法であり，逆に最も振動が少ない等伝播時間規準は上流側を細分する区分法である。

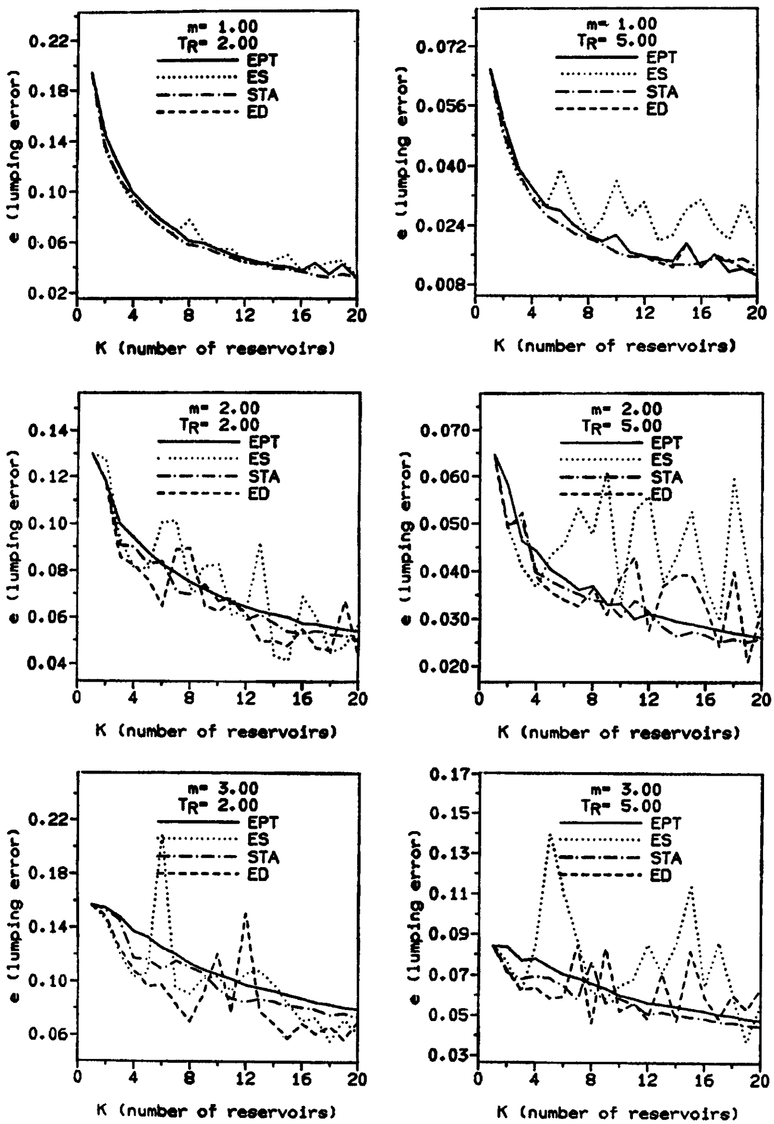

Fig. 4 Change of e, the lumping error, with K, the number of reservoirs, for 4 partition methods

以上の考察をふまえて4種類の区分法を比較する。等分割規準，等貯水量規準は，m, T_R, Kが小さいうちは集中化誤差が小さく良好であるが，丸めの誤差に対する安定性を欠き，適当な区分法とは言い難い。安定性規準は，丸めの誤差に対しても比較的的安定で，集中化誤差も小さいが，分点を求める計算が他と比較して著しく繁雑であるという欠点がある。よって，区分法としては，丸め誤差に対して最も安定である等伝播規準を採用するのが妥当であると考えられる。

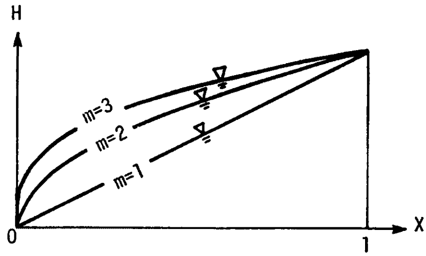

Fig. 5　Profiles of water surfaces in steady states for $m=1$, 2 and 3

4.　多段貯水池モデルによる集中化誤差構造

前章で，単一要素 kinematic wave モデルを集中化するモデルとして多段貯水池モデルを提示した。残る問題は，集中化誤差構造を考慮して集中化の程度＝貯水池個数を決定する問題である。

2章で議論したように，単一要素 kinematic wave モデルの変換構造は，流れの非線形性を表わす指数 m, 降雨の時間的配分のパターン $P(\tau)$，降雨の継続時間に関する指標 T_R に依存するから，集中化誤差構造もまたこれらに依存する。

流れの非線形指数 m を5/3に，降雨の時間的配分パターンを2等辺三角形状に固定すれば，集中化誤差は T_R と集中化の程度＝貯水池個数 K に依存する。集中化誤差 e を (3.12) 式によって評価するものとして，集中化誤差の T_R, K に対する依存の関係を図示したものが **Fig. 6** である。**2**で議論しておいたよ

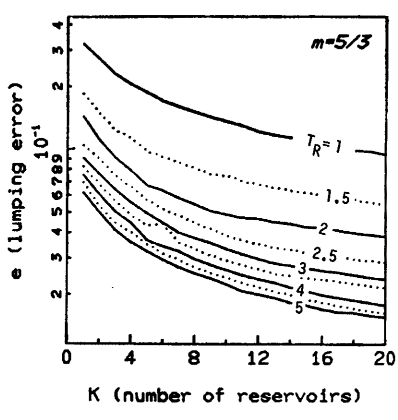

Fig. 6　Change of e, the lumping error, with K, the number of reservoirs, for various T_R's

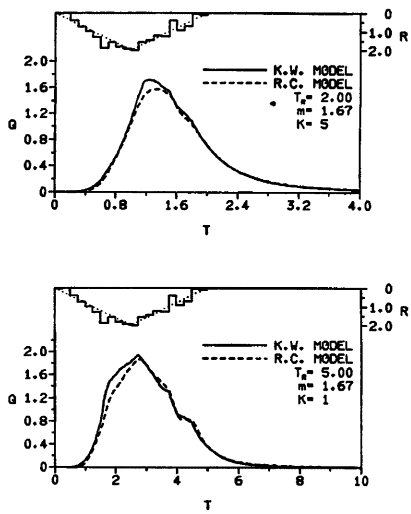

Fig. 7　Simulation of kinematic wave flows by reservoir cascade models

うに，T_R が大きいと貯水池個数 K が小さくても集中化誤差 e は小さく，T_R が減少すると，集中化誤差を同程度にするためには貯水池個数 K を増やさねばならない。いま，斜面流を単一要素 kinematic wave モデルで取り扱うものとし，等価粗度係数 N, 勾配 θ, 斜面長 L, 平均降雨強度 $\bar{r}$, 降雨継続時間 t_r が与えられているものとすると，$\alpha=\sqrt{\sin\theta}/N$, $m=5/3$ として (2.3)，(2.8) 式から T_R が求められるので，**Fig. 6** を利用すると所要の精度 e に対する貯水池個数 K を求めることができる。$\bar{r}$, t_R の増加とともに T_R は増加するので，標準入力に対して K を決めておけば，規模の大きい入力に対しても精度は保証されることになる。 **Fig. 6** では，降雨の時間的配分パターンを2等辺三角形としている。流出量の時間的変化はもちろん入力の時間配分パターンに依存するが，集中化の程度，すなわち貯水池個数は入力の時間配分パターンによって大きく変化させる必要はなく，**Fig. 6** にしたがって貯水池個数を決定してもよいと考えられる。

Fig. 6 から集中化誤差 e が同程度になると思われる例 ($T_R=2$ に対して $K=5$, $T_R=5$に対して $K=1$) に対して，kinematic wave モデルと多段貯水池モデルによる流出計算結果を比較したものを **Fig. 7** に示しておく。

5. 結　論

本研究では，単一要素 kinematic wave モデルの集中化の方法を提案し，集中化誤差構造を明らかにした。

集中化モデルの構成法を要約する。

①降雨入力の継続時間に関する指標 T_R を (2.3), (2.8) 式から計算する。

②**Fig. 6** から所要の集中化誤差 e に対する貯水池個数 K を決定する。

③場を (3.6) 式によって区分する。(3.2) ～ (3.4) 式が求める集中化モデルである。

雨水流モデルの集中化問題の中心課題はむしろ河道網系 kinematic wave モデルの集中化にあるが，この問題については，本研究の結果を基礎として今後検討を進めていく予定である。

参 考 文 献

1) Muzik, I.: Generation of Design Hydrographs for Minor Structures, Proceedings of the IAHS Tokyo Symposium, 1975, pp. 265-274.

2) 石原藤次郎・高棹琢馬：洪水流出過程における変換系について，京大防災研究所年報，第7号，1964, pp. 265-279.

3) ポントリャーギン（木村俊房校閲，千葉克裕訳）：常微分方程式，第5章，共立出版，1968.