

## エントロピー・モデルに関する2, 3の考察

高棹 琢馬・池淵 周一・寒川 典昭

### A CONSIDERATION ON ENTROPY MODELS OF RUNOFF SYSTEMS

By *Takuma TAKASAO, Shuichi IKEBUCHI and Noriaki SOGAWA*

#### Synopsis

Because the long range runoff system is essentially the stochastic one, it is necessary to disclose not only the deterministic characteristics but the stochastic laws contained in the process of rainfall-runoff. From this point of view, T. Takasao and S. Ikebuchi have introduced the concept of entropy defined by Shannon to describe the rainfall-runoff system. The objective of this paper, expanding their study, is to define the transmission rate of the runoff system with due regard to that it is a lag system and to find out the transition probability among the runoff states on the assumption of maximum entropy and maximum acquired information content. The applying results of these probabilities to Yura River Basin are in good agreement with natural stream records.

#### 1. 序 論

従来、長期間流出機構の究明には洪水を主対象とする決定論的流出解析法の概念を拡張して用いられるものが多かった。しかしながら長期流出現象は、その対象期間が長く、その間の降水は不規則な変化特性を持ち、降水に対応する流量は多くの出水サイクルから構成されていて、しかもそこに内在する複雑かつ不確定な現象を考えると、決定論的立場だけではその解析は不十分であって、確率・統計論的アプローチが不可欠である。このような考えから、高棹・池淵は流出系に「エントロピー最大仮説」が置きうると考え、各降水規模ごとにエントロピーを最大にするよう状態遷移確率を求めた<sup>1)</sup>。この研究はさらに降水情報をも組み入れたエントロピー最大仮説に基づく状態遷移確率法に改良された<sup>2)</sup>。

本研究はこうした一連の研究をうけ、流出系に「エントロピー最大仮説」を置くものであるが、従来の研究では議論されていなかったことが3点取り入れられている。すなわち、第1点は降水情報をも事前情報と考えることであり、第2点は降水確率をも未知変量と考えて理論展開していることである。そして第3点は特性値を貯留量の自然遞減曲線から評価することである。

本研究ではさらにエントロピー最大仮説を思想的に発展させ、流出系に「獲得情報量最大仮説」を置くことにより、新たな思想の下に長期流出モデルを構築しようともしている。

#### 2. 水文事象のエントロピー的解釈

流出系を特徴づけるのは「入力である降水」、「出力である流量、蒸発散量」及び「流出系それ自体の内部構造」であるが、これらがすべてストカスティックに扱わなければならないところに、流出解析とくに長期流出解析の困難さがあるといえよう。すなわち、降水はその総量、継続時間、強度などの他に、時間的・空間的な分布が異なり、それを受ける流域場は地形・地質・植生等、非常に複雑な地域的な分布をしている。したがって、降水から流量への変換過程には多くの因子が時間的にも空間的にも複雑に作用し、その結果系はきわめて複雑になりきわめてあいまいな不確定現象を呈するのである。

そこで著者らはこのような不確定な現象の尺度としてエントロピーの概念を導入し、次のように水文現象を説明してきた。

(1)標本の大きさが比較的大きい水流量、たとえば日雨量の頻度特性をみると指数分布に従い、月雨量は対数正規分布に従うことは経験的によく知られている。この場合、水流量として同じ量の分布特性が時間単位の取り方によってどうして異なるのかという疑問には、統計学は何も答えてくれない。しかし、平均値一定という制限のもとで最大エントロピーを持つ分布は指数分布であり、分散一定という制限のもとで最大エントロピーを持つ分布は正規分布であるという情報エントロピーの概念は上記の問題を解き明かしており実流域への適用結果からも明らかになっている<sup>3)</sup>。

(2)入力エントロピーを降水エントロピー  $H(R)$ 、出力エントロピーを流量エントロピー  $H(Q)$  とする。今、降水・流量間に

$$Q=KR \dots\dots\dots (2.1)$$

なる線形関係を仮定すると両者のエントロピー間に次の関係が成立する。

$$\log K = H(Q) - H(R) \dots\dots\dots (2.2)$$

ここに、 $K$  は任意定数である。この降水と流量が一意に対応するとみた差のエントロピー  $\log K$  は旬単位以上では降水・流量の差のエントロピーと同じ傾向を示している<sup>4)</sup>。

(3)帯域幅  $W$  の中に制限されて、単位時間あたり  $H(x)$  のエントロピーをもっている入力集合が、伝送特性  $K(\omega)$  の線形フィルター ( $\omega$ : 周波数) を通ったとき、出力集合の単位時間あたりのエントロピー  $H(y)$  は

$$H(y) = H(x) + \frac{1}{W} \int_0^W \log |K(\omega)|^2 d\omega \dots\dots\dots (2.3)$$

で与えられる<sup>5)</sup>。ここで、 $H(x)$  を降雨エントロピー  $H(R)$ 、 $H(y)$  を流量エントロピー  $H(Q)$  とし、線形フィルターとして瞬間単位図

$$K(t) = \frac{\alpha^{N+1}}{n!} \cdot t^N \cdot e^{-\alpha t} \dots\dots\dots (2.4)$$

を用いると、

$$A = H(Q) - H(R) \dots\dots\dots (2.5)$$

となる。ここに、 $t$  は時間、 $\alpha$ 、 $n$  は係数であり、 $A$  は次式を表わしている。

$$A = (n+1) \left[ 1 + \log \frac{\alpha}{\sqrt{\pi^2 + \alpha^2}} - \left( \frac{\alpha}{\pi} \right) \cdot \arctan \left( \frac{\pi}{\alpha} \right) \right] \dots\dots\dots (2.6)$$

この値は、流出過程における貯留効果を具現する係数  $\beta (= 1/\alpha)$  が大きくなるにつれ、また集中効果を具現する係数  $n$  が大きくなるにつれて、エントロピー損失  $A$  の絶対値が大きくなる傾向を示している。これは実測データから多重マルコフ系列で求めた降水・流量の差のエントロピーと傾向を同じくし、時間スケールが小さくなるにつれて、降水・流量のエントロピー差の絶対値が大きくなる特徴をよく説明している<sup>6)</sup>。

このようにして、われわれは長期流出現象の不確実性から、流出現象がエントロピー的に解釈できることが明らかになった。これらはいずれも現象の不確実性を前提としたものであり、流出現象の情報理論的接近の可能性を示すものであると考えられる。すなわち、流出現象を情報理論でいうエントロピーで解釈し、その確率構造を捉えることの可能性を示すものであると思われる。

3. 長期流出のエントロピー・モデル(1)

—エントロピー最大仮説に基づく状態遷移確率法—

本章では遷移前の状態のみならず降水情報をも事前情報として取り込み、かつ降水確率を未知変量に加え、たエントロピー最大仮説に立脚する状態遷移確率法を提案する。

3.1 長期流出の基準時間

長期流出現象のモデル化において降水および流量系列の単位時間の取り方、いわゆる基準時間の問題があるが、長期流出は大出水時を除くとその現象はかなり緩慢であり、日単位で把握すれば実用的に十分の精度がある。また長期間にわたる降水量及び流量資料は日降水量及び日平均流量として観測・測定されており、実流域の流出解析を行う場合にも好都合である。

もちろんマクロ的な計画情報としては長期流出を旬、月、年といった時間単位で考察する場合もある。日単位程度の降水・流出レスポンスは単位図的応答あるいは多次元遅れ特性をもってくるのに対し、このように時間スケールが大きくなると、降水・流出の変換プロセスはインパルシブな応答あるいは0次遅れ特性をおびてくる。このことはブラックボックス的にみれば降水系列に流出係数あるいは流出率といった指標を乗じることによって流量系列が把握・予測できる可能性が高い。すなわち実用的には決定的評価が可能であることを意味しよう。しかし、われわれが流出モデルの構成にあたって目指している立場は流出変換システムをブラックボックスとして、しかもマクロ的に降水・流量データからインプット・アウトプットアナリシスの一種としてモデル化するのではなく、降水と流量の対応関係に物理的機構を導入し、変換システムの内部状態の遷移を確率的に扱おうとするものであり、その意味からも長期流出モデルの基準時間として日単位を採用することが妥当であろう。

3.2 単位特性値あたりのエントロピーの数量的表現<sup>1)</sup>

貯留量情報源が有限個のエルゴードの状態のみからなるシャノン線図であらわされるとすると、貯留状態  $E_i$  と降水規模  $R_i$  の組み合わせの1つから他の貯留状態  $E_j$  と降水規模  $R_j$  の組み合わせの1つに遷移していく条件付き確率の  $s'$  に関して総和をとったものが  $P_{is}(j)$  であるから、長さ  $N$  の1つの貯留量系列が貯留量情報源より生じし、それに対応して Fig.1 に示すようなシャノン線図の上で1つの軌跡が描かれる。さて

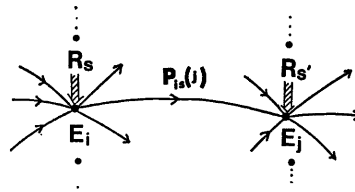


Fig. 1. chart of state transition in runoff system where rainfall probability is regarded as the prior information.

まず  $E_i$  (状態確率  $P_i$ ) にあり、そこに  $R_i$  がもたらされて  $E_j$  なる貯留状態に遷移する確率は  $R_i$  に対する降水確率を  $Q_i$  とすると  $P_i Q_i P_{is}(j)$  である。われわれは貯留量情報源のエルゴード性を仮定しているから大数の法則により  $N$  が非常に大きくなれば実際に生起する可能性のある典型的な貯留量系列では上のような遷移の回数は  $N \cdot P_i \cdot Q_i \cdot P_{is}(j)$  に、この条件に適合しない貯留量系列の生起確率は0に確率収束する。したがって後者は考慮する必要がなくなり典型的な貯留量系列では  $P_{is}(j)$  なる遷移確率をもつ遷移が  $N \cdot P_i \cdot Q_i \cdot P_{is}(j)$  回ずつ含まれることになるから、その中の1つが生起する確率  $P$  は

$$P = \prod_{i,j} P_{is}(j)^{N \cdot P_i \cdot Q_i \cdot P_{is}(j)} \dots\dots\dots (3.1)$$

となる。ここに、 $\prod_{i,j}$  はすべての可能な状態に関して  $i, j, s$  についての速乗を意味する。貯留量情報源のエントロピーはそれから生起する代表的な十分長い貯留量系列の長さ  $N$  で除したものに等しいから

$$H = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \log \frac{1}{P} \right) = - \sum_{i,j} P_i \cdot Q_s \cdot P_{is}(j) \cdot \log P_{is}(j) \dots\dots\dots (3.2)$$

で与えられる。

次に貯留量情報源から単位時間に生起する情報量を定義するには次のように考えればよい。貯留状態  $E_i$  のとき降水  $R_i$  がもたらされて次の貯留状態  $E_j$  に移るのに要する時間すなわち到達時間を  $t_{ij}$  とする。降水  $R_i$  で状態  $E_i$  から  $E_j$  へ移る確率は  $P_i \cdot Q_s \cdot P_{is}(j)$  で示すことができるから、この貯留量情報源で1つの長い貯留量系列を考えると、そのエルゴード性から貯留状態の平均時間  $T$  は

$$T = \sum_{i,j} P_i \cdot Q_s \cdot P_{is}(j) \cdot t_{ij} \dots\dots\dots (3.3)$$

となる。従って、典型的な1つの長い貯留量系列の単位時間についての情報量は

$$H' = \frac{H}{T} = \frac{- \sum_{i,j} P_i \cdot Q_s \cdot P_{is}(j) \cdot \log P_{is}(j)}{\sum_{i,j} P_i \cdot Q_s \cdot P_{is}(j) \cdot t_{ij}} \dots\dots\dots (3.4)$$

で定義される。

**3.3 エントロピー最大仮説に基づく状態遷移確率の算定**

(1) 厳密解

われわれは流出系にエントロピー最大仮説を置いているのであるから、(3.4) 式を最大にする状態遷移は最も生起しやすい、最も実現しやすい状態遷移であり以下の4式の規格化条件の下でこれを評価する。

$$\sum_{i,j} P_i \cdot Q_s \cdot P_{is}(j) = P_j \dots\dots\dots (3.6)$$

$$\sum_j P_j = 1 \text{ あるいは } \sum_j P_j = 1 \dots\dots\dots (3.6)$$

$$\sum_j Q_s = 1 \dots\dots\dots (3.7)$$

$$\sum_j P_{is}(j) = 1 \dots\dots\dots (3.8)$$

ここで、 $P_i, P_{is}(j)$  は未知変数であり、 $Q_s$  も流域内の面積降雨確率と考えれば決定すべき未知変数である。上記の問題は一種の最適化問題 (Constrained nonlinear programming,  $P_i, Q_s$  を既知とするなら、Linearly constrained nonlinear programming) であり、Lagrange の未定乗数法によって解かれる。せなわち  $P_{is}(j)$  は次式で与えられる。

$$P_{is}(j) = \frac{U_j \cdot \exp(-c \cdot t_{ij})}{\sum_j U_j \cdot \exp(-c \cdot t_{ij})} \dots\dots\dots (3.9)$$

上式に含まれる  $U_j$  は

$$U_j = \sum_{i,j} \left\{ \frac{P_i \cdot Q_s \cdot \exp(-c \cdot t_{ij})}{\sum_j U_j \cdot \exp(-c \cdot t_{ij})} \right\} = P_j \dots\dots\dots (3.10)$$

なる方程式から決定される。ここに、 $c = \max H'$  である。ただし  $P_{is}(j)$  を具体的に計算するときには  $P_i, Q_s$  は  $P_{is}(j)$  よりはるかに高い精度で資料より求めることが可能であるため既知量とみなして与えることに

する（以下の解はすべてこのように取り扱う）。従ってこの問題は不等号制約条件下の多変数非線形関数の最大値の直接探索法であるサブルーテン COMPLX を介して解くことが可能であるが、イテレーション法を取らねばならず多くの計算時間を要するとともに非線形計画手法が常に有している問題点を含めたいいくつかの注意すべき点を抱えていることも考えておかなければならない。

(2) 近似解

(1)ではすべての制約条件を満足するような状態遷移確率を評価したが、同時に問題点も指摘された。したがってここでは実用的な立場から厳密解の問題点のいくつかを取り除くために完全な制約条件を用いない、いわゆる近似解法を提案する。これは(3.8)式の制約条件を

$$\sum_{ij} P_i \cdot Q_j \cdot P_{ij}(j) = Q_j \dots\dots\dots (3.11)$$

$$\sum_{ij} P_i \cdot Q_j \cdot P_{ij}(j) = P_i \dots\dots\dots (3.12)$$

で代用しようとするものであり Lagrange の未定乗数法で解くと状態遷移確率は

$$P_{ij}(j) = \frac{B_i W}{B_j} e^{-t_{ij}} \dots\dots\dots (3.13)$$

となる。上式に含まれる未知数  $B_i$  は

$$\sum_j B_j (Q_j \cdot W^{-t_{ij}} - \delta_{ij}) = 0 \dots\dots\dots (3.14)$$

の解であり、また  $W$  は

$$|\sum_j Q_j \cdot W^{-t_{ij}} - \delta_{ij}| = 0 \dots\dots\dots (3.15)$$

なる方程式ですべての  $B_i$  を正にする最大正実根である。ただし、 $\delta_{ij}$  は Kronecker-Delta である。したがって(3.15)式から、すべての  $B_i$  を正にする  $W$  の最大正実根を求め、それを(3.14)式に代入して  $B_i$  が求まると  $P_{ij}(j)$  は(3.13)式によって評価される。

4. 長期流出系の新しいエントロピー・モデル(2)

——獲得情報量最大仮説に基づく状態遷移確率法——

本章は第3章の思想をさらに発展させ獲得情報量の概念を用い、流出系においてこれを最大にする確率構造を定めることが最も自然であり妥当であることを議論し、獲得情報量最大仮説に基づいて状態遷移を確率的に評価しようとするものである。

4.1 獲得情報量の数量的表現とその解釈

獲得情報量はサブシステムを  $x, y$  とすると

$$I = H(x) + H(y) - H(x, y) = H(x) - H_x(x) = H(y) - H_y(y) \dots\dots\dots (4.1)$$

と表記される。ここに、 $H(x)$ ,  $H(y)$  はエントロピー、 $H(x, y)$  は相互エントロピー、 $H_x(x)$ ,  $H_y(y)$  は条件つきエントロピーと呼ばれている。

(4.1)式の  $I$  を最大にする変換構造について考えてみよう。(4.1)の第1式において  $H(x, y)$  を最小にするということは、 $x$  と  $y$  の対応に関するエントロピーを最小にすること、すなわち  $x$  と  $y$  の対応に関する不確定さを最小にしているわけであり、あるいは(4.1)の第2, 第3式において、 $H_x(x)$ ,  $H_y(y)$  を最小にするということは変換系の不確定さを最小にしているわけであり、この意味で  $I$  を最大にするということは変換系が最も確定される、あるいは逆に最も実現しやすい、生起しやすい変換システムをわれわれが構成しようとしていることと等価であり、自然であろうと思われる。

また次のように考えることもできる。(4.1)の第2式より  $I$  は  $x$  に関する不確定さから  $y$  を知った後に  $x$

にまだ存在する不確定さを差し引いた量であり、第3式から  $I$  は  $y$  に関する不確定さから  $x$  を知った後に  $y$  にまだ存在する不確定さを差し引いた量として表現されている。すなわち  $I$  は  $x$  または  $y$  を知ることによる  $y$  または  $x$  に関する確率構造の獲得情報量であり、やはりこれを最大にするような  $x$  と  $y$  の間の確率的構造を定めることは自然であろうと思われる。

通常は  $x$ ,  $y$  及び  $x$  と  $y$  の間に物理的, 社会的, 経済的制約がつき, それらの制約条件の下で  $I$  を最大にする確率構造を定めることになる。

さて, サブシステム  $x$  と  $y$  の対応関係として  $x$  と  $y$  が互いに独立な場合,  $x$  と  $y$  の間の変換システムに雑音がない場合, およびそれに雑音がある場合の3つが考えられる。 $x$  と  $y$  が互いに独立な場合は  $H_y(x) = H(x)$  あるいは  $H_x(y) = H(y)$  であるから(4.1)式から  $I=0$  となり全く情報獲得がない。変換システムの雑音の有無については次のように考えられる。いま  $x_t, y_t$  および  $\beta_t$  をそれぞれ時間  $t$  での入力, 出力及びシステムの状態であるとする

$$y_t = f(x_t, \beta_t), \beta_{t+1} = g(x_t, \beta_t) \dots\dots\dots (4.2)$$

なる関係式が成立する。ここに,  $f(\cdot), g(\cdot)$  は変換システム, 及び状態遷移を表現する任意関数である。雑音のないシステムとは(4.2)式で示される  $y_t, \beta_{t+1}$  が決定論的に評価できる場合であり, このとき  $H_y(x) = H_x(y) = 0$  となり

$$I = H(x) = H(y) \dots\dots\dots (4.3)$$

となる。雑音のあるシステムとは(4.2)式が確率論的に定まる場合をいい, このとき獲得情報量は(4.1)式で表現され, 通常サブシステム  $x$  と  $y$  の対応は, このような場合であると考えられる。なお, 雑音が大きくて  $x$  と  $y$  の対応が全く定まらなくなると  $H_y(x) = H(x)$  または  $H_x(y) = H(y)$  となって(4.1)式から  $I=0$  となることは容易に理解される。

#### 4.2 単位特性値あたりの獲得情報量の数量的表現

降水・流出変換過程を対象とすると(4.2)式で示された関係は次式のように表記される。

$$Q_t = f(R_t, S_t), S_{t+1} = g(R_t, S_t) \dots\dots\dots (4.4)$$

ここに,  $R_t, Q_t, S_t$  は, それぞれ時間  $t$  における有効降雨 (降水量から蒸発散量を差し引いた量), 流量及び系の内部状態, 具体的には流域の貯留状態を意味する。ところで,  $R_t, Q_t, S_t$  の間で連続式が成立すると考えると流量  $Q_t$  は

$$Q_t = S_t + R_t - S_{t+1} \dots\dots\dots (4.5)$$

で与えられることになるから問題は(4.4)の右の式の状態遷移である。われわれはこの状態遷移の確率的構造解明に前述の獲得情報量概念を適用する。

さて, 内部状態いわゆる貯留状態の遷移に関して獲得情報量は次式で表現される。

$$I(S_t, R_t, S_{t+1}) = H(S_{t+1}) - H_{S_t, R_t}(S_{t+1}) \dots\dots\dots (4.6)$$

いま系の定常化がはかられているとすると, その期間内では上式は

$$I = -\sum_j P_j \cdot \log P_j + \sum_{i,j} P_i \cdot Q_i \cdot P_{ij}(j) \cdot \log P_{ij}(j) \dots\dots\dots (4.7)$$

で与えられる。前節の議論から流域に獲得情報量最大仮説を置くことが妥当であるから, (4.7)式を最大にする遷移確率を求めると

$$P_{ij}(j) = P_j \dots\dots\dots (4.8)$$

となり, 遷移後の状態  $E_j$  が遷移前の状態  $E_i$  及び入力として与えられる降水規模  $R_i$  に依存しないという

不合理な現象説明になるため、われわれは特性値の導入を考える。具体的には特定時間内にもたらされる水分子の量に比例したパラメータと考えられるが、それをいま  $l_{ij}$  と表記すると平均単位特性値は

$$l = \sum_{ij} P_i \cdot Q_j \cdot P_{ij}(j) \cdot l_{ij} \dots\dots\dots (4.9)$$

となるから単位特性値あたりの獲得情報量は

$$I' = \frac{-\sum_j P_j \cdot \log P_j + \sum_{ij} P_i \cdot Q_j \cdot P_{ij}(j) \cdot \log P_{ij}(j)}{\sum_{ij} P_i \cdot Q_j \cdot P_{ij}(j) \cdot l_{ij}} \dots\dots\dots (4.10)$$

で与えられる。

#### 4.3 流出系の等価遅延時間

エントロピー・モデルを構成するにあたって基準時間として日単位を採用することはすでに述べたが、その他にもいくつかの仮定が必要である。その中の1つの大きな仮定は流出変換システムの定常性である。すなわち系の内部状態の遷移を確率的に表現していく場合、その遷移確率は対象とする期間内では定常あるいは一様とみなして理論展開を構成している。そこで系を定常化する期間分割の基準として獲得情報量概念に基づく指標を提示しておく。

いま  $x$  に蒸発散、いわゆる負の降水をも含めて確率分布をとり、 $y$  の流量も対数変換した後においては正規分布とすると2変数正規過程  $x=x(t)$ ,  $y=y(t+\tau)$  に対して、(4.1)の第1式第3項の結合エントロピーは次式で与えられる。

$$H(x, y; \tau) = 1 + \log \left\{ 2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2(\tau)} \right\} \dots\dots\dots (4.11)$$

ここに、 $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  はそれぞれ  $x$  と  $y$  の標準偏差、 $\rho_{xy}(\tau)$  は  $x$  と  $y$  の相関係数である。従って(4.1)式で示される獲得情報量を最大にすることは結合エントロピーを最小にすることになり、次式が成立する。

$$\max_{\tau} I(x, y; \tau) = \min_{\tau} H(x, y; \tau) \dots\dots\dots (4.12)$$

さて、 $H(x, y; \tau)$  を最小にするということは(4.11)式からわかるように  $\rho_{xy}(\tau)$  を最大にすることである。すなわち

$$\min_{\tau} H(x, y; \tau) = \max_{\tau} \rho_{xy}(\tau) \dots\dots\dots (4.13)$$

が成立する。従って  $\max_{\tau} I(x, y; \tau)$  を流出系の等価遅延時間とよぶと、これは降水と流量系列の長期系列を対象としたときの流出系の代表的な遅れ時間を意味し、エントロピー・モデルを構成するにあたって必要な系定常化の基準時間となる。

#### 4.4 獲得情報量最大仮定に基づく状態遷移確率法の算定

##### (1) 厳密解

この章ではわれわれは流出系に獲得情報量最大仮説を置いているのであるから(3.5)式から(3.8)式の制約条件の下で(4.10)式を最大にする  $P_{ij}(j)$  を Lagrange の未定乗数法を使って求めると最終的に次式となる(付録1参照)。

$$P_{ij}(j) = \frac{V_j \cdot \exp(c \cdot l_{ij})}{\sum_j V_j \cdot \exp(c \cdot l_{ij})} \dots\dots\dots (4.14)$$

上式に含まれる  $V_j$  は

$$V_j \cdot \sum_{ii} \left\{ \frac{P_i \cdot Q_j \cdot \exp(c \cdot l_{ij})}{\sum_j V_j \cdot \exp(c \cdot l_{ij})} \right\} = P_j \dots\dots\dots (4.15)$$

なる方程式から決定される。ここに、 $c = \max I'$  である。この問題も 3.3 節(1)で述べたようにサブルーチン COMPLEX を介して解くことが可能であるが前述の場合と同様な問題点を抱えているため次に近似解を提案する。

## (2) 近似解

1つ目の近似解はすでに提案している<sup>8)</sup>から、ここではさらに精度を高めるため 3.4 節(2)と同じ制約条件を使った 2つ目の近似解を Lagrange の未定乗数法を使って求めると状態遷移確率は次式で与えられる(付録 2 参照)。

$$P_{ii}(j) = \frac{D_j}{D_i} \cdot P_i \cdot W^{t_{ij}} \dots\dots\dots (4.16)$$

上式に含まれる未知数  $D_i$  は

$$\sum_j D_j \{P_i \cdot Q_i \cdot W^{t_{ij}} - \delta_{ij}\} = 0 \dots\dots\dots (4.17)$$

の解であり、また  $W$  は

$$|\sum_j P_i \cdot Q_i \cdot W^{t_{ij}} - \delta_{ij}| = 0 \dots\dots\dots (4.18)$$

なる方程式で、すべての  $D_i$  を正にする最大正実根である。したがって(4.18)式から、すべての  $D_i$  を正にする  $W$  の最大正実根を求め、それを(4.17)式に代入して  $D_i$  が求まると  $P_{ii}(j)$  は(4.16)式によって評価される。

## 5. 実流域への適用と考察

本章では前章までの長期流出モデルに関する理論展開を実証し、降水・流出変換システムを状態遷移確率をもって把握・予測するために各理論値を由良川流域に適用して実測値と比較しながら、その結果について検討する。

### 5.1 由良川流域の概況と水文資料

由良川は三国岳(標高 959 m)にその源を發し、東西に走る大小の支川を合流しながら西流して丹波高原を東西に貫き福知山付近で北東に流路を変更し由良において宮津湾に注ぐ流域面積 1,882 km<sup>2</sup>、流路延長 140 km の中河川である。その流域は山地が 89%、平地が 11% の典型的な山地河川となっている。本研究の対象とするのは荒倉流域のみであるが、従来の研究では福知山まで採用しているため、Fig. 2 には荒倉流域を含む福知山地点までの流域概況図を示した。流域の林相は良好であり、流域上流部は京都大学芦生演習林がある。また気候的には裏日本型の特色を示し曇天や降水の日数が多く、とくに冬期は降雪日数が多い。流域貯留量の重要な供給源である降水量は年総降水量でみると、一般的に言って上流水源地ほど多く下流部へ行くほど少ない。すなわち、荒倉流域では 2,200~2,600 mm、角流域では 1,800~2,200 mm、福知山流域では 1,600~2,000 mm となっている。月別には 6~7 月の梅雨期と 8~9 月の台風期が最も多く、この 4ヶ月で年総降水量の約 50% を占めている。降雪は 1~2 月が最も多く芦生地点では 1.5 m 近くになるが 12 月には比較的少ない。

次に水文資料としては、得られた資料の都合上、以下のものを採用した。まず系への入力である荒倉流域への日平均面積降水量は昭和 28 年~35 年の各月と 36 年~48 年の 6 月~10 月は芦生(支配率: 0.616)、知井(0.353)、平屋(0.031)の地点雨量から Thiesen 法により導出されたものを用いた。また昭和 36 年~48 年の 1 月~5 月、及び 11 月、12 月については支配率の大きい芦生で代表させることにした。系の出力である日平均流量は関西電力が観測した資料を昭和 28 年~48 年にわたり用いた。最後に蒸発散関係の資料としては京都大学農学部付属芦生演習林で観測されている Pan による蒸発量を上記期間にわたって使用した。なお以下の計算は京都大学化学研究所中央電子計算室 FACOM QSIV/X8 によった。



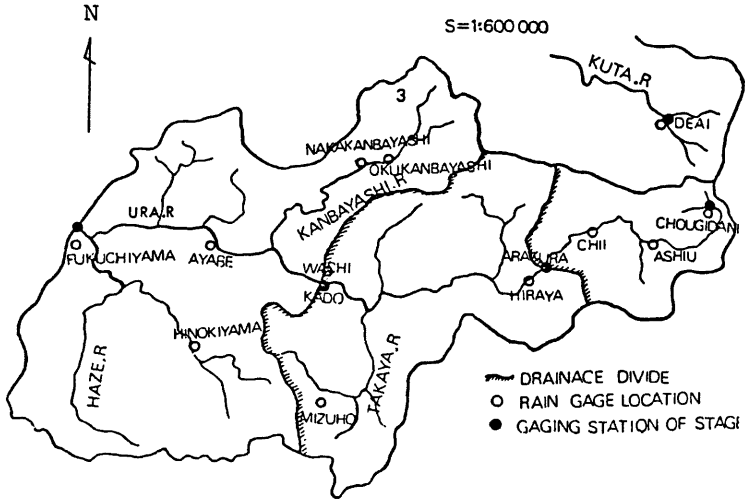


Fig. 2. Map of Yura River Basin.

5.2 降水・流出系の状態遷移に係るパラメータの同定

(1) 降水の層別化

高嶺・池淵は降水規模を5層 ( $R_1 \sim R_5$ ) に分け、 $R_1$  は降水のない状態に等しく、 $R_2$  は初期損失雨量に相等する降水規模であり  $R_3, R_4, R_5$  はA層内に浸透して中間流出として供給される降水規模であるとしている<sup>9)</sup>が、ここでは有効降水の概念を導入して、有効降水とそれに対応する度数との積の累積値を適切な値で仕切るという方法を採用した。有効降水とは全降水から蒸発散量を差し引いた量であり

$$R_e = R_o - W \times P \dots\dots\dots(5.1)$$

と定義する。上式で  $R_e$  は有効降水、 $R_o$  は観測降水、 $W$  は1954年11月8日から1967年10月13日の間で水収支が成立するように決定した係数、 $P$  はPanによる蒸発量である。実流域の適用にあたっては Fig. 3 に示した6層の層別化を採用した。なお、以下では上記の期間を解析の対象とする。

(2) 貯留量の層別化

Fig. 4 は(4.5)式に示した降水、流量、貯留量

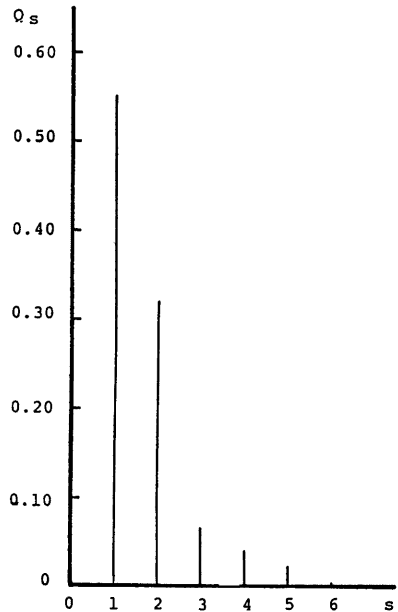


Fig. 3. Effective rainfall probability  $Q_s$ .

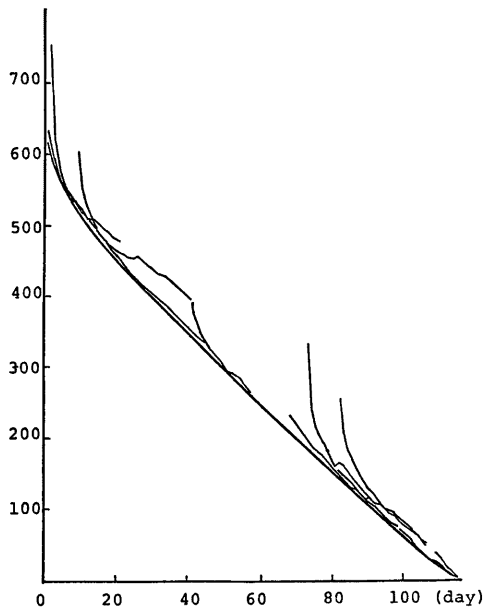
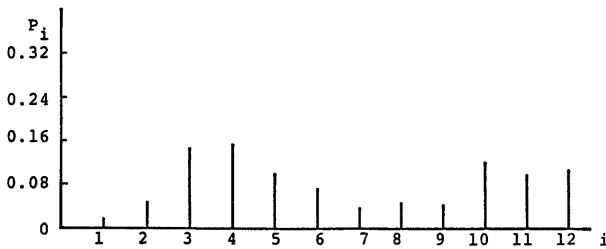


Fig. 4. Natural recession curve of storage in Yura River Basin.

Fig. 5. Storage state probability in the basin  $P_i$ .

の連続式から無降水期間を取り出し流量の自然逓減曲線を得ると同様な方法で得た貯留量の自然逓減曲線である。われわれは、この曲線を貯留量の層別化の指標とし一定の時間々隔でこの曲線を仕切るという層別化の手法を採用した。Fig. 5 は、このようにして12層に層別化された場合であり、実流域への適用にはこの値を用いた。

### (3) 特性値の定義と評価方法

われわれは特性値  $t_{ij}$  を計量可能でしかも物理的意味のある状態間の到達時間で定義する。すなわち Fig. 6 の貯留量の自然逓減曲線の概略図において貯留状態  $l$  のところに有効降水  $s$  が作用して貯留状態が  $l(=i+s)$  になったとすると、この  $l$  の状態から  $j$  の状態に遷移するのに要する時間を状態間の到達時間  $t_{ij}$  とする。Table 1 は  $R_3$  の場合の  $t_{ij}$  を記載している。

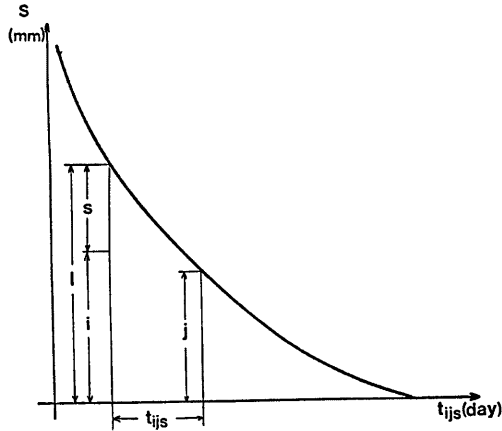


Fig. 6. Schematic view of natural recession curve.

Table 1 Characteristic value  $t_{ijs}$  being introduced into the assumption of maximum entropy, in the case of  $R_3$ .

$E_i \backslash E_j$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$	$E_8$	$E_9$	$E_{10}$	$E_{11}$	$E_{12}$
$E_1$	10	5										
$E_2$	20	10	5									
$E_3$	20	10	5									
$E_4$	30	20	10	5								
$E_5$	50	40	30	20	10	5						
$E_6$	50	40	30	20	10	5						
$E_7$	60	50	40	30	20	10	5					
$E_8$	70	60	50	40	30	20	10	5				
$E_9$	80	70	60	50	40	30	20	10	5			
$E_{10}$	90	80	70	60	50	40	30	20	10	5		
$E_{11}$	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	5	
$E_{12}$	110	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	5

次に特性値  $l_{ijs}$  であるが、これは具体的には貯留状態  $i$  に降水  $s$  が入力されて得られた  $l(=i+s)$  という貯留状態から  $j$  という貯留状態へ特定時間内にもたらされる水分子の量に比例した変数であると考えられる。従って任意の1つの  $l$  という貯留状態から、これより1ランク小さい貯留状態へ遷移するのに要する特性値として '1' を採用すると他の貯留状態にもたらされる水分子の量は前述の遷移のしにくさを表現するパラメータ  $t_{ijs}$  に反比例すると考えられるから、 $l_{ijs}$  は

$$l_{ijs} = \frac{10}{t_{ijs}} \dots \dots \dots (5.2)$$

なる関係式で定義する。Table 2 は、このようにして得られた  $l_{ijs}$  の値を  $R_3$  の場合について表記したも

Table 2 Characteristic value  $l_{ij}$ , being introduced into the assumption of maximum acquired information content, in the case of  $R_3$ .

$E_i \backslash E_j$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$
$E_1$	1.000	2.000				
$E_2$	0.500	1.000	2.000			
$E_3$	0.500	1.000	2.000			
$E_4$	0.333	0.500	1.000	2.000		
$E_5$	0.200	0.250	0.333	0.500	1.000	2.000
$E_6$	0.200	0.250	0.333	0.500	1.000	2.000
$E_7$	0.167	0.200	0.250	0.333	0.500	1.000
$E_8$	0.143	0.167	0.200	0.250	0.333	0.500
$E_9$	0.125	0.143	0.167	0.200	0.250	0.333
$E_{10}$	0.111	0.125	0.143	0.167	0.200	0.250
$E_{11}$	0.100	0.111	0.125	0.143	0.167	0.200
$E_{12}$	0.091	0.100	0.111	0.125	0.143	0.167

$E_i \backslash E_j$	$E_7$	$E_8$	$E_9$	$E_{10}$	$E_{11}$	$E_{12}$
$E_1$						
$E_2$						
$E_3$						
$E_4$						
$E_5$						
$E_6$						
$E_7$	2.000					
$E_8$	1.000	2.000				
$E_9$	0.500	1.000	2.000			
$E_{10}$	0.333	0.500	1.000	2.000		
$E_{11}$	0.250	0.333	0.500	1.000	2.000	
$E_{12}$	0.200	0.250	0.333	0.500	1.000	2.000

のである。

### 5.3 算定結果及び考察

前述の理由で厳密解の算定は今後の研究課題としておき、ここでは第4章と第5章で導入された2つの近似解のみ実流域へ適用した。その結果が Table 3 であり Case 1 は従来の研究の1つである「シャノン流情報理論からみた水文現象の不確定構造」<sup>10)</sup>で述べられている状態遷移確率の解、Case 2 は第3章の近似解、Case 3 は第4章の近似解を表現している。これらの解を実測値と比較すると以下の点が指摘できる。

- (1) 初期状態  $E_i$  の規模が小さい ( $E_i \leq E_6$ ) のとき、Case 3 は他の解に比較して実測値をよりよく説明し実用的な見地から十分満足のいく精度が得られている。
- (2) 初期状態  $E_i$  が大きくなると、どの Case も実測値との一致度は低下してくるが  $E_i \geq E_6$  では Case 1 が比較的、実測値をよく説明している。
- (3) Case 2 の理論値と実測値の一致度は初期状態  $E_i$  にかかわらず Case 1 と Case 3 の間に位置するこ

Table 3 Transition probability of runoff states,  $p_{ij}(j)$ , in the case of  $E_1$ , where the first, the second, the third and the fourth row value of each blocks represent case 1, case 2, case 3 and the observed value, respectively.

$R_s \backslash E_j$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$		$E_{12}$
$R_1$	1.000						
	1.000						
	1.000						
	1.000						
$R_2$	1.000						
	1.000						
	1.000						
	0.625	0.375					
$R_3$	0.209	0.791					
	0.178	0.822					
	0.031	0.967					
	0.500	0.500					
$R_4$	0.209	0.791					
	0.178	0.822					
	0.031	0.969					
		1.000					
$R_5$	0.014	0.206	0.780				
	0.031	0.224	0.745				
	0.002	0.031	0.968				
			1.000				
$R_6$	0.001	0.001	0.014	0.205	0.779		
		0.008	0.040	0.212	0.739		
		0.005	0.072	0.345	0.577		

とが多い。

もちろん、すべての貯水状態あらゆる降水規模について理論値が系の状態をよく説明するモデルが最も望ましいことは言うまでもないが、長期流出解析の目的から、あるいは水資源計画の立場から、われわれは  $E_i$  の小さいとき、かつ  $R_i$  が小なるとき理論値が高い精度で系の状態を説明するモデルを要求する。そのような考えから Case 3 は有効な長期流出モデルであるとともに厳密解ではないにしても工学的に十分近似解としての意味を持ち得るものであると確信する。Case 2 もこのような理由から近似解たり得るものであると思われる。

## 6. 結 語

本研究は長期流出過程に必然的に内在する不確定性を積極的に取り入れる立場から Shannon の情報理論を理論的背景とし、流出系にエントロピー最大仮説を置くことによって、さらには流出系に獲得情報量最大仮説を仮定することにより長期間の流出機構を確率的に解明し水資源開発への基礎的情報を提供しようとするものである。その結果、流出系の状態遷移がエントロピー最大化法によって得られる遷移確率で記述で

きることがより明らかになり、事前状態すなわち初期流域貯留状態の小さいところからの遷移では獲得情報量最大化法により、さらに精度よく説明でき、このモデルの妥当性が実証された。

今後、これらのモデルを他流域に適用することによりその適用性及び適用の限界性を確かめるとともに第3章及び第4章で提示した厳密解を実流域に適用できるよう改善を加えたいと考えている。

参 考 文 献

- 1) 高棹琢馬, 池淵周一: 長期流出機構の情報理論的研究, 京都大学防災年報第12号B, 昭和43年3月, pp. 193-209.
- 2) 高棹琢馬, 池淵周一: シヤノン流情報理論からみた水文現象の不確定構造, 水理講演会論文集, 1975年2月, pp. 65-69.
- 3) 高棹琢馬, 池淵周一, 寒川典昭: 降雨・流出変換システムのエントロピー的解釈, 昭和55年土木学会関西支部年次学術講演会講演概要集, 昭和56年6月.
- 4) 高棹琢馬, 池淵周一: エントロピー的にみた降雨・流出変換特性とそのモデル化, 京都大学防災研究所年報第23号B-2, 昭和55年4月.
- 5) 高棹琢馬, 池淵周一: 不確定現象のエントロピー的解釈, 土木学会誌, 確率統計水文講座6, 1978年5月.
- 6) 前出4)
- 7) 大泉充郎, 野口正一, 本多波雄: 情報理論, オーム社, 昭和37年12月, pp. 24-27.
- 8) 前出4)
- 9) 前出5)
- 10) 前出2)

〔付録1〕(4.14), (4.15) 式の誘導

この問題に関する Lagrange 関数は

$$L_1 = I' + \nu(\sum_i P_i - 1) + \xi(\sum_j Q_j - 1) + \sum_j \theta_j(\sum_i P_i \cdot Q_i \cdot P_{ii}(j) - P_j) + \sum_{ii} \pi_{ii}(\sum_j P_{ii}(j) - 1) \dots(1)$$

と書かれるから、上式を  $P_i$ ,  $Q_j$  及び  $P_{ii}(j)$  に関して極大にすればよい。ここに、 $\nu$ ,  $\xi$ ,  $\theta_j$  及び  $\pi_{ii}$  は未定乗数である。さて(1)式を  $P_{ii}(j)$ ,  $P_i$  及び  $Q_j$  で偏微分して '0' に等しいと置くと、

$$\frac{\partial L_1}{\partial P_{ii}(j)} = \frac{P_i \cdot Q_i (1 + \log P_{ii}(j))}{l} - \frac{c \cdot P_i \cdot Q_i \cdot l_{ij}}{l} + \theta_j \cdot P_i \cdot Q_i + \pi_{ii} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial P_i} = \frac{-(1 + \log P_i) + \sum_{ii} Q_i \cdot P_{ii}(j) \cdot \log P_{ii}(j)}{l} - \frac{c \sum_{ii} Q_i \cdot P_{ii}(j) \cdot l_{ij}}{l} + \nu + \sum_j \theta_j \cdot Q_i \cdot P_{ii}(j) - \theta_i = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial Q_j} = \frac{\sum_{ii} P_i \cdot P_{ii}(j) \cdot \log P_{ii}(j)}{l} - \frac{c \cdot \sum_{ii} P_i \cdot P_{ii}(j) \cdot l_{ij}}{l} + \xi + \sum_{ii} \theta_j \cdot P_i \cdot P_{ii}(j) = 0 \dots\dots\dots(4)$$

が得られる。まず(2)式に  $P_i$  を乗じ  $i$  について加えると、

$$\nu = \frac{1}{l} \dots\dots\dots(5)$$

となる。(2)式から未定乗数を含んだ形で  $P_{ii}(j)$  を求めると

$$P_{ii}(j) = \exp\left(-1 - \frac{l \cdot \pi_{ii}}{P_i \cdot Q_i}\right) \cdot \exp(-l \theta_j + c \cdot l_{ij}) \dots\dots\dots(6)$$

となり、これを制約条件の1つである(3.8)式に代入すると

$$\exp\left(-1 - \frac{l \cdot \pi_{ii}}{P_i \cdot Q_i}\right) = \frac{1}{\sum_j \exp(-l \cdot \theta_j + c \cdot l_{ij})} \dots\dots\dots(7)$$

となる。従って  $P_{ii}(j)$  は(6), (7)式より

$$P_{ii}(j) = \frac{\exp(-l \cdot \theta_j + c \cdot l_{ij})}{\sum_j \exp(-l \cdot \theta_j + c \cdot l_{ij})} \dots\dots\dots(8)$$

と求まり、ここで  $V_j = \exp(-l \cdot \theta_j)$  とおくと、上式は

$$P_{ii}(j) = \frac{V_j \cdot \exp(c \cdot l_{ij})}{\sum_j V_j \cdot \exp(c \cdot l_{ij})} \dots\dots\dots(9)$$

と書き換えられる。さらに上式をエルゴード性の仮定から導かれる制約条件(3.5)式に代入して次式を得る。

$$V_j \cdot \sum_{ii} \left\{ \frac{P_i \cdot Q_i \cdot \exp(c \cdot l_{ij})}{\sum_j V_j \cdot \exp(c \cdot l_{ij})} \right\} = P_j \dots\dots\dots(10)$$

上式が  $V_j$  が満足しなければならぬ方程式である。

〔付録2〕(4.16), (4.17), (4.18) 式の誘導

この問題に関する Lagrange 関数は

$$L_2 = l' + l(\sum_i P_i - 1) + d(\sum_i Q_i - 1) + \sum_j \theta_j (\sum_{ii} P_i \cdot Q_i \cdot P_{ii}(j) - P_j) \\ + \sum_j A_j (\sum_{ii} P_i \cdot Q_i \cdot P_{ii}(j) - Q_i) + \sum_j \Pi_j (\sum_{ii} P_i \cdot Q_i \cdot P_{ii}(j) - P_i) \dots\dots\dots(11)$$

で示される。ここに、 $l'$ ,  $d$ ,  $\theta_j$ ,  $A_j$  及び  $\Pi_j$  は未定乗数である。まず(11)式の右辺を  $P_{ii}(j)$ ,  $P_i$  及び  $Q_i$  に関して偏微分して '0' に等しいとおくと、

$$\frac{\partial L_2}{\partial P_{ii}(j)} = \frac{P_i \cdot Q_i (1 + \log P_{ii}(j))}{l} - \frac{c \cdot P_i \cdot Q_i \cdot l_{ij}}{l} + \theta_j \cdot P_i \cdot Q_i + A_i \cdot P_i \cdot Q_i + \Pi_i \cdot P_i \cdot Q_i = 0 \dots\dots(12)$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial P_i} = \frac{-(1 + \log P_i) + \sum_{ii} Q_i \cdot P_{ii}(j) \cdot \log P_{ii}(j)}{l} - \frac{c \cdot \sum_{ii} Q_i \cdot P_{ii}(j) \cdot l_{ij}}{l} + l' + \sum_j \theta_j \cdot Q_i \cdot P_{ii}(j) \\ - \theta_i + \sum_{ii} A_i \cdot Q_i \cdot P_{ii}(j) + \sum_{ii} \Pi_i \cdot Q_i \cdot P_{ii}(j) - \Pi_i = 0 \dots\dots\dots(13)$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial Q_i} = \frac{\sum_{ii} P_i \cdot P_{ii}(j) \cdot \log P_{ii}(j)}{l} - \frac{c \cdot \sum_{ii} P_i \cdot P_{ii}(j) \cdot l_{ij}}{l} + d + \sum_j \theta_j \cdot P_i \cdot P_{ii}(j) + \sum_{ii} A_i \cdot P_i \cdot P_{ii}(j) - A_i \\ + \sum_{ii} \Pi_i \cdot P_i \cdot P_{ii}(j) = 0 \dots\dots\dots(14)$$

(12)式に  $P_{ii}(j)$  を乗じ  $i, j, s$  について総和をとると、

$$\frac{1}{l} + \frac{\sum_i P_i \cdot \log P_i}{l} + \sum_j \theta_j \cdot P_j + \sum_j A_j \cdot Q_j + \sum_j \Pi_j \cdot P_j = 0 \dots\dots\dots(15)$$

(13)式に  $P_i$  を乗じ  $i$  について総和をとると

$$-\frac{1}{l} + l' + \sum_j A_j \cdot Q_j = 0 \dots\dots\dots(16)$$

(14)式に  $Q_i$  を乗じ  $s$  について総和をとると、

$$\frac{\sum_i P_i \cdot \log P_i}{l} + d + \sum_j \theta_j \cdot P_j + \sum_j \Pi_j \cdot P_j = 0 \dots\dots\dots(17)$$

が得られる。(15)式と(16)式の差を求めると未定乗数  $l'$  は

$$\Gamma = \frac{2}{l} + \frac{\sum_i P_i \cdot \log P_i}{l} + \sum_j \theta_j \cdot P_j + \sum_i \Pi_i P_i \dots\dots\dots (18)$$

(15)式と(17)式との差を求めると未定乗数  $A$  は

$$A = \frac{1}{l} + \sum_i A_i \cdot Q_i \dots\dots\dots (19)$$

となる。さらに、(15)式を整理すると

$$A_i = \frac{c \cdot l_{ij}}{l} - \frac{1 + \log P_{ii}(j)}{l} - \theta_j - \Pi_i \dots\dots\dots (20)$$

が得られる。そこで、上式を(18)式とともに(13)式に代入して整理すれば、

$$-\frac{\log P_i}{l} + \frac{\sum_i P_i \cdot \log P_i}{l} = (\Pi_i + \theta_i) - \sum_i P_i (\Pi_i + \theta_i) \dots\dots\dots (21)$$

なる ' $\Pi_i + \theta_i$ ' に関する方程式が導き出される。上式を解くと、

$$\Pi_i + \theta_i = -\frac{\log P_i}{l} - K \dots\dots\dots (22)$$

となる。ここで、 $K$  は任意定数である。(22)式を(17)式に代入して整理すると、

$$A = K \dots\dots\dots (23)$$

となる。又、(22)式を(18)式に代入して整理すると

$$\Gamma = \frac{2}{l} - K \dots\dots\dots (24)$$

が得られる。一方(20)式を  $\log P_{ii}(j)$  について解くと、

$$\log P_{ii}(j) = c \cdot l_{ij} - 1 - l(\Pi_i + \theta_j + A_i) \dots\dots\dots (25)$$

が得られるから、上式を(23)式とともに(14)式に代入すれば

$$A_i = -\frac{1}{l} + K \dots\dots\dots (26)$$

となる。(22)式は

$$\Pi_i = -\frac{\log P_i}{l} - K - \theta_j \dots\dots\dots (27)$$

と書き換えられるから、上式を(26)式とともに(25)式に代入して整理すると、

$$\log P_{ii}(j) = c \cdot l_{ij} + \log P_i + l \theta_j - l \cdot \theta_j \dots\dots\dots (28)$$

となる。ここで、 $l \theta_i = -\log D_i$ ,  $l \theta_j = -\log D_j$ ,  $c = \log W$  とおけば上式は

$$P_{ii}(j) = \frac{D_j}{D_i} \cdot P_i \cdot W^{l_{ij}} \dots\dots\dots (29)$$

と書かれる。上式に含まれる  $D_i$  及び  $W$  は以下のようにして決定される。まず(29)式を(3.12)式に代入して整理すると、

$$\sum_j D_j \{P_i \cdot Q_i \cdot W^{l_{ij}} - \delta_{ij}\} = 0 \dots\dots\dots (30)$$

が得られる。上式は  $D_i$  についての連立線形方程式である。この式がすべての  $i$  について  $D_i = 0$  という意味のない解以外の解を持つのは

$$|\sum_j P_i \cdot Q_i \cdot W^{l_{ij}} - \delta_{ij}| = 0 \dots\dots\dots (31)$$

のときだけである。