

# 多ダム・多評価地点系の最適操作に関する研究

高棹 琢馬・池淵 周一・小尻 利治

## A STUDY FOR THE OPTIMAL CONTROL OF MULTI-RESERVOIR AND MULTI-DEFENCE POINT SYSTEM

By *Takuma TAKASAO, Shūichi IKEBUCHI and Toshiharu KOJIRI*

### Synopsis

The aim of this study is to establish an optimal operation procedure for water quantity control system with multi-reservoir and multi-defence point. That is to say, the complexity varies directly with the number of reservoirs and defence points, since they add other variables to the problem. So, introducing the decomposition method, we divid the original system into several subsystems and total system is optimized by synthesizing the optimal solutions of subsystems. The advantage of this approach is the reduced amount of the computer memory and the shortened computation time. Moreover, the application of Dynamic Programming in subsystem permits to use the non-linear criterion function and regulates the sequences of the controlled flow passing through the defence point.

Those approaches are applied to the dam operations system in Yodo River.

### 1. 序 論

洪水被害の軽減・防止施設および水需要の供給施設としてダム計画および建設が進められているが、それにともなって、次の2つの問題が重要視されている。すなわち、第1はダム群の最適配置・規模決定であり、いわゆるシステム設計の問題である。従来、この問題は地形条件を含めた物理的条件、および社会・経済的諸条件より決定されてきた。しかし、ダム群として考えれば、これらの条件に加えて操作条件をも考慮した設計を行う必要があるのは当然であろう。

第2は台風性降雨や集中豪雨などによる異常出水、あるいは濁水に対処する現実の操作ルール決定問題である。これは正に適応制御問題であり、流入ハイドログラフの予測が不可欠である。予測精度の低い現状では、一定量放流、一定率貯留などの固定的な操作ルールが採用されている。最近、著者らは台風性降雨に限ってではあるが、今後の進路の条件付遷移確率に基づく乱数発生により多数の進路をシミュレートし、放流量を超過確率で決定するストカスティック・コントロール方式を展開している<sup>1)</sup>。

ところで、第1の問題では既知の流入ハイドログラフに対するダム群の最適操作が基本であり、DP (Dynamic Programming) の応用はこの問題にかなり有力な情報を提供している<sup>2)</sup>。著者らも制御目的として、便益の最大化で示す“経済的指標”の他に、評価地点の通過流量と許容流量の比を、治水では最小、利水では最大とする“物理的指標”を提供し、その目的に適合した評価関数の考察を行っている<sup>3)</sup>。このように、ダム群操作の問題はDPによって定式化されるが、一方では制御対象とするダム数が増加してくると、システム全体として最適解を求めることが困難になる。いわゆる dimensionality の問題である。竹内はDPとLP (Linear Programming) の特徴を生かしたDCL手法によって計算時間の短縮をはかっているが<sup>4)</sup>、評価関数の与え方や dimension の点で問題が解決されたとはいえない。

本研究はこうした一連のダム操作問題の現況をふまえ、第1の問題でとくに解決の急がれている、複数ダ

ム・複数評価地点系をもつ大規模システムの水量制御問題に焦点をあてたものである。

一般に、ダム群の制御問題を LP で表示すると、独立した部分ユニットが時間的あるいは空間的に連結された形になる。また、その係数行列に非ゼロ成分の占める割合は非常に少なく、システムの配列は対角構造をもったブロック状になる傾向にある。本研究は上記の点に着目し、このような対角ブロック構造をもつ制御問題の解法として、Dantzig-Wolf の提案した分解原理 (Decomposition Method) が極めて有力であることを示し、水系一貫した統合操作を確立しようとするものである。基本的な考え方はカリフォルニア水計画の中でもとり入れられているが<sup>5)</sup>、本研究ではより具体的に、かつ、ダム操作における DP の有効性を保持した形で議論を進めている。なお、理論展開の有効性を実証するため、淀川水系の 4 ダムを対象に選り、シミュレーションを行った。

## 2. ダム群による水量制御の定式化

### 2.1 水量制御の定式化

ダム群による水量制御の一般の問題は、外乱とパラメータ変動によって生ずる系の変動に対して、制御系の目的を表わす合成変数をその最適値に保持するような決定変数および状態変数を見出すことである。本研究では、水量制御システムが多段階であることや、非線形評価関数の適用可能性の点で基本的には DP を用い、さらに、分解原理によるサブシステム化をはかるために、LP の手法も導入している。また、現実に即した制御効果を得るには河道効果を見逃すことができない。そこで以下では、DP および LP、それぞれに適した流下機構を導入して定式化を試みる。

#### (1) DP による定式化

まず、DP による定式化であるが、貯留関数法によって河道効果を表現しよう。ダムの総数を  $N$ 、評価地点の総数を  $M$ 、制御期間の総数を  $T$ 、時刻  $t$  でのダム  $n$  への平均流入量を  $I_n(t)$ 、平均放流量を  $O_n(t)$ 、貯留量を  $S_n(t)$  とし、河道の総数を  $W$ 、河道  $w$  での遅滞時間を  $\tau_w$ 、平均流入量を  $I_w(t)$ 、平均流出量を  $\bar{O}_w(t)$ 、貯留状態を  $\bar{S}_w(t)$  とすると関数漸化式は次のようになる<sup>6)</sup>。

$$f_1(S_1(t), \dots, S_N(t), \bar{S}_1(t+\tau_1), \dots, \bar{S}_w(t+\tau_w)) = \min_{\substack{(O_n(t)) \\ (S_m(t))}} \left\{ \sum_{m=1}^M D_m \{Q_m(t+\tau_m)\} \right. \\ \left. + f_{i-1}(S_i(t-1), \dots, S_N(t-1), \bar{S}_1(t+\tau_1-1), \dots, \bar{S}_w(t+\tau_w-1)) \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$f_2(S_1(2), \dots, S_N(2), \bar{S}_1(2+\tau_1), \dots, \bar{S}_w(2+\tau_w)) = \sum_{m=1}^M D_m \{Q_m(2+\tau_m)\} \\ + f_1(S_1(1), \dots, S_N(1), \bar{S}_1(1+\tau_1), \dots, \bar{S}_w(1+\tau_w)) \dots\dots\dots (2)$$

$$f_i(S_1(1), \dots, S_N(1), \bar{S}_1(1+\tau_1), \dots, \bar{S}_w(1+\tau_w)) = \sum_{m=1}^M D_m \{Q_m(1+\tau_m)\} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、貯留関数より

$$\bar{S}_w(t+\tau_w) = K_w \{ \bar{O}_w(t+\tau_w) \}^{P_w} \dots\dots\dots (4)$$

の関係がある。ここに、 $K_w$  および  $P_w$  は河道  $w$  の固有定数であり、 $D_m \{Q_m(t+\tau_m)\}$  は評価地点  $m$  に付与された評価関数、 $Q_m(t+\tau_m)$  は評価地点の通過流量である。上式に従って、 $t=1, 2$  から  $T$  まで計算を進め、最後に、目標とする最終ダム貯留量  $S_N^0(\tau)$  を与え、それに対応する最終河道状態  $\bar{S}_w(T+\tau_w)$  のうち、目的関数を最小とするものが河道の最適最終状態となる。したがって、このダムおよび河道の最終状態に到達する放流政策が求める最適放流量系列、得られる関数値が最適 (最小) 目的関数値である。

#### (2) LP による定式化

つづいて LP による定式化であるが、河道効果として次の線形応答関数を用いる<sup>7)</sup>。

$$r(t+\tau^*) = \frac{e^{-(t-\tau^*)/k^*}}{k^*} \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 $k^*$ 、 $\tau^*$  は線形応答関数における貯留係数と時間遅れである。式 (5) より河道  $w$  の流出流量は

$$\bar{O}_w(t+\tau_w^*) = \sum_{i=\tau_w^*}^t r(t-\tau_w^*) \cdot I_w(t-\lambda+\tau_w^*) \dots\dots\dots (6)$$

で与えられる。そこで、式 (5) による時間配分率を  $r_w^i$  とおけば、単ダム・1河道・1評価地点系の場合、評価地点の通過流量は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} Q_m(1) \\ Q_m(2) \\ \vdots \\ Q_m(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_w^1 & & & 0 \\ & r_w^2 & r_w^1 & \\ & \vdots & \ddots & \\ & r_w^T & & r_w^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_n(1) \\ S_n(2) \\ \vdots \\ S_n(T-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_n(0)+I_n(1) \\ I_n(2) \\ \vdots \\ I_n(T-1) \\ -S_n(T)+I_n(T) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_w(1) \\ q_w(2) \\ \vdots \\ q_w(T) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $q_w(t)$  は河道  $w$  のすぐ上流で合流し、ダムや評価地点を通過しない支川流量である。式 (7) にダム群の配置による合流条件を加えると、制御系が LP によって表示されたことになる。そして、目的関数を

$$z = \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T \{C_m(t) \cdot Q_m(t)\} \longrightarrow \min \dots\dots\dots (8)$$

と置けば、あとはダムと流量に関する制約、たとえば破堤や濁水条件を追加することによって定式化が完成する。

**2.2 制御目的と評価関数**

前節のようにしてダム操作の定式化が行われたわけであるが、つぎに問題となるのは目的関数の具体的な設定である。本節では、従来より用いられている制御目的に考察を加えるとともに、新たな評価関数を提案する。

(1) 便益の最大化 (あるいは損失の最小化)

治水・利水を問わず、従来より広く用いられている方式で、各評価地点での便益の総和を最大化 (あるいは損失を最小化) することが制御目的となり、次式によって定義される。

$$J = \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T B_m [Q_m(t)] \longrightarrow \max \text{ (or } \min) \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 $B_m [Q_m(t)]$  は評価地点  $m$  に付与された便益関数で、一般に、かんがい、水力発電、リクリエーション、都市・工業用水、河道の水位維持などによる便益のほか、洪水時における損失も負の便益として含まれることが多い。したがって、多目的操作が行えるという利点はあるが、(i) 1次便益および2次便益をどのように評価するか、(ii) 各便益を同一の単位で評価できるか、(iii) 治水・利水の競合関係、あるいは制御期間、制御単位の相違をどのように取り扱うか、など実用上の難点も多い。また、算定の都合上、便益関数が直線で与えられることがあり、非線形制御問題を対象とする DP の評価関数にはあまり適さない。

(2) ピーク流量の低減 (あるいは最低流量の上昇)

著者が提案した方法で、操作は用途別、すなわち、治水・利水それぞれに対して別途に行おうとするものである<sup>3)</sup>。治水制御では、水系一貫した操作によってダム下流河道におけるピーク流量を可能な限り小さくし、かつ、ピークの継続時間も短かくして、越水による破堤を防ぐことと制御目的を定義した。たとえば、各評価地点の許容流量を  $Q_{md}$ 、制御後の評価地点流量の最大値を  $Q_{mp}$  とすると、上記の目的は

$$\mathbf{K} \equiv \max \{Q_{mp}/Q_{md}\} \longrightarrow \min \quad (m=1, 2, \dots, M) \dots\dots\dots (10)$$

かつ

$$\mathbf{K} \leq 1$$

と表わすことができる。この制御目的を満たす評価関数としては

$$D_m [Q_m(t)] = \{(\omega+1) \cdot M\} a_m Q_m(t)^{-b} \dots\dots\dots (11)$$

が想定できる。ただし、 $a_m$  は  $a_m Q_{md} = \text{Const.}$  なる正整数、 $\omega$  は各時刻での状態変数の変動可能範囲の最大値、 $b$  は計算時に使用する任意定数である。

一方、利水制御目的としては、各評価地点である期間、常にある需要量  $Q_{md}$  を満たす流量が流れていて、それを下回らないことと定義すると、

$$P \equiv \min \{Q_{mt}/Q_{md}\} \longrightarrow \max \quad (m=1, 2, \dots, M) \dots\dots\dots (12)$$

かつ

$$P \geq 1$$

と表現される。評価関数としては治水との双対性より

$$D_m\{Q_m(t)\} = \{(\omega+1)M\}^{-\alpha_m Q_m(t)+\beta} \dots\dots\dots (13)$$

を提案している。ここに、 $Q_{mt}$  は制御後の評価地点  $m$  を通過する流量の最低値である。

式 (11), (13) は凸関数であり、流況全体にわたって、しかも各評価地点間で平等に平滑化が進むので、極めて有効な関数である。ただ、指数関数であるため計算機内で、(i) 計算時間が多くかかる、(ii) オーバーフロー、アンダーフローが発生する可能性がある、などの欠点を有するが、それに対処するいくつかの方法も同時に提案されている。

(3) 破堤可能性の減少 (あるいは洪水可能性の減少)

本方式は指数関数の欠点を是正すべく著者が新たに提案する関数で、本質的には (2) と同じく、ダム操作による破堤の防止を目的としている。また、解が存在しない、いいかえると、どこかの評価地点で破堤する場合は与えられた施設群で防御しきれないとして別の扱い方をする。目的関数としては堤防の危険率の最小化であり、危険率を  $h_m\{Q_m(t)\}$  とすると、制御目的は次のようになる。

$$H = \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T h_m\{Q_m(t)\} \longrightarrow \min \dots\dots\dots (14)$$

かつ

$$h_m\{Q_m(t)\} \leq 1 \quad (m=1, 2, \dots, M)$$

この危険率が備えるべき条件としては、次の 4 式を満たすことが必要である。すなわち、

$$(i) \quad \left. \frac{\partial h_m\{Q_m(t)\}}{\partial Q_m(t)} \right|_{Q_m(t)=Q_{md}} = \infty \dots\dots\dots (15)$$

$$(ii) \quad h_m(0) = 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$h_m(Q_{md}) = 1 \dots\dots\dots (17)$$

$$(iii) \quad \left. \frac{\partial h_m\{Q_m(t)\}}{\partial Q_m(t)} \right|_{0 < Q_m(t) < Q_{md}} > 0 \dots\dots\dots (18)$$

上記の条件 (i), (ii), (iii) を同時に満たす関数は存在しないので、一般に  $Q_{md} \gg 1$  であることから式 (15) を

$$\left. \frac{\partial h_m\{Q_m(t)\}}{\partial Q_m(t)} \right|_{Q_m(t)=Q_{md}+1} = \infty \dots\dots\dots (19)$$

とおきかえる。式 (16), (17), (18), (19) を満たす関数としては、

$$\frac{\partial h_m\{Q_m(t)\}}{\partial Q_m(t)} = \frac{1}{Q_{md}+1-Q_m(t)} \dots\dots\dots (20)$$

より、

$$h_m\{Q_m(t)\} = 1 - \frac{\ln(Q_{md}+1-Q_m(t))}{\ln(Q_{md}+1)} \dots\dots\dots (21)$$

が得られる。式 (21) は凸関数であり、流況の平滑化がはかれるとともに、分解原理の適用に際して極めて有利である。

一方、利水の制御目的は、評価地点の通過流量がある基準以下になると被害が発生するので、流量の低下を押え、安全な流況を得ることと定義できる。すなわち、式 (14) がそのまま利水の制御目的となり、危険率の条件を次のように表現できる。

$$(i) \quad \left. \frac{\partial h_m\{Q_m(t)\}}{\partial Q_m(t)} \right|_{Q_m(t)=Q_{md}} = -\infty \dots\dots\dots (22)$$

$$(ii) \quad h_m\{Q_{md}\} = 1 \dots\dots\dots (23)$$

$$h_m\{\infty\}=0 \dots\dots\dots (24)$$

$$(iii) \frac{\partial h_m\{Q_m(t)\}}{\partial Q_m(t)} > 0 \quad (Q_{md} < Q_m(t) < \infty) \dots\dots\dots (25)$$

また、 $Q_{md} \gg 1$  より式 (22) を

$$\left. \frac{\partial h_m\{Q_m(t)\}}{\partial Q_m(t)} \right|_{Q_m(t)=Q_{md}-1} = -\infty \dots\dots\dots (26)$$

とおきかえることによって危険率は

$$h_m\{Q_m(t)\} = \frac{1}{Q_m(t)+1-Q_{md}} \dots\dots\dots (27)$$

で与えられる。

以上、いくつかの目的関数および評価関数を見てきたが、式 (11)、(13) はその導出過程が DP の計算手順を考慮したものであり、状態変数の領域を制限する DDDP の使用には適している。しかし、評価地点の増加や許容流量の規模によって、あるいはダム操作を LP で行う場合には  $\omega$  の与え方に問題が残る。すなわち、大規模制御問題への適用は困難である。これに対して、式 (21)、(27) は DP での計算の容易さは言うまでもなく、LP にもちこんだ場合でも、部分線形化などの適用性に富んでいる。

### 3. ダム群の大規模システムにおける最適操作

#### 3.1 分解原理によるシステムの分割

ダム群大規模システムの定式化は前章のようにすれば可能であるが、そのままプログラム化を行うと、計算機上の記憶容量や計算時間の点で実行不可能となる場合が多い。そこで本章では、こうした問題に有効な解法である分解原理を導入してシステムの分割化をはかり、より迅速、かつ正確に最適解を得ようとするものである。なお、分解原理のアルゴリズムの詳細については文献にゆずり<sup>9)</sup>、ここではダム群制御システムへの適用についてのみ述べる。評価関数としては後節で触れるように、部分線形化が可能なものを用いるので、線形関数として議論を進める。

まず、水系がダムに応じて  $N$  個のブロック (部分問題) に分割できるとすれば、水系全体の制約条件および各ブロックの制約条件は次のように表示される。

水系全体の制約条件：

$$\sum_{n=1}^N \mathbf{A}_n \cdot \{[S_n(t)], [O_n(t)], [Q_{mn}(t)]\} = \mathbf{b}_0 \dots\dots\dots (28)$$

$n$  番目のブロックの制約条件：

$$\mathbf{B}_n \cdot \{[S_n(t)], [O_n(t)], [Q_{mn}(t)]\} = \mathbf{b}_n \quad (n=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots (29)$$

ここに、 $\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n$  はブロック  $n$  での係数行列、 $\mathbf{b}_0$  は水系全体の結合を表わす列ベクトル、 $\mathbf{b}_n$  はブロック  $n$  での列ベクトルである。 $\{Q_{mn}(t)\}$  がダム  $n$  の影響を直接受ける評価地点流量とすると、もとの問題は上記の条件のもとで、目的関数

$$Z = \sum_{n=1}^N \mathbf{C}_n \cdot \{[S_n(t)], [O_n(t)], [Q_{mn}(t)]\} \dots\dots\dots (30)$$

を最小 (あるいは最大) にする放流量系列を求めることになる。ただし、 $\cdot$  は行ベクトルを表わす。

ところで、 $\mathbf{x}_n = \{[S_n(t)], [O_n(t)], [Q_{mn}(t)]\}$  とおくと、式 (29) を満たす任意の  $\mathbf{x}_n$  は、一般につきのよな凸線形結合で表わすことができる。すなわち、

$$\mathbf{x}_n = \sum_{j=1}^{l_n} \mu_n^j \mathbf{x}_n^j \dots\dots\dots (31)$$

$$\sum_{j=1}^{l_n} \mu_n^j = 1 \dots\dots\dots (32)$$

$$\mu_n^j \geq 0 \quad (n=1, 2, \dots, N)$$

ただし  $\mathbf{x}_n^j$  は式 (29) を満たす  $\mathbf{x}_n$  で形成される凸多面体の端点、 $l_n$  は用いる端点の総数である。式 (31)

を式 (30) に代入すると、 $\mu_n^j$  を新しい変数とする次の LP 問題が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{l_n} A_n \mu_n^j X_n^j = b_0 \\ & \sum_{j=1}^{l_n} \mu_n^j = 1 \\ & \mu_n^j \geq 0 \quad (n=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

$$z = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{l_n} C_n^j \mu_n^j \cdot x_n \longrightarrow \min \text{ (or max)}$$

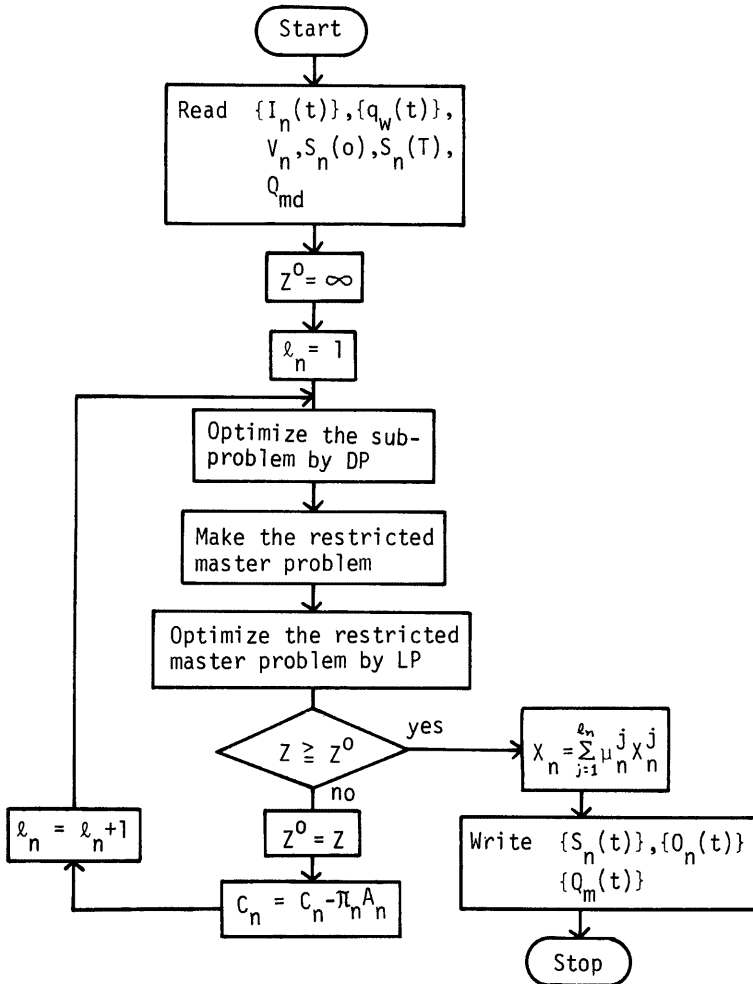


Fig. 1. Flow chart for optimal operation procedure of large control system by using the decomposition method.

上式を限定された主問題と呼び、最適解  $\{\mu_n^j, z_0\}$  およびそれに対応するシンプレックス乗数  $\pi_0', \pi_N(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ ; すなわち Shadow Price が得られる。ただし、 $\pi_0'$  は式 (28) に対応したベクトルであり、 $\pi_n$  は  $\mu_n^j$  に対応するスカラーである。

ここにおいて、 $z^0$  をさらに増加できる  $x_n$  は存在しないが、それ以外にも多くの基底解は存在するはずである。したがって、 $N$  個の部分問題について、 $z^0$  の増加に寄与する他の  $x_n$  をさがすことが重要であり、それは次の部分問題を解くことにほかならない。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_n \mathbf{x}_n &= \mathbf{b}_n \\ \mathbf{x}_n &\geq 0 \quad (n=1, 2, \dots, N) \\ z_n &= \{C_n' - \pi_0' / A_n\} \mathbf{x}_n \longrightarrow \min \text{ (or max)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

式 (34) の解  $x_n^{j_{n+1}}$  と  $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^{j_{n+1}}$  を用いて再び式 (33) の限定された主問題を形成し、最適解を決定する。以上の計算を各最適値  $z^0$  が減少しなくなるまで繰り返すわけであるが、最終値、すなわち、部分問題の解  $z_n^0$  は最適基準

$$z_n^0 - \pi_n \geq 0 \dots \dots \dots (35)$$

を満たしており、 $z^0$  がもとの問題での最適値であることは明らかである。なお、定式化の都合上、LP で説明を行ったが、式 (34) の新しい  $x_n^{j_{n+1}}$  の決定問題には DP を用いることも可能であり、非線形評価関数の採用による広汎な水量制御を対象となし得る。Fig. 1 は以上の手順をフローチャートで示したものである。具体的なダム制御系の適用方法としては、Fig. 2 のような並列型では、各ダムと直下流の評価地点が部分問題を構成し、その結果と、合流条件および合流後の評価地点が限定された主問題となる。一方、直列型では下流のダムが上流のダムに対して従属関係にあり、各ダムを独立な部分問題とすることができない。しかし、連続する2個のダムをとり出して考えれば、上流側を部分問題とし、下流側を主問題に組み入れて解くことができる。したがって、Fig. 3 のような場合、まず最上流のダム1, 2を考え、それぞれ部分問題、

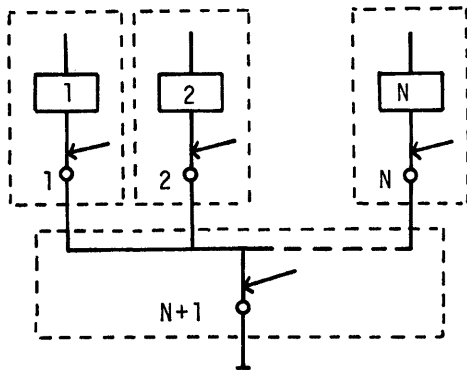


Fig. 2. Relationship between subproblem and restricted master problem in parallel reservoirs.

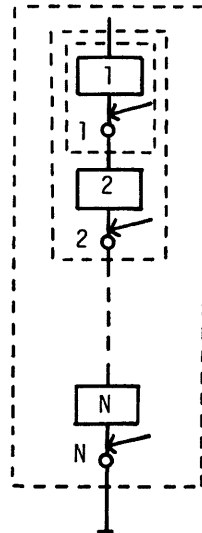


Fig. 3. Relationship between subproblem and restricted master problem in series reservoirs.

限定された主問題として最適化をはかる。つづいて、その結果をダム 1, 2 からなる部分問題の解とみなし、ダム 3 で限定された主問題を構成する。こうして次第にダム数を増加していくと、最終的にはトータルシステムでの最適化が得られる。もちろん、直列型の限定された主問題では、2 章で述べた LP による定式化が用いられる。

3.2 非線形評価関数の部分線形化

非線形評価関数は、制御目的を満足すると同時に流況の平滑化にも貢献しており、水量制御での重要な役割を演じている。そこで本節では、非線形関数の部分線形化法について考察を行う。

(1) 凸関数

式 (11) あるいは式 (21) のような曲線であり、この関数の部分線形化は極めて容易である。たとえば、Fig. 4 のような分割を考えよう。すなわち、

$$0 \leq U_m^y(t) \leq Q_{md}^y(t) - Q_{md}^{y-1}(t) \dots\dots\dots (36)$$

$$U_m^{\bar{y}}(t) = Q_{md}^{\bar{y}}(t) - Q_{md}^{\bar{y}-1} \quad (\bar{y} = 1, 2, \dots, y-1) \dots\dots\dots (37)$$

$$U_m^{y'} = 0 \quad (y' = y+1, \dots, Y) \dots\dots\dots (38)$$

とすれば、関数と流量はそれぞれ

$$h_m\{Q_m(t)\} \approx \sum_{y=1}^Y C_m^y(t) \cdot U_m^y(t) \dots\dots\dots (39)$$

$$Q_m(t) = \sum_{y=1}^Y U_m^y(t) \dots\dots\dots (40)$$

となる。ここに、Y は分割区間の総数を示す。以上の条件より目的関数は

$$z \approx \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{y=1}^Y C_m^y(t) \cdot U_m^y(t) \longrightarrow \min \dots\dots\dots (41)$$

で置きかえられる。さいわい、最小化問題では  $C_m^1(t), C_m^2(t), \dots$  の値が順次増加するため、原点に近い方の  $U_m^y(t)$  からその上昇巾 ( $Q_{md}^y(t) - Q_{md}^{y-1}(t)$ ) を満たしていけばよい。結局、定式化には式 (37), (38) の制約は不要になり、式 (36) だけで流量の条件式 (40) が成立する。また、目的関数値はもとの場合と比較して若干危険側になるが、制御面からいえば安全側になり、危険率の近似値として採用できる。

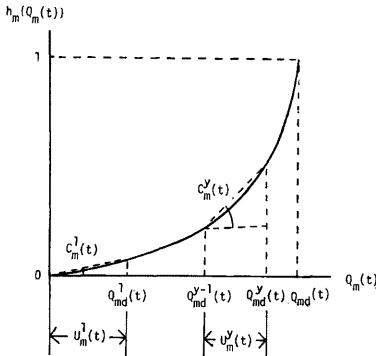


Fig. 4. Representation of piecewise linear approximation in convex function.

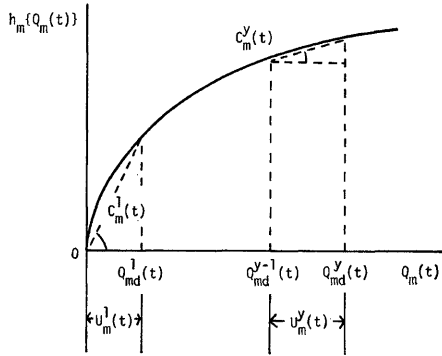


Fig. 5. Representation of piecewise linear approximation in concave function.

(2) 凹関数

流量の増加につれて関数が減少する Fig. 5 の最小化問題を考えよう。凸関数のように式 (36) だけでは、流量の小さい方が関数の変化率が大きいので、 $U_m^y(t)$  が 0 になるにもかかわらず、 $U_m^{y+1}(t)$  が値をもつ場



合があり、式 (40) の意味が失われる。したがって、式 (37), (38) を含めた制御問題となり、定式化は次のようになる。すなわち、式 (36), (39), (40), (41) のほかに、整数変数  $\alpha_m^y (=0 \text{ or } 1)$  を導入し、

$$U_m^y(t) - \alpha_m^y(Q_{ma}^y(t) - Q_{ma}^{y-1}(t)) \geq 0 \dots\dots\dots (42)$$

$$-U_m^{y+1}(t) + \alpha_m^y(Q_{ma}^{y+1}(t) - Q_{ma}^y(t)) \geq 0 \dots\dots\dots (43)$$

なる条件を加えることによって、定式化が終了する。上式はいわゆる混合整数問題であり、(1) の方法と比較して変数や制約条件が多くなる。また、図のような線形化では目的関数値が真の値より減少することになり、実際に用いるのは、接線を利用した部分線形化が必要であろう。ただし、本線形化は流量の条件式 (37), (38) を重視したものであり、単に凹関数に限らず任意の曲線に関しても適用できる。とくに、便益関数のように形状が明白でない関数には有効であろう。

### 3.3 部分問題での非線形評価関数

以上のようにして、非線形評価関数を部分線形化すれば、線形問題として解くことができる。限定された主問題では前述の方法をそのまま定式化に導入すればよいが、部分問題では Shadow Price  $\pi_0'$  によって評価関数を

$$\bar{C}_m^y(t) = C_m^y(t) - E_m(t) \dots\dots\dots (44)$$

と変換して、新たな端点を求める必要がある。ここに、 $E_m(t)$  は  $\pi_0' A_n$  を各評価地点別に分解したものである。部分問題の解法に DP を用いる場合には、式 (44) より関数の傾きを新たに求めなくても、以下の手順によって簡便に表現できる。すなわち、任意の評価関数を  $g_m\{Q_{ma}(t)\}$  とすると、部分線形化による新しい評価関数において、

$$\bar{g}_m\{Q_{ma}^y(t)\} = \bar{C}_m^y(t)\{Q_{ma}^y(t) - Q_{ma}^{y-1}(t)\} + \bar{g}_m\{Q_{ma}^{y-1}(t)\} \dots\dots\dots (45)$$

が成立する。また、式 (44) より

$$\bar{C}_m^y(t) = \frac{g_m\{Q_{ma}^y(t)\} - g_m\{Q_{ma}^{y-1}(t)\}}{Q_{ma}^y(t) - Q_{ma}^{y-1}(t)} - E_m(t) \dots\dots\dots (46)$$

であるから、

$$\bar{g}\{Q_{ma}^y(t)\} - \bar{g}_m\{Q_{ma}^{y-1}(t)\} = g_m\{Q_{ma}^y(t)\} - g_m\{Q_{ma}^{y-1}(t)\} - E_m(t)\{Q_{ma}^y(t) - Q_{ma}^{y-1}(t)\} \dots\dots\dots (47)$$

となる。さらに、式 (47) の漸化式と末端条件より

$$\bar{g}_m\{Q_{ma}^y(t)\} = g_m\{Q_{ma}^y(t)\} - E_m(t) \cdot Q_{ma}^y(t) + E_m(t) \cdot Q_m^0(t) \dots\dots\dots (48)$$

が成立する。ただし、 $Q_m^0(t)$  は対象とする流量の最小値である。ここで、部分線形化の分割を細かくしていくと、

$$\bar{g}_m\{Q_m(t)\} = g_m\{Q_m(t)\} - E_m(t) \cdot Q_m(t) + E_m(t) \cdot Q_m^0(t) \dots\dots\dots (49)$$

が得られる。また、式 (11) や (15) のような評価関数では  $Q_m^0(t) = 0$  となって右辺第 3 項が消え、一層、簡単になる。結局、部分問題に DP を用いると、非線形評価関数が式 (49) で示すようにそのままの形で使用可能であり、流況の平滑化の点でも有利である。したがって、評価関数には非線形関数を用い、部分問題の最適化には DP を適用して水系全体の最適化をはかるのが、最も効率的といえよう。

## 4. 淀川水系への適用と考察

### 4.1 淀川水系における水量制御の定式化

前章までに展開したダム群統合管理の適用例として淀川水系を対象にしよう (Fig. 6 参照)。操作は天ヶ瀬ダム、青蓮寺ダム、室生ダム、高山ダムの 4 ダムで行い、評価地点としては、地理的・経済的観点からも重要視されている名張、宇治、加茂、枚方の 4 地点とする。

現在得られている被害額は破堤することを前提に、ピーク流量より算定されている<sup>9)</sup>。しかも、その関数が折線グラフとして与えられているので、水系の安全性をめざす水量制御問題の評価関数には不適当である。本研究は、河道の疎通能力内での氾濫防止を第 1 目的としており、計算機上の諸問題をも考慮して、制御目

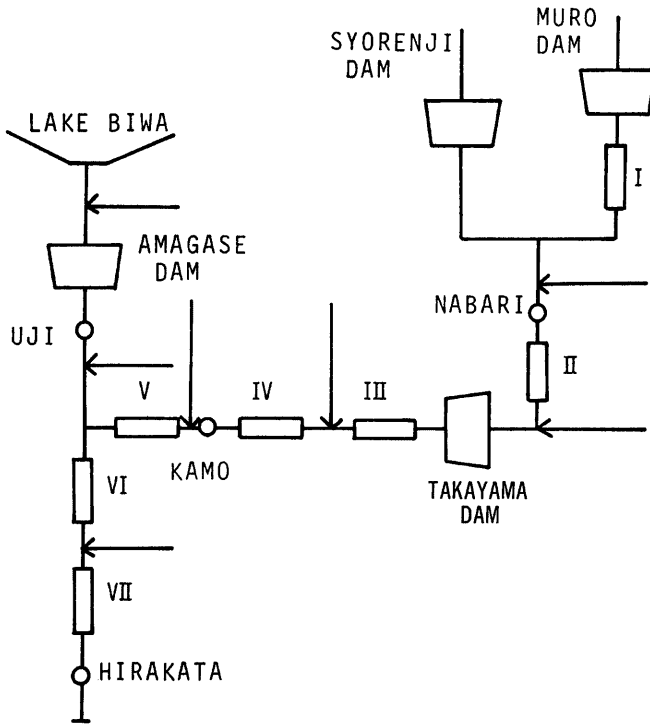


Fig. 6. Typical representation of water control system in Yodo River.

的に破堤の危険率の最小化を採用した。計算方法は、非線形評価関数であるから、部分問題は DP で限定された主問題は LP で解いている。

さて、システムの定式化は以下のように行った。まず、目的関数は前述の危険率関数の和の最小化を考えて、具体的には

$$z = \sum_{t=1}^T [h_N\{Q_N(t)\} + h_U\{Q_U(t)\} + h_K\{Q_K(t)\} + h_H\{Q_H(t)\}] \longrightarrow \min \dots\dots\dots (50)$$

とした。ただし、式中の添字は各評価地点を示し、その地点の頭文字である。ここで考慮しなければならないのは高山ダムの取り扱いである。同ダムは青蓮寺ダム・室生ダムの下流に位置し、両ダムに対して従属関係にある。これは、Fig. 3 の直列ダム群の場合に相等し、ダムでの連続式を限定された主問題の制約の一部としなければならない。また、下流の評価地点（加茂、枚方）では、3.2 で述べた部分線形化が必要となり、結局、限定された主問題は Table 1 のようになる。

一方、部分問題はつぎのように考えた。琵琶湖に関しては、その有効貯水容量が極めて大きく、他のダムと同一レベルでの操作が困難であるとみなし、瀬田川洗堰のゲートは制御対象よりはずした。したがって、天ヶ瀬ダムは、その流入量を自然流量にもち、宇治を評価地点とする単ダム 1 評価地点系になる。計算時には DDDP を採用し、計算時間の短縮と計算時貯水容量の拡大をはかった。

青蓮寺ダム、室生ダムは名張地点を共通の評価地点としており、並列 2 ダム・1 評価地点系の部分問題と

Table 1. Restricted master problem of water control system in Yodo River.

$\{S_T(t)\}, \{0_T(t)\}, \{Q_K(t)\}$	$\{Q_H(t)\}$	$\{\mu_N\}^j$	$\{Z_N\}^j$	$\{Z_U\}^j$	$Z \rightarrow \min.$
$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots -C_K^{-1}(1)C_K^2(1)\dots C_K^2(T)C_K^3(T) C_H^{-1}(1)C_H^2(1)\dots C_H^2(T)C_H^3(T)$	$\dots\dots\dots 11\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 11\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 11\dots\dots 0$	$= 1$
$-A$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 11\dots\dots 11$	$\dots\dots\dots 11\dots\dots 11$	$\dots\dots\dots 11\dots\dots 11$	$= 1$
$0$	$\dots\dots\dots \epsilon(T)$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots -[Q_N(t)]^j\dots 0$	$\dots\dots\dots -[Q_N(t)]^j\dots 0$	$= [q_T(t)] - B_T(t)$
$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 111$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$= [q_K(t)]$
$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots -\epsilon(T)$	$\dots\dots\dots 111$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$= 0$
$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 111$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 111$	$\dots\dots\dots 111$	$= [q_H(t)]$
$\epsilon(T-1)$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 111$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots -[Q_U(t)]^j$	$= [q_H(t)]$
$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots \epsilon(3T)$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$= V_T$
$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots \epsilon(3T)$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$= Q_{Kd^1}(1)$
$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots \epsilon(3T)$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$= Q_{Kd^2}(1)$
$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots \epsilon(3T)$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$= \vdots$
$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots \epsilon(3T)$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$= Q_{Kd^2}(T)$
$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots \epsilon(3T)$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$= Q_{Hd^1}(1)$
$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots \epsilon(3T)$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$= Q_{Hd^2}(1)$
$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots \epsilon(3T)$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$= \vdots$
$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots \epsilon(3T)$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots 0$	$= Q_{Hd}(T)$

$\{\mu_m\}^j = \begin{bmatrix} \mu_m^1 & \mu_m^2 & \dots & \mu_m^{i_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_m^1 & \mu_m^2 & \dots & \mu_m^{i_n} \end{bmatrix}$	$\{Z_m\}^j = \{Z_m^1, Z_m^2, \dots, Z_m^{i_n}\}$	$[Q_m(t)]^j = \begin{bmatrix} Q_m^1(1) & Q_m^2(1) & \dots & Q_m^{i_n}(1) \\ Q_m^1(2) & Q_m^2(2) & \dots & Q_m^{i_n}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_m^1(T) & Q_m^2(T) & \dots & Q_m^{i_n}(T) \end{bmatrix}$
$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & -1 \end{bmatrix} (T \times T-1)$	$\epsilon(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (T \times T)$	$B_N(t) = \begin{bmatrix} I_n(2) \\ I_n(T-1) \\ -S_n(T) + I_n(T) \end{bmatrix}$
$r_w = \begin{bmatrix} r_w^1 & \dots & 0 \\ r_w^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_w^T & \dots & r_w^1 \end{bmatrix}$	$[q_w(t)] = r_w \times \begin{bmatrix} q_w(1) \\ q_w(2) \\ \vdots \\ q_w(T) \end{bmatrix}$	

なる。両ダムをそれぞれ単独の部分問題とし、名張地点を限定された主問題とすることも可能であるが、逐次近似法<sup>3)</sup>と DDDP の併用によって非線形関数による操作が可能になるので、ここでは同一の制御系とした。

#### 4.2 計算例とその考察

Fig. 7, 8 の実線は、それぞれ1953年の13号台風 (T. 5313), 1956年の15号台風 (T. 5615) の各出水に適用した制御結果である。ただし、制御期間は  $T=15$ , 限定された主問題における部分線形化の分割数は  $Y=3$  で、分割点は  $Q_{md}^1=1/2 \cdot Q_{md}$ ,  $Q_{md}^2=5/6 \cdot Q_{md}$ ,  $Q_{md}^3=Q_{md}$  である。また、用いた許容流量および評価関数は Table 2 に、河道定数は Table 3 に示す通りである。ただし、河道 I, II では時間遅れだけを考慮している。ダムの貯水状態は、初期条件を有効治水容量 (青蓮寺ダム; 8.4, 室生ダム; 7.75, 天ヶ瀬ダム; 20.0, 高山ダム; 35.4, 単位は  $10^6 \text{ m}^3$ ) の10%, 最終条件を同じく80%として、かなり余裕を残した。

図より明らかなように、各評価地点流量は許容流量を大巾に下回っており、制御目的は満たされている。さらに、対象とした出水では瀬田川洗堰の影響が大きく、天ヶ瀬ダムの操作に余裕が生じ、宇治地点の流況はほぼ完全に平滑化されている。同様に、名張地点でも流況の平滑化が進んでいるが、制御終了時近くに流量の増加がみられる。これは、高山ダムより下流の河道貯留が大きく、その影響が制御期間内に出ていないことが考えられる。したがって、制御期間を長く設定したり、放流量の時間的変化に制約を加えたりすれば、より平滑化した流況となろう。

一方、加茂、枚方地点では加茂のピーク値の方が高くなっているが、これは河道貯留が原因であろう。すなわち、線形応答関数が単一型であり、十分な精度で河道を表現できていないと思われる。他の流下機構の導入とも合わせて、今後、改良を加えなければならない。また、両地点の最適化をはかった LP では、たとえ部分線形化を用いたとしても、同一分割区間内では単位流量当りの危険率が同じになり、流況を完全に平滑化できないという特性がある。そこで、次の2種の方法によって、一層の平滑化を試みた。

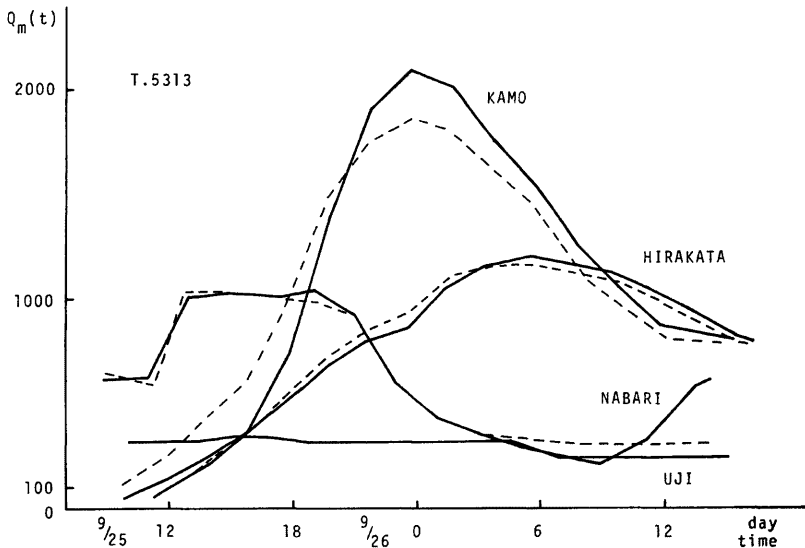


Fig. 7. Controlled flow passing through the defence point (T.5313).

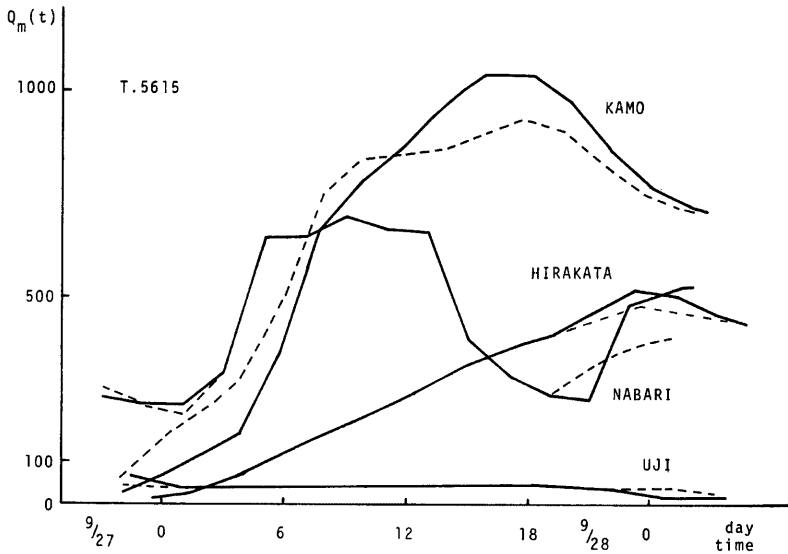


Fig. 8. Controlled flow passing through the defence point (T.5615).

Table 2. Allowable flow and criterion function on each defence point.

Defence Point	Allowable Flow	Criterion Function
Nabari	3300 t/sec	$1 - \ln (3301 - Q_N(t))/8.10$
Uji	900	$1 - \ln (901 - Q_U(t))/6.80$
Kamo	4650	$1 - \ln (4651 - Q_K(t))/8.44$
Hirakata	12000	$1 - \ln (12001 - Q_H(t))/9.39$

- (i) 分割区間数の増加 分割区間数を増加して、もとの非線形関数との近似誤差をできる限り減少しようとする方法である。確かに、平滑化という点では、非線形関数と同じ制御効果を期待できる。しかし、変数の増加とともに記憶容量、計算時間が増し、あまり現実的とはいえない。
- (ii) 分割区間巾の変化 分割区間数はそのままて1回目の操作を行い、その結果を参考にピーク流量付近で新たな分割を施して、再び操作を行う方法である。ピーク流量のてい減が進まなくなれば、制御終了となる。

Table 3. Information data on channels in Yodo River.

Channel	$\tau^*$	$K^*$
I	0.5	—
II	0.5	—
III	0.05	3.27
IV	0.30	3.20
V	0.40	2.85
VI	0.16	2.23
VII	0.26	2.85

Fig. 7, 8 の点線は (ii) の方針に基づく計算結果である。具体的には、最初の操作で得られた加茂、枚方のピーク流量  $Q_{mp}$  をもとに、部分線形化の分割点を  $Q_{md}^1 = 4/5 \cdot Q_{mp}$ ,  $Q_{md}^2 = 9/10 \cdot Q_{mp}$ ,  $Q_{md}^3 = Q_{mp}$  とおきかえて操作を続けたものである。図より明らかなように、宇治地点の流況はほとんど変化していない。これは、前述のように天ヶ瀬ダムの流入量が少ないため、同ダムでの操作が枚方地点の流況にあまり影響しないの

であろう。名張地点でも変動は少ないが、制御終了時近くの流況に平滑化がみられ、かえて良好な結果が得られている。さらに、加茂や枚方地点のピーク流量の減少に加え、繰り返し回数が比較的少し (3~5回) で収束していることを考えると (ii) の方法の有効性は明らかであろう。

## 5. 結 語

本研究は、ダム群統合管理方式の確立をめざすべく、任意の流況、任意の貯水状態における水系全体としての最適放流量系列の決定方法を提案したものである。ここで、得られた成果を要約すると以下になる。

- (1) ダム操作に有効とされている DP と、大規模システムの最適化手法として開発された分解原理を統合することにより、より効果的な水量制御システムの確立をはかった。
- (2) 現実に即したダム操作の重要性を考へて、DP では貯留関数法、LP では線形応答関数法と、河道の流下機構を導入した定式化を行った。
- (3) 限定された主問題を LP で解くことに起因する問題の解決策を考案した。すなわち、線形評価関数のままでは目的関数の最小化に合わせて、流況の平滑化がはかれないのに対し、非線形評価関数の部分線形化やその部分線形化における分割区間修正法の適用によって、非線形関数と同程度の制御効果を得ることができた。
- (4) 評価関数としては、出水による破堤の危険率あるいは渇水の危険率を提案し、計算機内でのオーバーフローなどの問題を解消した。

本研究では主に治水操作を対象に考察を進めたが、制約条件の不等号や評価関数を変えることによって、利水操作への適用も可能である。なお、制御期間があまり長くなると、LP や DP の最適化に必要な記憶容量や計算時間の点で問題となる。これは制御システムの時間的分割問題として、今後の課題としたい。また、制御目的に関しては、従来の量的目的だけでなく、濁度、水温あるいは有機物質などを対象とする質的目的を含む統合的評価が必要とならう。

最後に、本研究を進めるにあたって、方法論の展開や図表の作成で協力していただいた神戸製鋼所の藤井修氏に謝意を表したい。

## 参 考 文 献

- 1) Takasao, T., Ikebuchi, S., and Kojiri, T.: An Approach to the Adaptive Flood Control by Multi-Reservoir Systems, the Memoirs of the Faculty of Eng., Kyoto Univ., Vol. XXXVIII, Part 3, 1976, pp. 103-116.
- 2) Hall W. A.: Optimal Design of a Multiple-Purpose Reservoir, Jour. of Hydraulic Division, HY4, Vol. 90, 1964, pp. 141-150.
- 3) 高棹琢馬・池淵周一・小尻利治: 水量制御からみたダム群のシステム設計に関する DP 論的研究, 土木学会論文報告集, 第241号, 1975, pp. 39-50.
- 4) 竹内邦良: 貯水量の累加損失係数を用いた貯水池群の最適手法, 土木学会論文報告集, 第222号, 1974, pp. 93-104.
- 5) Buras, N.: Scientific Allocation of Water Resources, American Elsevier Publishing Company, inc., pp. 171-178.
- 6) 高棹琢馬・池淵周一・小尻利治: ダム群制御システムにおける分割基準と河道流下の非線形性, 京都大学防災研究所年報, 第20号 B-2, 1977, pp. 169-183.
- 7) Maddas, W. O., Eagleson, P. S.: A Distributed Linear Representation of Surface Runoff, Report No. 115, MIT 1969.
- 8) Lasdon, L. S.: Optimization Theory for Large Systems, The Macmillan Company.
- 9) 望月邦夫: 淀川の治水計画とそのシステム工学的研究, 京都大学学位論文, 1970, pp. 57-62.