

# 多自由度表示による地盤—構造物基礎系の振動解析について

後藤尚男・土岐憲三・吉原 進

## ON THE VIBRATIONAL ANALYSIS OF FOUNDATION- STRUCTURE SYSTEM BY MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM MODEL REPRESENTATION

BY Hisao GOTO, Kenzo TOKI and Susumu YOSHIHARA

### Synopsis

To analyze the vibrational characteristics of the structure surrounded by surface layer, the authors have proposed a new model with multi-degree-of-freedom. The proposed model is based on the assumption that the surface layer be represented by lumped-masses system connected with each other by springs and dashpots horizontally and vertically. Appropriateness of this model has been confirmed by comparison with the solution for a continuous system, and has been applied to the analysis of the foundation-structure system, in which discussions were made on the basis of some numerical results.

### 1. 緒 言

地震動に対する構造物やその基礎の動的応答を解明することは、構造物の耐震性の究明においてもっとも重要な問題の一つである。しかるに地盤中にある構造物基礎は複雑な振動系を構成し、この系の動的挙動は地盤の震動特性、構造物の振動特性に関係することはもとより、地盤と構造物の相互作用にも影響を受けることから、これらの要素をすべて考慮して解析を行なうことはきわめて困難である。このような振動系の多様性のほかに、地盤と構造物基礎とではその力学特性がまったく異なるにもかかわらず、その両者の運動慣性をも考慮した解析を行なわねばならない。しかもその結果が解析の対象としている振動系の動的挙動および力学特性に合致したものであると同時に一般性、普遍性をも備えていなければならないところにこの種の解析上の重大な難点があるといえよう。以下にこのような問題点を挙げ検討を行なう。

(1) 構造物やその基礎を支持する地盤はきわめて多種多様であり、したがって地盤の力学特性も多岐にわたる。まして地震力のような振動外力に対する応答は非常に複雑なものとなり、その動的な外力に対する応答に深い関係を持つ地盤の復元力特性、減衰特性等も不明な点が多く、これが定性的、定量的に十分把握されているとはいいいにくい。

(2) 地盤の動的挙動が明瞭でない上に、さらにこの中に構造物基礎が根入れされた場合には、構造物基礎の動的挙動は地盤の震動以上に複雑なものとなる。たとえば松代群発地震の観測結果<sup>1)</sup>でも報告されたとおり、構造物基礎周辺の地盤の挙動は構造物基礎の挙動にも大きく影響される。換言すると地盤と構造物基礎とは連成的に振動する。すなわち地盤と構造物基礎の運動慣性の違いによる両者の相対運動に、さらに地盤の質的作用、地盤内部の減衰作用、あるいは構造物基礎と地盤との接触面における接触抵抗による減衰作用等が複合されて、構造物基礎の振動現象が生ずる。しかるにこれらの各種の作用が構造物基礎の振動にどのように影響するのかが十分に解明されていない。

このように解析上には多くの問題点があるが、これらに関してはいろいろな抽象化、単純化の手法を用い

て、地中に根入された構造物基礎の動的挙動を解析するための多くの研究が行なわれている。これらを大別すると、地盤を一樣な連続弾性体と考え、これを弾性理論により解き、その結果を構造物基礎に適用して厳密解を求める方法と<sup>2),3)</sup>、地盤を地盤係数なる概念等を用いて、線形あるいは非線形のばねで置換する方法<sup>4),5),6)</sup>となる。このうち前者は、構造物基礎をウエル・ケーソンのような剛体とした場合、この剛体底面に回転中心を有する動揺振動の解析は行なわれているが<sup>2)</sup>、この剛体が並進運動を伴うときは、剛体底面と基盤層との接触境界面における剛体の運動を記述することが困難であるため、これを満足する解は得られていない。さらに地盤の構成が複雑で、剛度等の特性が任意の分布をして、簡単な数式で表わせないものに対しては容易に適用できない。また後者は地盤の剛度が任意に変化するときも、基礎が並進を伴うときも取り扱うことができる。とくに、振動系を非線形な系として取り扱う際にはこのような手法はきわめて有力であり、Penzien<sup>5)</sup>、Idriss ら<sup>6)</sup>は地盤を bi-linear な復元力特性を持つばねで表示し、上部構造をも含めた多自由度振動系としての取扱いをしている。このような多自由度系による地盤-構造物基礎系の表示においては、有限な領域に分布する地盤の質量やその剛性を一点に集約するのであるから、その領域の区分の方法、集約の方法がもっとも重要な問題となるが、地盤と構造物基礎を同時に考える場合は、その両者の接触する境界面での相互作用の評価および一般には地盤係数として表示される量の評価などが非常に重要な影響を有するにもかかわらず、この点がまだ明確にされていない。

一方、地盤と構造物基礎が相対運動をしている状態では、構造物基礎は地盤に対しては一種の振動源であり、地盤の質量効果が発生する。したがってこのような地盤の質量効果をも解析に取り入れるためには地盤の広がりやを考慮しなければならないが、過去の多自由度系による表示ではこの問題についてはほとんど触れられていない。

そこで本研究においては、こうした地盤の広がりやの効果をも取り入れることができ、かつ地表層と構造物基礎との境界面における各種の条件、地盤の異方性の影響なども容易に考慮しうるような多自由度系による地盤-構造物基礎系の抽象化の手法について述べるものである。すなわち、2. では多自由度表示による新しいモデル化の手法を示した後、地盤の振動性状、振動特性をこの多自由度モデルより求め、これと従来からの解法により得られる解との比較により、この多自由度モデルの妥当性を検討し、かつ振動特性を求めると同時に、地盤の分割数とこれらの関係をも求めた。しかしこの場合は地盤の広がりには関係しないので、3. において、この広がりをも考慮に入れた多自由度モデルの妥当性、振動特性の検討を行ないかつ地盤の広がりやを表わす質点列数との関係を吟味した。かくしてこのモデル化の手法の構造物基礎への適用を試み、若干の数値計算を行なった。

## 2. 基礎地盤のモデル化と解析

この項では、モデル化の手法を述べると同時に、得られたモデルの妥当性を検討するために、地盤のみを取り上げ、モデルから得られる解と連続弾性体としての解を求め、この両者の比較検討を行なったものである。

### 2.1 モデル化の手法

基盤層上にある地表層をモデル化するに当って用いた仮定を列挙すれば次のとおりである。

(1) 水平な外力を受けたときの地表層の鉛直方向の振動は、水平方向の振動に比較して無視しうる程度に小さいものとし、水平方向の運動のみを解析の対象とする。

(2) 地表層においては、その奥行方向の動的特性は一樣なものと考え、2次元解析を行なう。さらに振動方向においても一樣なものとするが、鉛直方向には任意の特性をもつものとする。

(3) 基盤層と地表層との接触面において、相対変位は生じないものとする。

(4) 地盤中の減衰については、その機構が現在のところ明確でないが、本研究においては、一応地盤のひずみ速度に比例する粘性減衰のみを考える。

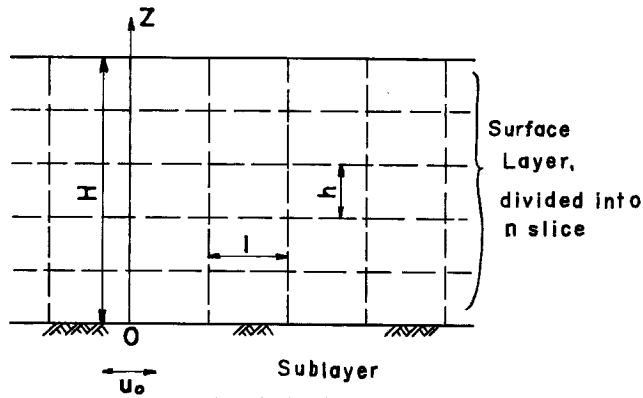


Fig. 1 Idealized Surface Layer

以上の仮定のもとに地表層地盤をモデル化する手法を示せば次のとおりである。Fig. 1 に示すように、地盤を仮想的な縦横の線で分割してできるブロックの集合体であるとみなし、このおのおののブロックを一つの質点に置換する。この各質点に、地盤の水平方向の剛度を表わす（ブロックの水平方向の剛度に対応する）水平ばね  $k_i$  と、せん断剛度を表わす（ブロックのせん断剛度に対応する）せん断ばね  $f_i$  とを取り付ける。ただし、本研究においてはこれらのばね定数は線形特性を有するものとする。さらに減衰については、前述の仮定に従って、せん断運動による減衰を表わすダッシュポット  $s_i c_i$  と、水平運動による減衰を表わすダッシュポット  $l c_i$  とを取り付ける。これらのばね定数および減衰係数は明確に定めることはできないが、Fig. 1 に示す諸元を用いて、便宜上次式で表わされるものとする。

$$\left. \begin{aligned} k_i &= E_i h / l, & f_i &= G_i l / h \\ l c_i &= 2 \zeta_i \sqrt{m_i k_i}, & s_i c_i &= 2 \zeta_i \sqrt{m_i f_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

ここに、 $E_i, G_i, \zeta_i$  は地表面より第  $i$  層目のブロックのヤング率，せん断弾性係数，減衰定数であり， $m_i$  は第  $i$  層目の1ブロックの質量である。なお地盤の分割数を  $n$  とすると， $i=1, 2, \dots, n$ ，である。

以上のような手法により得られた振動モデルを Fig. 2 に示す。この図は地表層を横切る壁体がある場合を示すもので、地盤のみを考えるとこの壁体を除いたものとなる。図中の○印の中の符号  $i, j$  は質点の位置を表わすもので、 $i$  は地表面より第  $i$  層目を、 $j$  は地盤内におけるある基準位置より第  $j$  列目を意味するものである。（地盤中に壁体がある場合はこの壁体を基準位置にとる）。このようにして得られた振動モデルは、連続な半無限の弾性地盤を、有限個の集中質量よりなる不連続な多自由度線形振動系に置換したものととなる。

2.2 基礎地盤の振動解析

前項において得られた振動モデルに、基盤層より  $u_0$  なる強制水平変位が与えられたとき、前項で用いた仮定により、地盤は水平方向には一様であるので、同一層内にある質点間には相対変位が生じないと考えられるから、第  $i$  層目の絶対変位を  $u_i$  とすると、モデルの運動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} m_i \ddot{u}_i - s_i c_{i-1} \dot{u}_{i-1} + (s_i c_{i-1} + s_i c_i) \dot{u}_i - s_i c_i \dot{u}_{i+1} \\ - f_{i-1} u_{i-1} + (f_{i-1} + f_i) u_i - f_i u_{i+1} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(2)$$

ただし、 $i=1, 2, \dots, n, f_0 = s_0 c_0 = 0, u_{n+1} = u_0$  である。

これは地盤のせん断振動を表わす運動方程式であり、これより明らかのように、水平方向に一様な地盤の変位は  $j$ ，すなわち地盤の横方向の広がりには無関係となる。式(2)は  $n$  元の連立2階線形微分方程式であるが、これを次式のように行列表示を行なって、数値計算を行なった。

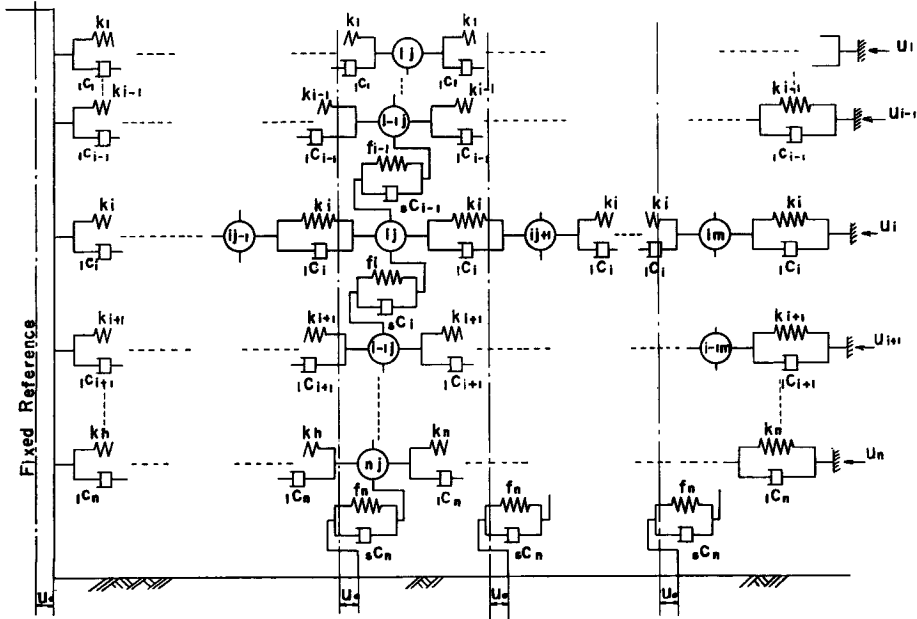


Fig. 2 Multi-Degree-of-Freedom Model of Surface Layer

$$M_s \ddot{u} + sC_s \dot{u} + f_s u = F_s \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 $M_s$ ,  $sC_s$ ,  $f_s$  および  $u$ ,  $F_s$  は以下に示す行列および列ベクトルである。これらの行および列の数は地盤の分割数  $n$  に等しくなる。

$$M_s = \begin{pmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & m_n \end{pmatrix} \quad sC_s = \begin{pmatrix} s c_1 & -s c_1 & & & \\ -s c_1 & s c_1 + s c_2 & -s c_2 & & \\ & -s c_2 & s c_2 + s c_3 & -s c_3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -s c_{n-2} & s c_{n-2} + s c_{n-1} & -s c_{n-1} \\ & & & & & -s c_{n-1} & s c_{n-1} + s c_n \end{pmatrix}$$

$$f_s = \begin{pmatrix} f_1 & -f_1 & & & \\ f_1 & f_1 + f_2 & -f_2 & & \\ & -f_2 & f_2 + f_3 & -f_3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -f_{n-2} & f_{n-2} + f_{n-1} & -f_{n-1} \\ & & & & & -f_{n-1} & f_{n-1} + f_n \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad F_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ s c_n \dot{u}_0 + f_n u_0 \end{pmatrix}$$

式(3)において、減衰項と外力項が  $O$  のとき非減衰自由振動の解が存在するための条件より振動系の固有振動数、振動モードが得られることはいうまでもない。一方同式において、 $u_0 = u_0' e^{i \omega t}$  なる調和変位外力が与えられた場合を考えれば、振動系の周波数応答曲線が得られる。このとき複素行列を求める必要が生ずるが、これは次の関係式を用いる。すなわち

$$[\mathbf{A} - i\mathbf{B}]^{-1} = [\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{B}]^{-1}[\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} + i\mathbf{I}] \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここに、 $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  は正方実対称行列、 $\mathbf{I}$  は単位行列で、 $i$  は虚数単位である。

一方、Fig. 1 に示す一様な地盤がせん断振動を行なうときの地盤内の任意点の絶対変位  $\bar{u}(z, t)$  は、地盤内の減衰を無視すれば次式の運動方程式の解で与えられることは周知のとおりである。

$$G_m \frac{\partial^2 \bar{u}(z, t)}{\partial z^2} = \frac{W_m}{g} \frac{\partial^2 \bar{u}(z, t)}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここに、 $G_m$ ；地盤のせん断弾性係数、 $W_m$ ；地盤の単位体積重量、 $g$ ；重力加速度である。したがって、地盤がせん断自由振動をなすときには、 $\bar{u}(z, t)$  は次式で与えられる。

$$\bar{u}(z, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \sin \frac{n\pi z}{2H} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここに、
$$\omega_n = \frac{n\pi}{2H} \sqrt{\frac{gG_m}{W_m}} \quad n=1, 3, 5, \dots, \quad \dots\dots\dots(6')$$

$A_n, B_n$  は初期条件により定まる係数である。また  $z=0$  において、 $u_0 = kg/\omega^2 \times \sin \omega t$  なる強制変位が与えられたときには、 $\bar{u}(z, t)$  は

$$\bar{u}(z, t) = \frac{kg}{\omega^2} (\cos \gamma z + \tan \gamma H \sin \gamma z) \sin \omega t \quad \dots\dots\dots(7)$$

となる。ここに、 $\gamma^2 = \omega^2 W_m / Gm$ ,  $k$ ：震度である。

### 2.3 数値計算例

数値計算を行なうに当たって用いたデータについて概述すると次のとおりである。(1) 弾性係数の鉛直方向の分布は、矩形分布、台形分布、三角形分布の3種を選んだ。これらは地表層底面で最大値をとり、この最大値はいずれも一定値としている。(2) 地表層の分割数  $n$  については、3等分から30等分まで4種選んだ。(3) 減衰については、前述のようにその機構も明らかでなく、実地盤についての調査資料も少ないので、一応地盤として考えられる範囲の値を選んだ。

Fig. 3 はモデルにおける地盤の分割数  $n$  と基準振動時の固有円振動数  $\omega_n$  の関係を示したもので、図中の一点鎖線の直線は式(6')より求めた連続解である。これによると分割数  $n$  を大きくするにつれて、各次の固有円振動数とも順次大きくなり、連続解に漸近することがわかる。すなわち分割数  $n$  を大きくすれば、ここで考えているモデルは連続弾性体としての特性を持つようになるのであろう。さらにこの図を詳細に検討すれば、低次の基準振動においては、高次の基準振動におけるよりも小さな分割数で一定値に近づくことがわかる。たとえば第1次の基準振動では、分割数  $n$  を5としたとき、モデルより求めた結果と連続解より求めた結果との比率は約90%であるのに対し、第5次の基準振動ではこれが約70%にしかない。これは高次の基準振動においては、低次の基準振動におけるよりも複雑な振動モードとなるため、分割された層間の相対変位が大きくなり、そのためにモデルの不連続性が大きく現われるためであろうと考えられる。一方実地盤における地震時の卓越周期は数分の1秒程度のことが多かろうことを考えると、高次の振動よりも低次の振動が問題となることが多いので、地盤の固有振動数を問題とする限り、一般にはそれほど大きな分割数  $n$  を選ぶ必要がないようである。

Fig. 4 は地盤内の一点における変位の周波数応答曲線であって、式(7)より求めた連続解と分割数  $n=5$  のモデルより求めた解を示している。これら両曲線は減衰を無視した場合であるが、減衰を考慮した場合の例をも記しておいた。これらによると、第1次の共振点では大きな違いはないとしても、2次共振点ではかなりの違いを生じている。これは先に議論したように、地盤の分割数  $n$  が3ないし5という小さい数のためであって、これを大きくすれば高次の共振点においても解析法の違いによる差はそれほど大きくはならないものと思われる。

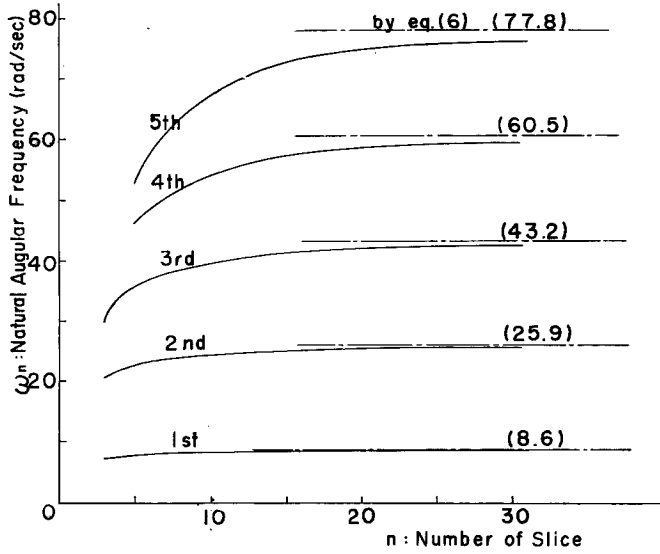


Fig. 3 Relation between Natural Angular Frequency and Number of Slice  $G=500 \text{ kg/cm}^2$ , uniform

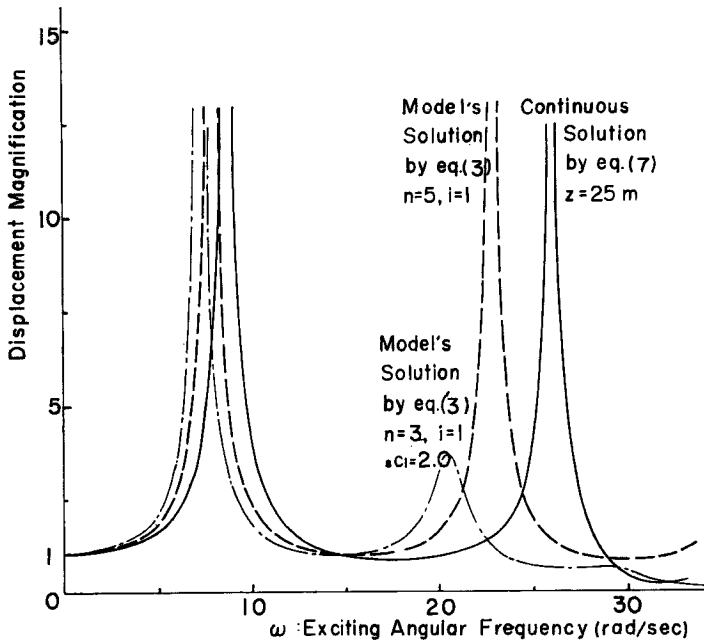


Fig. 4 Frequency Response of Surface Layer  $G=500 \text{ kg/cm}^2$ ,  $H=30 \text{ m}$

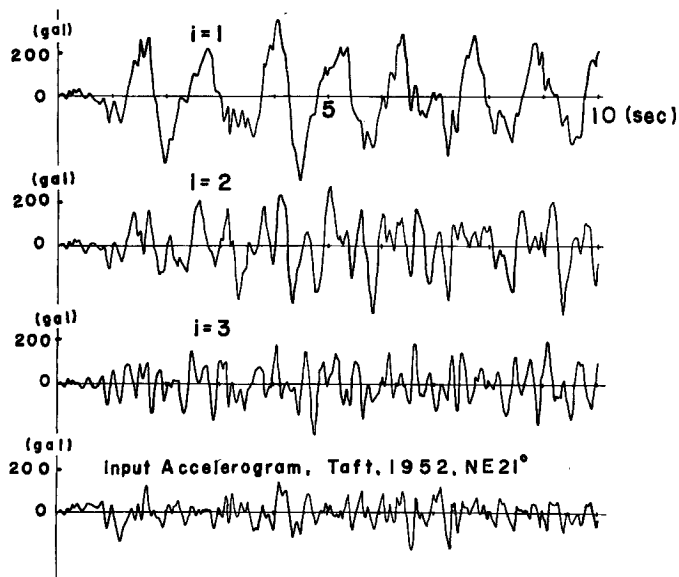


Fig. 5 Earthquake Response of Surface Layer with Triangular Elastic Property  
 $G=500 \text{ kg/cm}^2, H=30 \text{ m}, n=3$

Fig. 5 は多自由度モデルを用いて、地盤の地震応答を *Newmark* の  $\beta$  法より求めた一例である。これによると地表面近くになるにつれて、入力記録より長周期の周期成分が卓越することおよび加速度の応答量が大きくなるのがわかる。これは地盤の弾性係数の分布が、地表面で 0 となる三角分布をなすものとしていたためであろう。

### 3. 固定壁体に働く振動圧の解析

前項において、地盤のみを対象としてモデルを用いた場合の結果と連続解の結果との比較によって、モデルの妥当性ある程度確認することができた。ここでは同様なモデル化の手法を用いて、地盤中にある壁体に働く振動圧を求めると同時に、地盤を半無限弾性体として得られる波動方程式の解を求め、この両者の比較により地盤の広がりをも考慮に入れたときのモデルの妥当性を検討しようとしたものである。

#### 3.1 多自由度モデルによる振動圧の解析

地表層を鉛直に横切って壁体が設けられる場合に前項と同様な手法により、多自由度振動モデルを作れば Fig. 1 のとおりであった。この図で明らかなように、壁体に接触する質点列 ( $j=1$ ) 以外の質点に関する運動の状況は地盤のみの場合と全く同一であり、一方壁体に接する質点列に関しては、壁体に変形することなく基盤層と同一の運動をするものと考えれば、 $j \neq 1$  のものとはほぼ同様である。また横方向の広がりを表わす質点列の数を  $m$  とすれば、 $m$  番目の質点列にはそれぞれの質点の位置に対応する各層のばね、ダッシュポットを介して、式 (3) より求まる地盤のみの応答変位  $u_i$  が加わるものとする。すなわち、 $j=m$  の各質点の運動には壁体からの影響がなく、地盤のみが運動している場合と同様な状況にあるものとする。かくすれば運動方程式が得られ、これを行列表すれば次のとおりとなる。

$$M_f \ddot{x}_f + [C_f + C_f] \dot{x}_f + [f_f + K_f] x_f = F_f \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、各係数行列は式 (3) の係数行列を小行列とする次のような正方対称行列で、これらの行あるいは列の数は、地表層の分割数を  $n$ 、質点列の数を  $m$  とすれば、 $m \cdot n$  となる。

$$\begin{aligned}
 M_f &= \begin{pmatrix} M_s & & & \\ & M_s & & \\ & & \ddots & \\ O & & & M_s \end{pmatrix} & {}_s C_f &= \begin{pmatrix} {}_s C_s & & & \\ & {}_s C_s & & \\ & & \ddots & \\ O & & & {}_s C_s \end{pmatrix} & {}_i C_f &= \begin{pmatrix} 2{}_i c & -{}_i c & & \\ -{}_i c & 2{}_i c & -{}_i c & O \\ & & \ddots & \\ O & -{}_i c & 2{}_i c & -{}_i c \\ & & & -{}_i c & 2{}_i c \end{pmatrix} \\
 f_f &= \begin{pmatrix} f_s & & & \\ & f_s & & \\ & & \ddots & \\ O & & & f_s \end{pmatrix} & K_f &= \begin{pmatrix} 2k & -k & & \\ -k & 2k & -k & O \\ & & \ddots & \\ O & -k & 2k & -k \\ & & & -k & 2k \end{pmatrix} & F_f &= \begin{pmatrix} {}_i c_1 \dot{u}_0 + k_1 u_0 \\ {}_i c_2 \dot{u}_0 + k_2 u_0 \\ \vdots \\ ({}_i c_n + {}_s c_n) \dot{u}_0 + (k_n + f_n) u_0 \\ 0 \\ 0 \\ {}_s c_n \dot{u}_0 + f_n u_0 \\ {}_i c_1 \dot{u}_1 + k_1 u_1 \\ {}_i c_2 \dot{u}_2 + k_2 u_2 \\ \vdots \\ {}_i c_n \dot{u}_n + {}_s c_n \dot{u}_0 + k_n u_n + f_n u_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$x_f = [x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}, x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}, \dots, x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm}]^T$$

ただし、 $x_{ij}$  ;  $ij$  質点の絶対変位、

$$\begin{aligned}
 k &= \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & k_n \end{pmatrix}, & {}_i c &= \begin{pmatrix} {}_i c_1 & & & \\ & {}_i c_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & {}_i c_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

である。

いま壁面に働く振動圧は、壁面に直接取り付けられているばねおよびダッシュポットによる圧力であるとすれば、式(8)の解より

$$\sum_{i=1}^n \{ {}_i c_i (\dot{x}_{i1} - \dot{u}_0) + k_i (x_{i1} - u_0) \} / \Delta A \tag{9}$$

で表わされる。ここに、 $\Delta A$  ; ブロックの断面積である。

### 3.2 連続弾性体による解

基盤層の上に一様連続な弾性層が横たわり、この弾性層を区切る壁体が基盤層とともに水平方向に  $u_0(t)$  なる運動を行なうときの、弾性層内の水平変位  $u(x, z; t)$  は、鉛直方向の変位および地盤の減衰効果を見れば、次式の解で与えられる。

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{10}$$

ここに、 $\rho$  ; 弾性層の密度、 $\lambda, \mu$  ; 弾性層のラーメの定数である。

式(10)において、入力加速度として  $\delta(t)$  なるデルタ関数を与え、 $t=0$  で変位および速度が0なる初期条件と、弾性層表面 ;  $z=H$  でせん断応力が0および壁面 ;  $x=0$  ならびに弾性層底面 ;  $z=0$  で変位が0なる境界条件とを用いて解を求めると、弾性層内における任意点の垂直応力は次式となる。

$$\tau_{xz}(x, z; t) = \begin{cases} -\frac{2\rho v_l}{H} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m} J_0 \left\{ \frac{v_l}{v_t} \alpha_m \sqrt{v_l^2 t^2 - x^2} \right\} \sin \alpha_m z & (t > x/v_l) \\ 0 & (0 \leq t \leq x/v_l) \end{cases} \tag{11}$$

ここに、 $v_l, v_t$  ; 弾性層内の縦波と横波の伝播速度、 $\alpha_m$  ; 振動モードを表わす係数である。したがって壁面



に働く振動圧をこれに接する地盤の垂直応力に等しいものとすれば振動圧は式 (11) において、 $x=0$  とすれば求めることができる。いま基盤層および壁体が、 $t=0$  より

$$u_0(t) = \frac{kg}{\omega^2} \cos \omega t \quad (\text{ここに } k; \text{水平震度})$$

で表わされる調和振動を始めるとき、*Duhamel* の積分を行なえば、弾性層内の垂直応力は次式で得られる。ただしここでは定常項のみを求めている。

$$\tau_{xz}(x, z; t) = \frac{2\rho v_i k g}{H} \left\{ \sum_{m=0}^s \frac{\sin \alpha_m z \sin(\omega t - x/v_i \sqrt{\omega^2 - \alpha_m^2 v_i^2})}{\alpha_m \sqrt{\omega^2 - \alpha_m^2 v_i^2}} + \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m z e^{-x/v_i \sqrt{\alpha_m^2 v_i^2 - \omega^2}}}{\alpha_m \sqrt{\alpha_m^2 v_i^2 - \omega^2}} \cos \omega t \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $s$  は  $\alpha_m < \omega/v_i$  を満足する  $m$  の最大値である。したがって壁体表面に働く振動圧は、式 (12) において  $x=0$  とすれば求めることができる。

### 3.3 数値計算例

**Fig. 6** は壁面に働く振動圧の分布を表わす図で、これには多自由度モデルより求めた振動圧を質点列数  $m$  をパラメータとして示すと同時に、式 (12) より求めた結果をも合わせて示してある。これによると質点列数  $m$  を大きくするにつれて、すなわち壁面より遠くの地盤を考慮するにつれて、振動圧は連続解に近づくばかりでなくその分布形も互によく似たものとなっている。この計算例では、 $m$  の最大値は7であり大きくはないが、両者の違いはそれほどないものといえよう。

次に **Fig. 7** は壁面に働く振動圧に及ぼす地盤の広がりやの影響を表わす図であって、 $i$  すなわち地表面からの深さをパラメータとしている。これによると解析の対象とする質点列数  $m$  が大きくなるにつれて、振動圧は徐々に減少していき、しかも一定の値に漸近する傾向にあることがわかる。すなわち壁面の振動圧に大きな影響を及ぼさないといえよう。しかもこの距離は、計算例の場合には数 10 m である。また以上の図より、質点列数  $m$  が小さい場合には、振動圧は安全側の結果を与えるということがわかる。

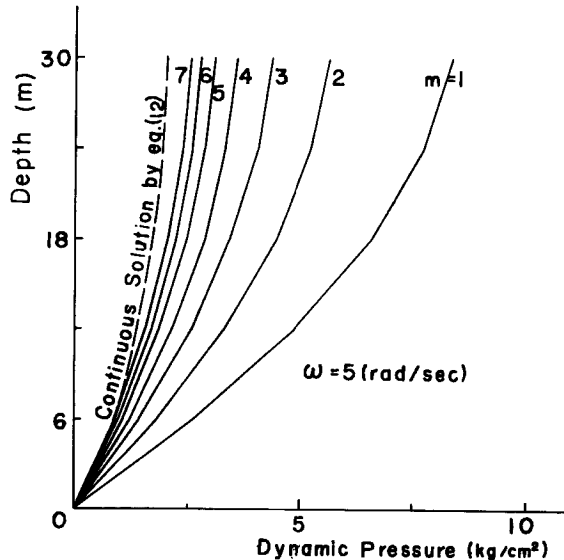


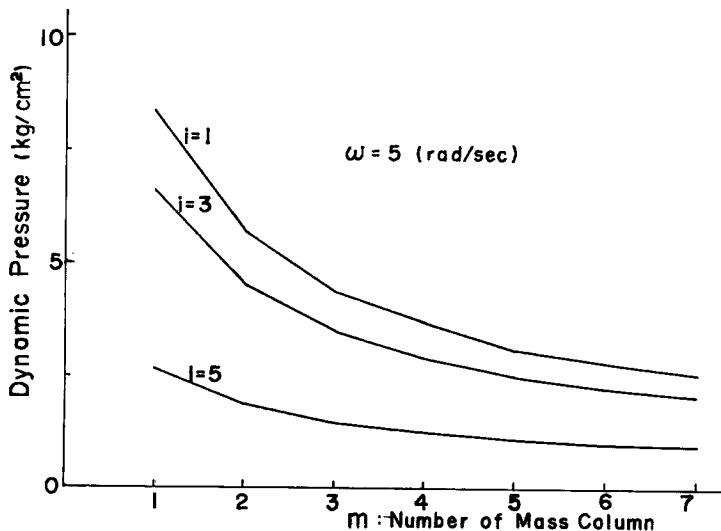
Fig. 6 Dynamic Pressure acting on Vertical Wall  $E=1500 \text{ kg/cm}^2$ ,  $G=500 \text{ kg/cm}^2$ ,  $n=5$ ,  $m=7$

以上の検討により、本研究で用いた多自由度モデルは、地盤の横方向の広がりをも含めて、かなり妥当なものであるといえよう。しかし外乱円振動数  $\omega$  が大きくなると、上の計算例のような  $m$  の範囲では、振動圧の分布形、大きさとも  $\omega$  に対して変動が大きくなり、一定の傾向が見い出せなかった。このことは壁体の振動圧に及ぼす地盤の影響が大きくなることを示しているものといえよう。ここで取り扱っているのは波動伝播の問題であり、連続弾性体では明らかに変位や応力が壁体から遠ざかる方向に伝播するに反し、このモデルで  $m$  が小さい場合にはこうした伝播現象が十分に行なわれ得ない。すなわちこのモデルでは第  $m$  列目の質点列の変位は地盤のみが振動したときの変位に等しいという境界条件により拘束されているとも考えられ、 $m$  が小さい時には壁体近傍の地盤の変形が規制されることになるのも一つの理由と考えられる。とくに外乱円振動数が大きくなると、伝播速度も大きくなるので上記の影響が大きく効いてくるのであろう。このことはここで扱っている多自由度モデルの問題点の一つであることを示唆すると同時に、一般に行なわれている地盤をばねで置換する方法において地盤の変形を解析に取り入れることもあるが、この場合上記のような観点から、地盤の広がりを考慮しないのであれば、ここで述べたような境界の拘束という問題が生ずることもあるので、十分な注意が必要となることをも示唆するものであろう。したがって外乱円振動数  $\omega$  が大きい場合には、 $\omega$  に応じて大きな  $m$  を採らねばならない。

**Fig. 8** は地盤の弾性係数の分布が変化するとき、壁面の振動圧分布がどのような影響を受けるかを示した図で、 $n=5, m=5$  の場合が示してある。これによると弾性係数分布が矩形・台形・三角形と変化すれば、振動圧の分布は地表面では等しく、中間部分がはらみ出すように変化する。一般に実験的に振動圧を求めると、同図の三角形分布の場合のようになることが多い。弾性係数の分布と振動圧分布との関係を調べたものがないから、今のところこれについて断定することはできないが、計算上このような分布が得られるということは興味深いことである。

**Fig. 9** は振動圧の周波数応答曲線であって、式 (12) より求めた連続解と式 (9) より求めた多自由度モデルで  $n=5, m=5$  のときの解とを同時に示してある。これによると1次、2次の共振点ともかなりよく両者が一致していることがわかる。

以上前項との結果とも合せて判断すれば、著者らの提案したモデル化の手法は一応妥当性を有するものと



**Fig. 7** Relation between Dynamic Pressure acting on Vertical Wall and Number of Mass Column

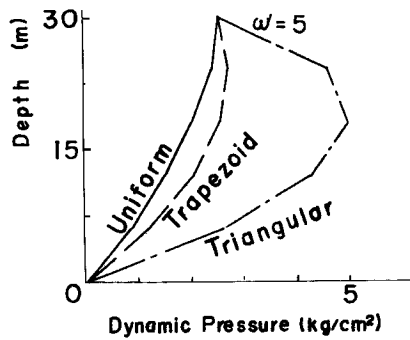


Fig. 8 Relation between Dynamic Pressure acting on Vertical Wall and Distribution of Elastic Property  $E=1500 \text{ kg/cm}^2$ ,  $G=500 \text{ kg/cm}^2$ ,  $n=5$ ,  $m=5$

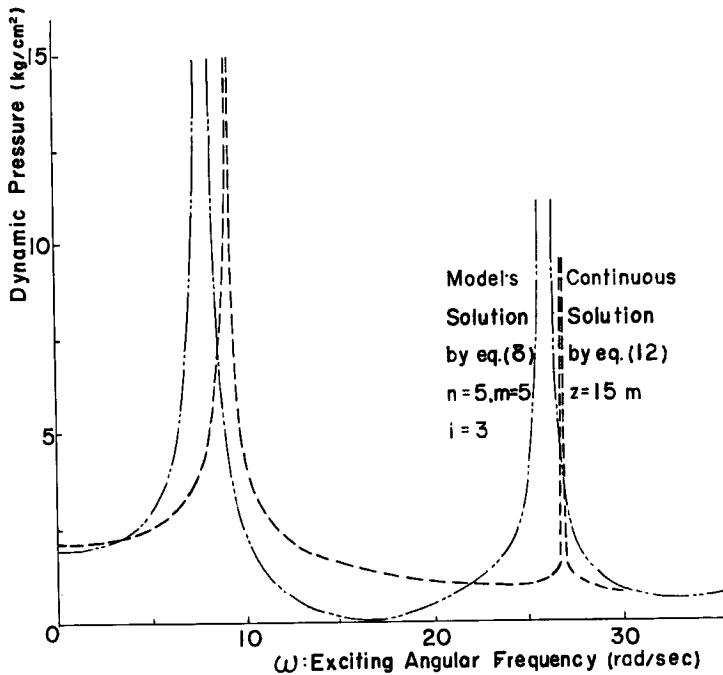


Fig. 9 Frequency Responce of the Dynamic Pressure acting on Vertical Wall

いえよう。ただ高振動時を解析の対象とするときには、分割数  $n$  および質点列数  $m$  の決定に対しては十分な注意が必要となる。

#### 4. 地盤中の構造物基礎の振動解析

前項までの解析・考察により、本研究で用いるモデル化の手法の妥当性がある程度確認されたので、この方法を地盤中に根入れされた構造物基礎の振動解析に適用する。ここではこの基礎が剛体の場合を取り扱い、剛体が並進を伴う動揺振動を行うときをも対象とする。

先のモデル化の手法を用いて、この場合の振動モデルを作れば、Fig. 1 における壁体を剛体に置換したものととなる。いまこの剛体が並進を伴って動揺振動を行なうときは、地表層の分割数を  $n$ 、質点列数を  $m$  とすれば、モデルの自由度は  $2+m \cdot n$  となる。この場合の運動方程式を求め、行列表示すれば次のようになる。

$$M_{II}\ddot{x}_{II}+[{}_sC_{II}+{}_iC_{II}]\dot{x}_{II}+[K_{II}+f_{II}]x_{II}=F_{II} \dots\dots\dots(13)$$

ここに、各係数行列および列ベクトルは次のような正方対称な  $2+m \cdot n$  次の行列となる。

$$\begin{matrix}
 M_{II} = \left( \begin{array}{c|c} M_R & O \\ \hline O & \begin{matrix} M_s & & & \\ & M_s & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_s \end{matrix} \end{array} \right), & {}_sC_{II} = \left( \begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & \begin{matrix} {}_sC_s & & & \\ & {}_sC_s & & \\ & & \ddots & \\ & & & {}_sC_s \end{matrix} \end{array} \right) \\
 \\
 {}_iC_{II} = \left( \begin{array}{c|c} {}_iC_R & {}_iC_{RM} & O \\ \hline {}_iC^T_{RM} & \begin{matrix} 2{}_iC & -{}_iC & & \\ -{}_iC & 2{}_iC & -{}_iC & O \\ & & \ddots & \\ & & & -{}_iC & 2{}_iC & -{}_iC \\ & & & -{}_iC & 2{}_iC \end{matrix} \end{array} \right) & K_{II} = \left( \begin{array}{c|c|c} k_R & k_{RM} & O \\ \hline k^T_{RM} & \begin{matrix} 2k & -k \\ -k & 2k & -k & O \\ & & \ddots & \\ & & & -k & 2k & -k \\ & & & & -k & 2k \end{matrix} & \end{array} \right) \\
 \\
 f_{II} = \left( \begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & \begin{matrix} f_s & & & \\ & f_s & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_s \end{matrix} \end{array} \right) & F_{II} = \left( \begin{array}{c} -M_r\ddot{u}_0 - \sum_{i=1}^n {}_iC_i\ddot{u}_0 - \sum_{i=1}^n k_i u_0 \\ -\sum_{i=1}^n {}_iC_i(h_i-d)\ddot{u}_0 - \sum_{i=1}^n k_i(h_i-d)u_0 \\ \dots\dots\dots \\ {}_iC_1\ddot{u}_0 + k_1u_0 \\ {}_iC_2\ddot{u}_0 + k_2u_0 \\ \vdots \\ {}_iC_n\ddot{u}_0 + k_nu_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ {}_sC_n\ddot{u}_0 + f_nu_0 \\ {}_iC_1\ddot{u}_1 + k_1u_1 \\ {}_iC_2\ddot{u}_2 + k_2u_2 \\ \vdots \\ {}_iC_n\ddot{u}_n + {}_sC_n\ddot{u}_0 + k_nu_n + f_nu_0 \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

$$x_{II} = [x, \varphi, x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}, x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}, \dots, x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm}]^T$$

ただし

$$\begin{matrix}
 M_R = \left( \begin{array}{c} M_r \\ \\ \\ I_G \end{array} \right), & {}_iC_R = \left( \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n {}_iC_i + c_b \\ \sum_{i=1}^n {}_iC_i(h_i-d) - dc_b \\ \sum_{i=1}^n {}_iC_i(h_i-d) - dc_b \\ \sum_{i=1}^n {}_iC_i(h_i-d)^2 + d^2c_b \end{array} \right), \\
 \\
 {}_iC_{RM} = \left( \begin{array}{c} -{}_iC_1, \quad -{}_iC_2, \quad \dots, \quad -{}_iC_n \\ -{}_iC_1(h_1-d), \quad \dots, \quad -{}_iC_n(h_n-d) \end{array} \right) & k_R = \left( \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n k_i + k_b \\ \sum_{i=1}^n k_i(h_i-d) - dk_b \\ \sum_{i=1}^n k_i(h_i-d) - dk_b \\ \sum_{i=1}^n k_i(h_i-d)^2 + d^2k_b \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

$$k_{RM} = \begin{pmatrix} -k_1, & -k_2, & \dots, & -k_n \\ -k_1(h_1-d), & -k_2(h_2-d), & \dots, & -k_n(h_n-d) \end{pmatrix},$$

$M_r$ ；基礎の全質量， $I_G$ ；基礎の重心まわりの慣性モーメント， $h_i$ ；第  $i$  層の質点の地表層底面よりの高さ， $x, \varphi$ ；剛体重心の絶対変位および剛体の回転角， $d$ ；構造物基礎の底面から重心までの距離

式 (13) を用いて行った若干の数値計算例を以下に示す。

Fig. 10 は構造物基礎と地盤よりなる振動系の固有円振動数と，地盤の横方向の広がりとの関係を表わす図で，縦軸に固有円振動数を横軸に質点列数，すなわち地盤の横方向の広がりを表わしている。これによると，地盤の広がりを大きくするにつれて，各次の固有円振動数とも一定の値に近づくことがわかる。特に低次の基準振動時にこの傾向が強いようである。これは構造物基礎から遠く離れた地盤は，基礎の振動には大きな影響を与えないこと，換言すれば基礎と連成的に振動する地盤は基礎周辺の地盤に限られるということを示すものであろう。Fig. 10 の計算例ではブロックの縦横比を 1 としているので，この値は数 10m 程度であろうといえそうである。もっともこの値は基礎の大きさや地盤の剛度などの特性にも強く影響されることが予想される。しかも実際の構造物基礎の耐震設計上，この値をどの程度にすればよいか大きな問題となってくるが，現在のところこれを定量的に議論できるまでに至っていない。

また先にも指摘したように，高い振動数を問題とするときには，考慮に入れる地盤の広がり，すなわち質点列数  $m$  を大きくせねばならないが，計算上  $m$  を任意に大きくすることはできない。そこで  $m$  の大きさは変えないで地盤のブロックの縦横  $h/l$  の比を変えることにより，地盤の広がりを大きくすると固有円振動数がどのように変化するかを，構造物基礎が動揺振動のみを行なう場合について調べたところ，質点列数  $m$  の大きさには関係なく，地盤の広がりが同じであればほぼ似た振動数を与えるという結果をえた。このことから類推すれば，地盤中の構造物基礎は高振動数で運動するときは広い範囲の地盤とともに連成的に振動するのであるが，このような場合にモデルを作るには，単に  $m$  を大きくするばかりでなくブロックの縦横の比を変えるなどの方法で広い範囲の地盤を考慮するなら，比較的小きな  $m$  でもかなりの精度で解が得られることを示すものであろう。

Fig. 11 は構造物基礎頂部の絶対変位の周波数応答曲線で，減衰を無視した場合の頂部絶対変位の入力変位に対する倍率と外乱円振動数の関係を示している。これによると， $m$  の値が大きくなるにつれて 1 次共振点では，共振振動数の範囲が小さくなることのほかに， $m$  に対する共振点の変動の範囲があまり大きく

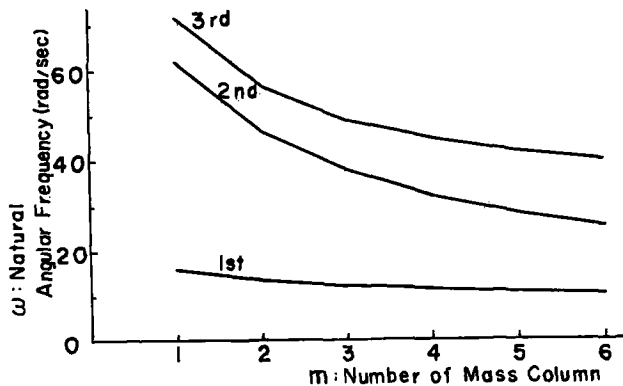


Fig. 10 Natural Angular Frequency of the Rigid Body surrounded by Surface Layer with uniform Elastic Property  $E=5000 \text{ kg/cm}^2, G=2000 \text{ kg/cm}^2, n=3$

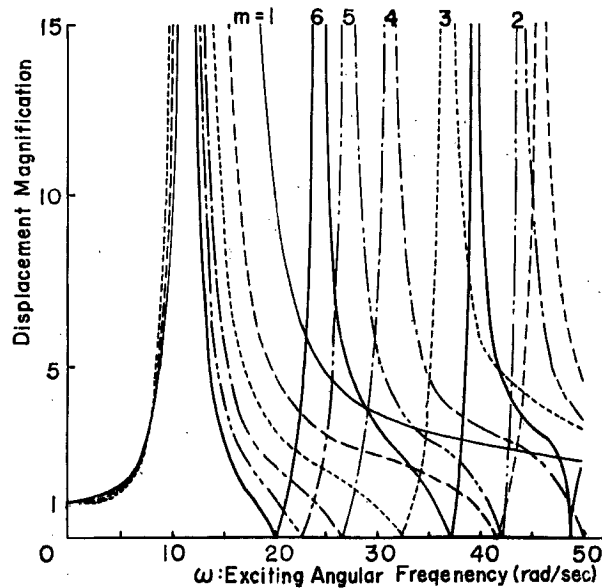


Fig. 11 Frequency Response for Displacement of Top of the Rigid Body

ないこと、2次の共振点は  $m$  の変動に対する共振点の変動は大きく、Fig. 10 で見たと同様に、この値がある極限に近づいていく傾向にあることなどがわかる。したがってこの図からも構造物基礎と連応的に振動する地盤の広がりにはある限界があることのほかに、この広がりに関係する質点列数  $m$  は外乱円振動数に応じて適当に選ばねばならないことがわかる。

## 5. 結 語

本研究では、地盤中の構造物基礎の動的挙動を解析する一つの方法として、多自由度振動系で表わせる新しいモデル化の手法を提案した。まず地盤の振動を対象とすることにより、この多自由度モデルの妥当性ならびに力学特性の検討および地盤の分割数の力学特性に及ぼす影響についての検討を行なった。また地盤中に設けられた壁体に働く振動圧を対象とすることにより、地盤の横方向の広がりをも考慮してこの振動圧の検討を行なった結果、連続な振動系で行なっているように、不連続な振動系による場合にも地盤の横方向の広がりを考慮しなければならないことを指摘した。ここに本研究で得られた成果を要約すれば、次のように結論することができよう。

(1) 地盤のみの多自由度モデルにおいて、地盤の分割数を大きくするにつれて固有円振動数は連続体とした解析結果に漸近的に近づくという結果が得られた。このことは分割数を大きくしたとき、モデルの挙動は連続体の挙動に類似したものとなるといえよう。

(2) 壁体に働く振動圧は、質点列数を大きく、すなわち考慮する地盤の広がり範囲を大きくするにつれて、その分布形、大きさとも連続解より求めたものとよく一致している。

以上のことより、本研究で行なったモデル化の手法は連続弾性解と比較する限り一応妥当性を有するものといえよう。

(3) しかしながら本研究における多自由度モデルは、本来半無限で連続な弾性体を不連続な有限個の要素の集合体に置換しているため、この点で矛盾が生じモデル特有の現象が現われる可能性がある。とくに対象とする外乱円振動数が高いときには、地盤の分割数、質点列数を大きくせねばならないということを指摘

した。しかしこれらの選び方がモデルの挙動を大きく左右し、極端な場合には、実現象と異なった挙動を示すこともありうるので、これらの選択には十分な検討が必要である。本研究においては、合理的にこれらを決定する方法を言及するにまで至らなかったが、この点の研究がぜひとも必要である。

(4) 地盤中に根入れされた構造物基礎は、この基礎周辺の地盤のみと連成的に振動を行ない、基礎から遠く離れた地盤と相互的な関係を持たなくなるような限界が存在すること、さらにこれは振動数の関数であることが示された。

(5) 上記(4)の意味での限界は、質点列数の大きさには直接関係はなく、地盤の広がりの方に影響されるようである。

以上のように、本研究での多自由度モデルは、解析的な解が得られないような地盤—構造物基礎系の動的挙動を知る上で有力な手段になりうるであろうことが示された。一方、今後このモデルを実際問題へ適用するには、地盤の分割数および質点列数の決め方が大きな問題となってくる。これらの合理的な決定方法については今後の課題とするとともに、構造物基礎とともに振動する限られた範囲の地盤の動的な効果を検討することによって、従来から行なわれている地盤の付加質量の合理的な決め方についても研究を続けたい。さらに構造物基礎と地盤の連成振動を考える上では、2次元解析ではなく、地盤の奥行方向をも考えに入れた3次元解析によるべきことは論をまたない。ここで述べたと同様のモデル化の手法の3次元問題への拡張についても今後の課題としたい。

最後に本研究での数値計算はすべて京都大学電子計算機 KDC-II によったことを付記する。

#### 参 考 文 献

- 1) 後藤尚男・土岐憲三・亀田弘行・横山康夫・秋吉卓・石田昌弘：松代群発地震地域における震動観測結果について，土木学会論文集，第145号，昭和42年9月，pp. 1~11
- 2) 田治見宏：深い基礎を有する構造物の地震応答について，日本地震工学シンポジウム（1966）講演集，昭和41年10月，pp. 255~260
- 3) 小坪清真，花田和史：動的地盤係数に関する弾性学的考察，土木学会第22回年次学術講演会概要集，第I部門，昭和42年5月，pp. 58~59
- 4) 後藤尚男・亀田弘行：杭基礎上の橋脚の地震応答について，土木学会論文集，第131号，昭和42年7月，pp. 7~18
- 5) Penzien, J.: Seismic Effects on Structures Supported on Piles, University of California Institute of Engineering Research, Aug. 1964.
- 6) Idriss, I., M., Seed, H., B.: Response of Horizontal Soil Analysis during Earthquake, Proceedings of A.S.C.E., SM 4, July, 1968, pp. 1003-1031.