

エネルギーの観点から単純な振動系の 減衰性状を評価する一方法

金 多 潔

A METHOD OF FINDING THE DAMPING CAPACITY IN A SIMPLE VIBRATING SYSTEM FROM THE ENERGY POINT OF VIEW

by Kiyoshi KANETA

Synopsis

A comparative study was carried out on attenuated free vibrations of single-degree-of-freedom systems with several types of restoring and damping force characteristics. Discussions on the connection between non-linearity and energy dissipation were made for examples of non-linear restoration and hysteretic damping in structures.

It was indicated that the specific damping capacity is the measure generally suitable in evaluating the amount of damping when a vibration system has complicated load-distortion characteristics which may be obtained experimentally.

Possibility of analyzing transient, as well as steady state, behaviors of the structures by using equivalent viscous damping was discussed in some detail from the practical point of view.

1. 序 論

構造物をして地震力に安全に抵抗せしめようとする立場からは、その構造物にかなり大きな減衰力が存在することは非常に望ましいものと言える。それは構造減衰が地震によつて建物に伝達される振動エネルギーを吸収して、たとえ構造物が地震波と共振するような状態に近い場合でも架構の振幅をある程度以上に増大せしめない働きをもつからである。多くの構造材料の弾性域における内部減衰は非常に小さいものであるから、我々は主に材料の弾塑性域における減衰、とくに plastic hinge が生じたり変形の集中が顕著に見られてくるような架構の大変形の状態における構造減衰に注目する。とくに組立架構においてはその接合部における部材間の摩擦を伴うごく僅かの滑りが材料の塑性変形とともにその構造物全体の減衰性状に大きく影響することは重要な事柄であるが、しかし一般に構造物の動的な減衰性を評価することは極めて困難な問題であるために未だ殆んどなされていない。その問題の困難さは主に構造物に弾塑性的な挙動をなさしめてその振動性状や減衰性状を調べるための試験装置を考案しそして試験を実施し記録することにあるのであつて、供試体に与えるべき動的荷重の載荷法、荷重速度などの十分な検討を必要とし、また供試体の力学的特性や寸法効果などの点、そしてそれに要する費用、労力なども考えると今日ではまだ早急に解決できないものともいわれている。しかしさればといつて構造物の振動の重要な一性状である減衰性について何ら考察を加えることなく等閑視することは許されないものと思われる。

本論文はかかる観点から非線型の複雑な振動系の減衰性について定性的に論じた基礎的な考察を纏めたものであつて、本研究の一部が Vibration Research Laboratory, Stanford University, California で行なわれ、その際 L. S. Jacobsen 教授の御指導を得たことを記して感謝の意を表する。

2. 自由減衰振動の表示法の比較

1自由度振動系が構造物の载荷試験から求められるとき複雑な形状の荷重—変形曲線の特性をもつ場合にはその系の運動の微分方程式は次のように書かれる。

$$m\ddot{u} + G(u, \dot{u}; t) = F(t) \dots\dots\dots(1)$$

ここに

$$\begin{aligned} m &= \text{質量,} \\ u &= \text{変形 (または相対変位),} \\ \dot{u} &= \text{速度, そして} \\ F(t) &= \text{外力} \quad \text{である。} \end{aligned}$$

関数 $G(u, \dot{u}; t)$ は減衰力と復元力に対する一般的な表示であつて、系の荷重—変形の特性が外力の振動数には無関係、すなわちその系の振動中の荷重—変形曲線は静的実験から得られたものと近似的に相等しいと仮定すれば、たとえその減衰性の物理的法則が未知であつても、次に述べるような色々の型の減衰の解析法によつてこの系の挙動を近似的に決定することができる。

微分方程式(1)における関数 $G(u, \dot{u}; t)$ は次に挙げる型の中の一つで表現されるが、これらの表示は種々のタイプの減衰性と復元力をもつた多くの1自由度系の動的挙動を解析する場合に通常用いられるものである。すなわち、

$$G(u, \dot{u}; t) = \text{非履歴性復元力} + C_n |\dot{u}|^{n-1} \dot{u} \dots\dots\dots(2a)$$

$$G(u, \dot{u}; t) = \text{非履歴性復元力} + C_m u^m (\text{sgn} \dot{u}) \dots\dots\dots(2b)$$

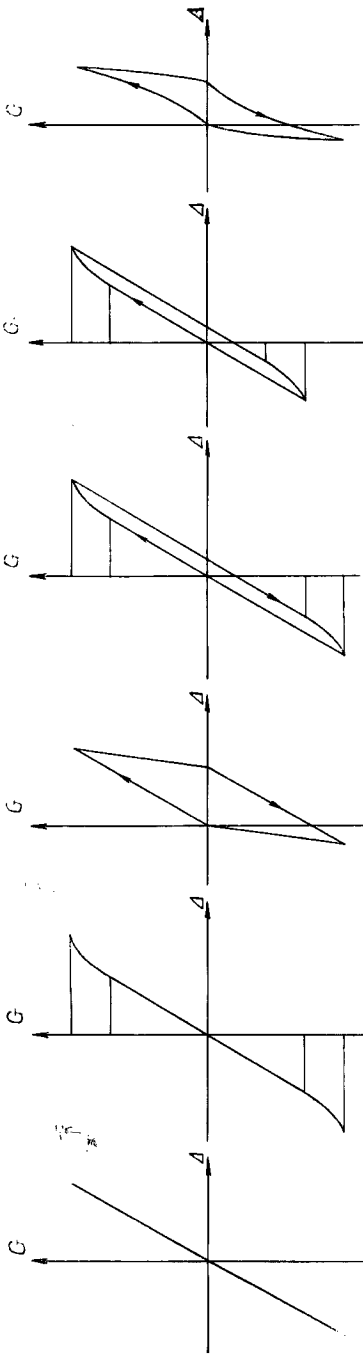
ここに C_n および C_m は定数であつて、これらの式中の n と m の値は減衰のタイプを規定する。たとえば

$n=0$ または $m=0$ なるとき	単純な Coulomb 減衰
$n=1$ なるとき	単純な粘性減衰
$n=2$ なるとき	速度の2乗に比例する減衰
$m=1$ なるとき	「構造減衰」、そして
$m=2$ なるとき	2次のな「構造減衰」

となる。非履歴性復元力は変形 u の1価関数であつて大抵の場合簡単な u の多項式で近似される。

しかし関数 $G(u, \dot{u}; t)$ が簡単な解析的な表示で近似されないで履歴性のある荷重—変形曲線の形式でのみ与えられる場合もあるが、任意のタイプの関数 $G(u, \dot{u}; t)$ が解析的に数式で与えられてもそれに対応する荷重—変形履歴曲線は容易に画かれるから、履歴曲線の“skeleton”はその1価復元力と変形量との関係を示すものと考えてよい。つまり任意の振動系に特有の荷重—変形のヒステリシス・ループはその骨格(skeleton)として変位の1価関数の復元力特性を示す曲線をもち、そしてその曲線の両側の履歴ループの面積が系の振動の1サイクルの間に失なわれるエネルギー、すなわち減衰の量、を与えるものと考えられるのである。

したがつて種々異なつた型の関数 $G(u, \dot{u}; t)$ をもつ振動系の減衰性を比較するためにはこれらの系の復元力と減衰力の特性を示す解析的な表現を比較するよりもそれらの等価な荷重—変形の履歴曲線を書いて見ることが便利であり、しかも興味深いものと思われる。

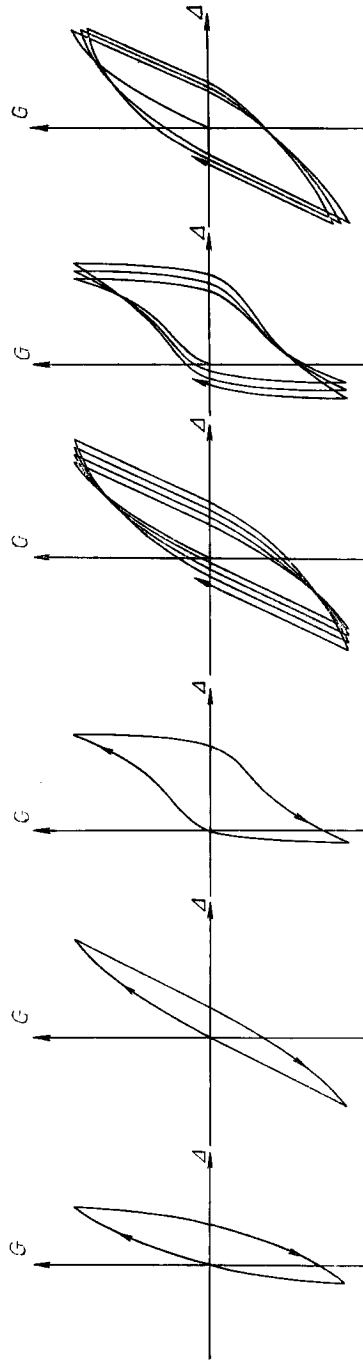


(a) Linear Non-Hysteretic
 (b) Non-Linear Non-Hysteretic
 (c) Bi-Linear Hysteretic Non-Deteriorating (Stable)

(d) Non-Linear Hysteretic

(e) Non-Linear Hysteretic

(f) Non-Linear Hysteretic



(g) Non-Linear Non-Deteriorating Hysteretic (Stable)
 (h) Non-Linear Non-Deteriorating Hysteretic (Stable)
 (i) Non-Linear Non-Deteriorating Hysteretic (Stable)
 (j) Non-Linear Hysteretic Deflection-Deteriorating (Unstable)
 (k) Non-Linear Hysteretic Deteriorating

Fig. 1 には色々なタイプの復元力と減衰性を有する系に対する等価な荷重—変形履歴曲線の幾つかが羅列されている。この履歴ループ内の面積を測れば1サイクル当りのエネルギー損失量または吸収された仕事の量が求められる。この図においてゼロから最大荷重までの荷重曲線の下側の面積はこの系の弾塑性変形の仕事量 W , つまりその変形までに系に貯えられたポテンシャル・エネルギーを与える。最大荷重からゼロまでの除荷曲線より下側の面積を w で表わせば specific damping capacity は定義によつて次のように書き表わされる。

$$\phi = \frac{\Delta W}{W} = \frac{W-w}{W} \quad \text{あるいは} \quad \Delta W = W-w$$

ゆえにある履歴曲線が与えられるならば、そのループ内の面積はプランメーターなどを用いて数値積分によつて求められるから、本研究ではその荷重—変形の特徴が Fig. 1 に示されるような1自由度系の若干について考察を企てる。

(A) 線型復元力と Coulomb 減衰を有する系

最初に最も簡単な例として線型復元力と Coulomb の摩擦減衰を有する振動系を考える。

この系の運動の微分方程式は

$$m\ddot{u} + (\text{sgn } \dot{u})C + ku = F(t) \dots\dots\dots (3)$$

と書かれるから、いま \dot{u} を v と書き表わせば

$$\dot{u} = \frac{d}{dt} \dot{u} = \frac{d\dot{u}}{du} \cdot \frac{du}{dt} = v \frac{dv}{du}$$

となり、方程式(3)はしたがつて

$$mv \frac{dv}{du} + (\text{sgn } v)C + ku = F(t)$$

または

$$mvdv + (\text{sgn } v)Cdu + kudu = F(t)du$$

と書き改められる。

上の式を積分すれば

$$\frac{1}{2} m [v^2]_{v_0}^v + (\text{sgn } v)C [u]_{u_0}^u + \frac{1}{2} k [u^2]_{u_0}^u = \int_0^t F(t) v dt$$

なる関係式を得るが、いま $t=0$ なるとき $u_0=0$ とすれば

$$\frac{1}{2} mv^2 = \int_0^t F(t) v dt + \frac{1}{2} mv_0^2 - (\text{sgn } v)Cu - \frac{1}{2} ku^2 \dots\dots\dots (4)$$

である。

この式はこの非保存系に対するエネルギーの関係を説明するものであつて、その意味は次のように解釈される。

$$\text{時刻 } t_1 \text{ における系の運動エネルギー量} = \left\{ \begin{array}{l} (0 < t < t_1 \text{ なる期間の外力によるエネルギー導入量}) \\ + (t=0 \text{ における系の運動エネルギー量}) \\ - (t=0 \text{ において系に貯えられているポテンシャル・エネルギー量}) \\ - (0 < t < t_1 \text{ なる期間の減衰に基づくエネルギー損失量}) \end{array} \right\} \dots (5)$$

この関係は過渡振動のみならず振動の定常状態においても成立するものであつて、たとえば定常振動の場合には系の振幅がその最大値 U に達するとき速度はゼロとなるから (5) 式は次のように簡単になる。

$$0 = \text{エネルギー導入量} + \frac{1}{2}mv_0^2 - \text{エネルギー損失量} - \frac{1}{2}kU^2$$

U と v_0 が共に正なるとき荷重—変形曲線は Fig. 2 の直線 AB で示される。A 点における速度 v_0 は G 点における系の速度 $-v_0$ とその絶対値が相等しいから次の関係が成り立つ。

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \text{三角形 } GDL \text{ の面積} = \text{三角形 } OCE \text{ の面積} = \frac{1}{2}kU^2$$

よつて我々は

$$[\text{外力によつて導入されるエネルギー量}] = [\text{Coulomb 減衰によるエネルギー損失量}]$$

なる等式を得る。1 サイクル当りのエネルギー損失量は $\Delta W = 4CU$ で与えられ、これはエネルギー損失量が変形の振幅 U の 1 次の幂に比例することを示すが、一方、系に貯えられるポテンシャル・エネルギーは三角形 OCE の面積に相等しいから

$$W = \frac{1}{2}kU^2$$

ということになる。C の値が一定ならばこの系の specific damping capacity は

$$\phi = \frac{\Delta W}{W} = \frac{4CU}{\frac{1}{2}kU^2} = \frac{8C}{kU} \dots\dots\dots (6)$$

で表現される。すなわちこの場合の specific damping capacity は変形の振幅 U に逆比例する。

また静的載荷の場合には荷重の増加率は非常に小さいから $v=0$ と見做してよい。このとき (5) 式は

$$\begin{aligned} & \text{載荷重によつてなされた仕事} \\ & = \text{貯えられたポテンシャル・エネルギー} \\ & + \text{Coulomb 減衰に基づくエネルギー損失量} \end{aligned}$$

と解釈される。

(B) 線型復元力と粘性減衰を有する系

粘性減衰を伴う線型振動系の場合はその定常状態の振動に対する荷重—変形の特徴が Fig. 3 に示される。この履歴ループ内の面積は粘性減衰に基づく 1 サイクル当りのエネルギー損失量を与えるが、これは前の考察から外力によるエネルギー導入量に相等しい。

Kimball, A. L. はこのような系の 1 サイクル当りのエネルギー損失量を対数減衰率 δ で表わしたが¹⁾、その結果は

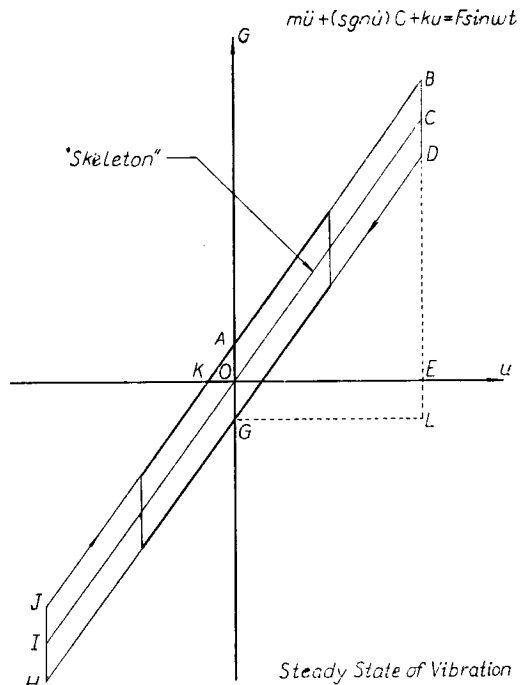


Fig. 2 Load-Distortion Curve : Coulomb Damping

$$\frac{\Delta W}{W} = 2\delta$$

すなわちこの場合の specific damping capacity は一定で、かつこの系の対数減衰率 δ の2倍となる。ゆえに1サイクル当りのエネルギー損失量は

$$\Delta W = 2\delta W = 2\delta \times \frac{1}{2} k U^2 = k\delta U^2 \dots\dots\dots(7)$$

と書くことができる。だから粘性減衰を有する系に対しては1サイクル当りのエネルギー損失量は変形振幅の2次の幂に比例することになる。

(C) 線型復元力と速度の高次に比例した減衰力を有する系

(i) 自由振動:

振動速度の高次の幂に比例する減衰力をもつ系に対してその specific damping capacity を求めることはあまり容易ではない。R. von Mises は速度の2乗に比例する減衰を伴なう系を考え、その自由振動の振幅が漸次低減される模様を研究した²⁾。また Klotter, K. は2次の速度減衰と任意の特性の復元力をもつ系の自由振動を解析した。そこでこの節では von Mises の解析結果について簡単に紹介し、その説明を加えて見る。一つの例題としていま2次の速度減衰と線型復元力を有する単純な系を考えよう。この系の自由振動の方程式は

$$\ddot{u} + \frac{1}{2} S \dot{u}^2 (\text{sgn } \dot{u}) + p^2 u = 0 \dots\dots\dots(8)$$

で与えられ、 $p^2 = k/m$ であり S は一つの定数である。そこで \dot{u}^2 を V とおけば

$$\ddot{u} = \frac{1}{2} \frac{dV}{du}$$

であるから(8)式は

$$\frac{dV}{du} + (\text{sgn } \dot{u}) S \cdot V + 2p^2 u = 0 \dots\dots\dots(9)$$

と書き換えられる。

Von Mises は振動系が正の初期変位 $u = U_1$ を与えられ、そして静止の状態から出発するときの運動に注目した。この場合最初の振れ (swing) では系は負の速度 \dot{u} をもつから $\text{sgn } \dot{u} = -1$ であり、したがってこの間は(9)式は

$$\frac{dV}{du} - S \cdot V = -2p^2 u \dots\dots\dots(10)$$

となる。この標準的な微分方程式の解は

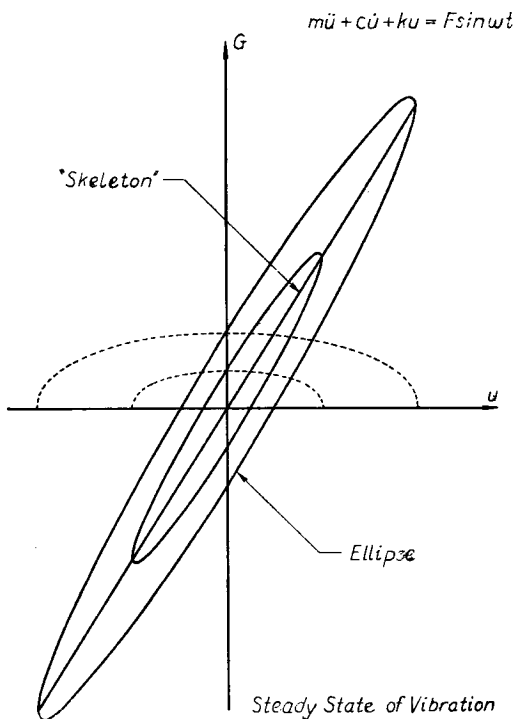


Fig. 3 Load-Distortion Curve : Viscous Damping

$$V = 2p^2 e^{Su} \int_0^{U_1} u e^{-Su} du \dots\dots\dots(11)$$

であるから

$$N(u) = \int_0^u e^{-Su} du \dots\dots\dots(12)$$

とおいて (11) 式を

$$V = 2p^2 e^{Su} [N(U_1) - N(u)] \dots\dots\dots(13)$$

と書くことができる。

系の運動が微分方程式 (10) に従う限り、すなわち系が次の「最大変位」 U_2 に達するまでは系の速度は負であるからそれまでは (13) 式は成立する。 U_2 は方程式 (13) の右辺をゼロとおいて決定されるから

$$N(U_1) = N(U_2) \dots\dots\dots(14)$$

なる関係が得られ、この正の側の最大変量 U_1 と負の側の最大変形量 U_2 との間の超越関数的な関係式は次のように取り扱かうことができる。方程式 (12) に対して部分積分を行なうと

$$N(u) = S^{-2} [1 - e^{-Su} (Su + 1)]$$

となるが、これより

$$- \ln[1 - S^2 N(u)] = Su - \ln(Su + 1)$$

が得られる。この式をそのまま用いる代りにこの左辺を $y = -\ln[1 - S^2 N(u)]$ と書き換え、また Su を x で表現すれば

$$y = x - \ln(x + 1)$$

となる。二つの連続的な振幅 U_1 と U_2 はその argument $x_1 = SU_1$ と $x_2 = SU_2$ とが関数 y の同じ値を与えるときのものであるから (14) 式は $y_1 = x_1 - \ln(x_1 + 1) = y_2 = x_2 - \ln(x_2 + 1) \dots\dots(15)$ と書くのと同じことになる。

Fig. 4 は一つの振れ (swing) に属する 1 組の x_1 と x_2 を定めるべき y_1 と y_2 を一般的にプロットしたものである。この場合の半サイクル当りのエネルギー損失量は

$$\Delta W = \frac{1}{2} k U_1^2 - \frac{1}{2} k U_2^2$$

となるから、したがって 1 サイクル当りのエネルギー損失量は

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2} k (U_1^2 - U_2^2) + \frac{1}{2} k (U_2^2 - U_3^2) \\ &= \frac{1}{2} k (U_1^2 - U_3^2) \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

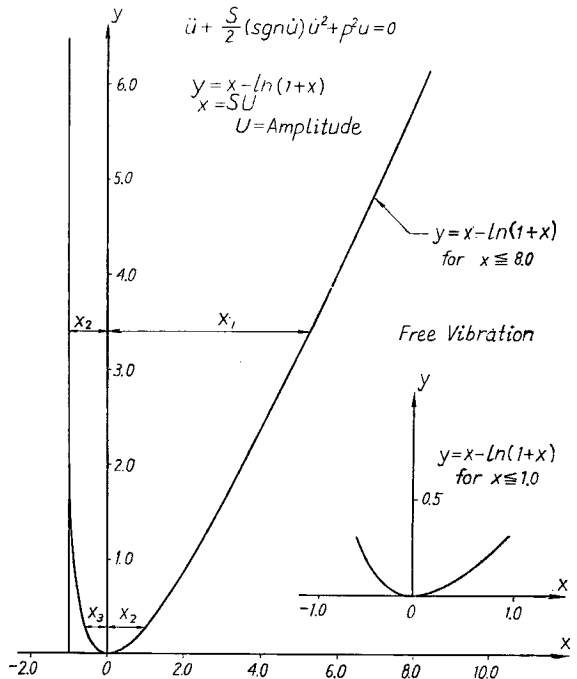


Fig. 4 Amplitude Relationships for a System with Quadratic Velocity Damping : R. von Mises' Method : Linear Restoring Force

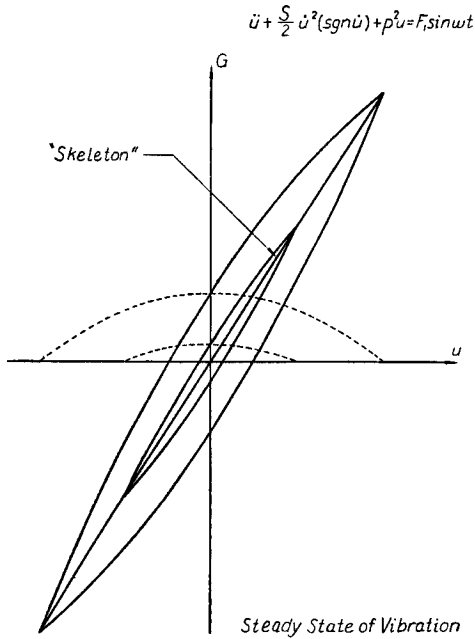


Fig. 5 Load-Distortion Curve : Quadratic Velocity Damping

として表わされる。1 サイクルに対する specific damping capacity はその最大変形に関するから

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{U_1^2 - U_2^2}{U_1^2} \dots \dots \dots (17)$$

ということになる。この von Mises の方法は Klotter によつて非線型の復元力と 2 次の減衰力をもつ振動系に応用された³⁾。

(ii) 定常強制振動 :

速度の 2 次に比例する減衰力と線型ないし非線型の復元力をもつ系の定常状態の振動の場合には、正弦運動を仮定したときの等価履歴曲線が Figs. 5, 6 および 7 に示される。この場合は定常振動解を

$$u = U \sin(\omega t + \phi) \dots \dots \dots (18)$$

ここに $\omega =$ 強制力の振動数

$\phi =$ 位相角

と書くことができるから、系の速度は

$$\dot{u} = U\omega \cos(\omega t + \phi)$$

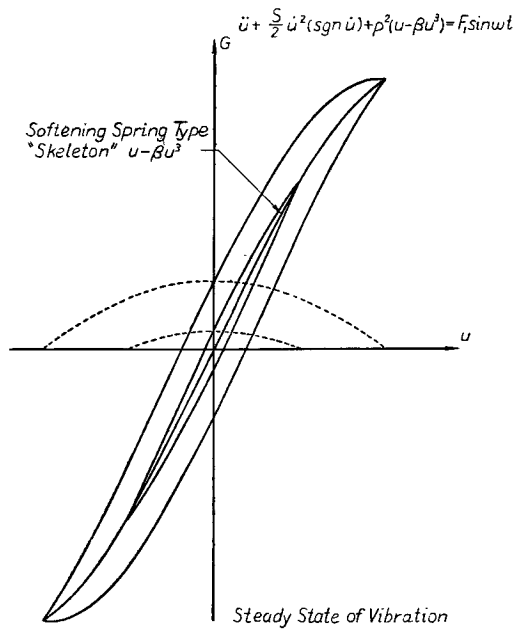


Fig. 6 Load-Distortion Curve : Quadratic Velocity Damping

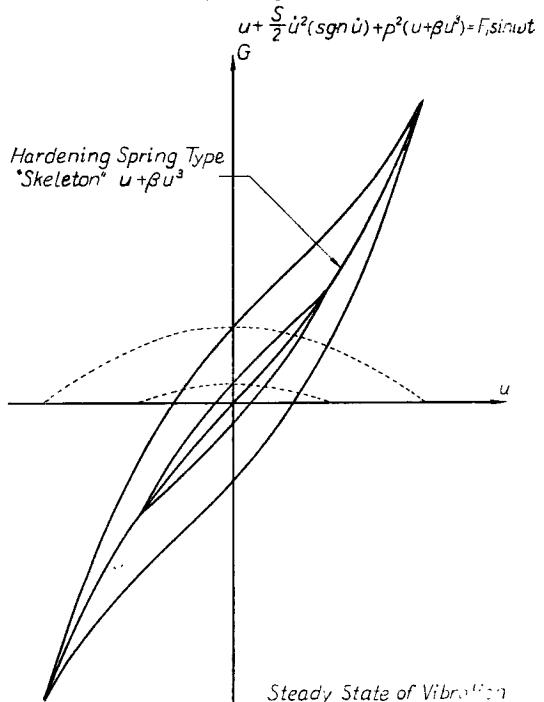


Fig. 7 Load-Distortion Curve : Quadratic Velocity Damping

となる。したがってこの場合の減衰力は

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 &= U^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) \\ &= U^2 \omega^2 [1 - \sin^2(\omega t + \phi)] \\ &= U^2 \omega^2 \left[1 - \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right] \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

に比例する。よつて、速度の2次に比例する減衰力は変形に関して放物線的になることがわかる。一般にある振動系の運動が

$$m\ddot{u} + C_n |\dot{u}^{n-1}| \dot{u} + ku = F \sin \omega t \dots\dots\dots(20)$$

で表わされる場合には、系の運動もまた正弦的なものと仮定するならば、その specific damping capacity が求められる。すなわちその場合

$$\begin{aligned} \dot{u}^n &= U^n \omega^n \cos^n(\omega t + \phi) \\ &= U^n \omega^n [1 - \sin^2(\omega t + \phi)]^{n/2} \\ &= U^n \omega^n \left[1 - \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right]^{n/2} \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

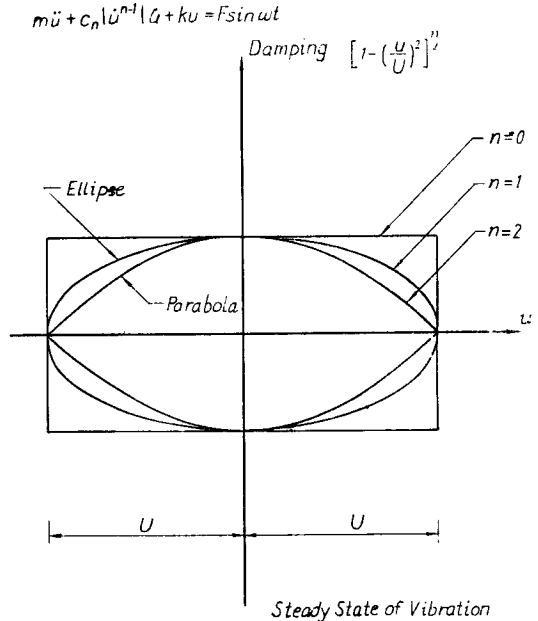


Fig. 8 Damping in Terms of Displacement

が成立するが、この系の荷重—変形曲線は復元力 “skeleton” と u の値に対応する減衰力の和として与えられ

$$G(u, \dot{u}; t) = ku + (\text{sgn } \dot{u}) C_n U^n \omega^n \left[1 - \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right]^{n/2} \dots\dots\dots(22)$$

で表わされる。この式の減衰項は Fig. 8 に n の種々の値に対して変形 u の関数として示される。この履歴ループに囲まれる面積、すなわち1サイクル当りのエネルギー損失量は

$$\Delta W = 4C_n \int_0^U \dot{u}^n du = 4C_n U^n \omega^n \int_0^U \left[1 - \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right]^{n/2} du$$

となるから、ここで u の代りに $u = U \sin z$, $du = U \cos z dz$ なる関係を代入すれば

$$\begin{aligned} \Delta W &= 4C_n U^n \omega^n \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 z)^{n/2} U \cos z dz \\ &= 4C_n U^{n+1} \omega^n \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} z dz \\ &= 4C_n U^{n+1} \omega^n \times \frac{(n-2)}{(n+1)} \cdot \frac{(n-2)}{(n-1)} \dots\dots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (n \text{ が奇数のとき}) \\ &= 4C_n U^{n+1} \omega^n \times \frac{n}{(n+1)} \cdot \frac{(n-2)}{(n-1)} \dots\dots \frac{2}{3} \cdot 1 \quad (n \text{ が偶数のとき}) \dots\dots(23) \end{aligned}$$

が得られる。また n が整数でないときにはエネルギー損失量 ΔW は n のガンマ関数となる。よつて任意の振幅 U に対する specific damping capacity は

$$\begin{aligned} \phi = \frac{\Delta W}{W} &= \frac{4C_n U^{n+1} \omega^n \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} z dz}{\frac{1}{2} k U^2} \\ &= 8C_n U^{n-1} \omega^n \times \frac{n}{(n+1)} \cdot \frac{(n-2)}{(n-1)} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (n \text{ が奇数}) \\ &= 8C_n U^{n-1} \omega^n \times \frac{n}{(n+1)} \cdot \frac{(n-2)}{(n-1)} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 \quad (n \text{ が偶数}) \cdots (24) \end{aligned}$$

と書くことができる。

3. 限界減衰係数をパラメータとする Specific Damping Capacity の図式表示

(A) Coulomb 減衰

粘性減衰をもつ単純な線型振動系の自由振動に対して限界減衰係数 (critical damping coefficient) は $2\sqrt{km}$ として定義される。この意味はもし減衰がこの限界値よりも大きければ系の運動は振動的ではなくなるということである。これと同じような概念から一般的な系の減衰の量をこの限界減衰係数に等価なものを基準として表示することも可能である。

いま Coulomb 減衰をもつ一つの系の自由振動がその振幅を1サイクル当り $2D$ づつ減ずるものと仮定しよう。 D はこの場合 Coulomb の摩擦力に比例する定数である。 D の限界値はこの系の運動を丁度半サイクルで停止せしめるごときものと定義する。すなわち振幅 U に対する D_{cr} は

$$D_{cr} = \frac{U}{2}$$

で与えられる。ここで一つのパラメータ ξ を考え、これが減衰定数 D とその限界値 D_{cr} の比を表わすもの、すなわち

$$\xi = \frac{D}{D_{cr}}$$

であるとする。 D なる大きさの Coulomb 摩擦を伴う系の振動の1サイクル当りに失なわれるエネルギー量は

$$\Delta W = \frac{1}{2} k U^2 - \frac{1}{2} k (U - 4D)^2 = 4kD(U - 2D)$$

となるから、この場合の specific damping capacity は

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\Delta W}{W} = \frac{4kD(U - 2D)}{\frac{1}{2} k U^2} \\ &= \frac{8\xi D_{cr}(2D_{cr} - 2\xi D_{cr})}{4D_{cr}^2} \\ &= 4\xi(1 - \xi) \cdots (25) \end{aligned}$$

として表示される。Fig. 9 はパラメータ ξ で示した振動の1サイクルに対する specific damping capacity を図示したものである。一方 Fig. 10 は D の値を種々仮定して、それらの系に対する振動の振幅と specific damping capacity との関係が画かれている。

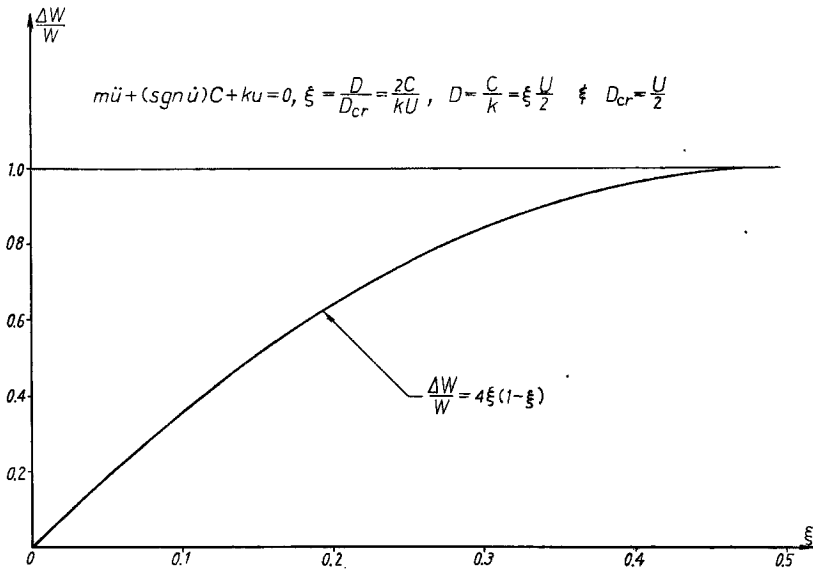


Fig. 9 Specific Damping Capacity of a System with Coulomb Damping

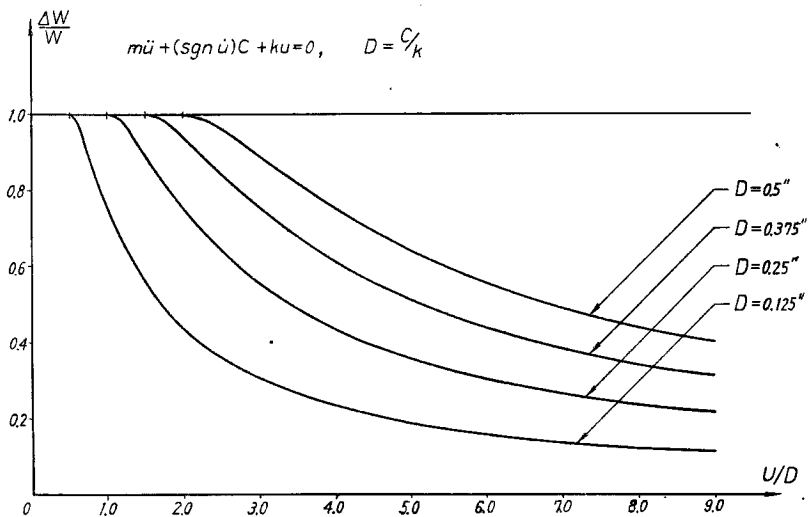


Fig. 10 Specific Damping Capacity of a System with Coulomb Damping

(B) 粘性減衰

粘性減衰を伴う線型系に対してもまた一つのパラメター ν を考え、これが系の減衰係数 C とその限界値 C_{cr} との比を表わすものとする。すなわち

$$\nu = \frac{C}{C_{cr}} = \frac{C}{2\sqrt{km}}$$

である。したがって対数減衰率 δ を ν で表わすと次のようになる。

$$\delta = 1n \frac{U_1}{U_3} = \frac{2\pi\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}$$

ここに U_1 は正の側の最大変形であり、 U_3 は同じく次のサイクルの正の側の最大変形である。1サイクル当りのエネルギー損失量は

$$\Delta W = \frac{1}{2} kU_1^2 - \frac{1}{2} kU_3^2$$

で与えられるから、specific damping capacity は

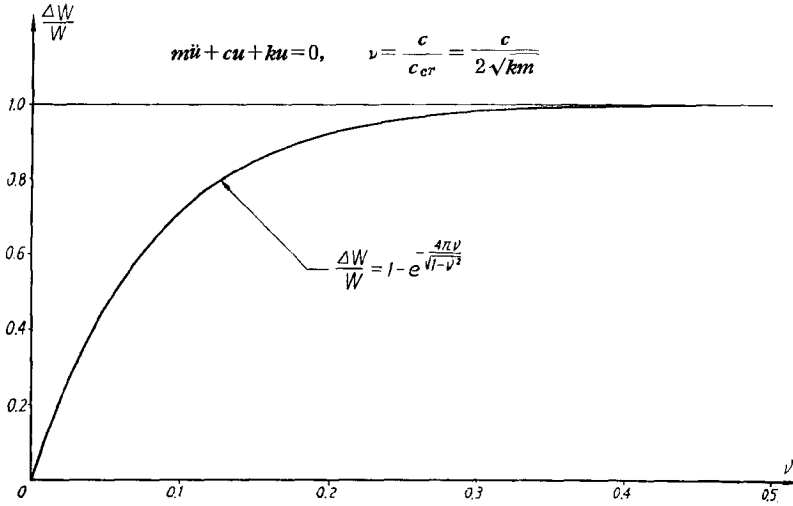


Fig. 11 Specific Damping Capacity of a System with Viscous Damping.

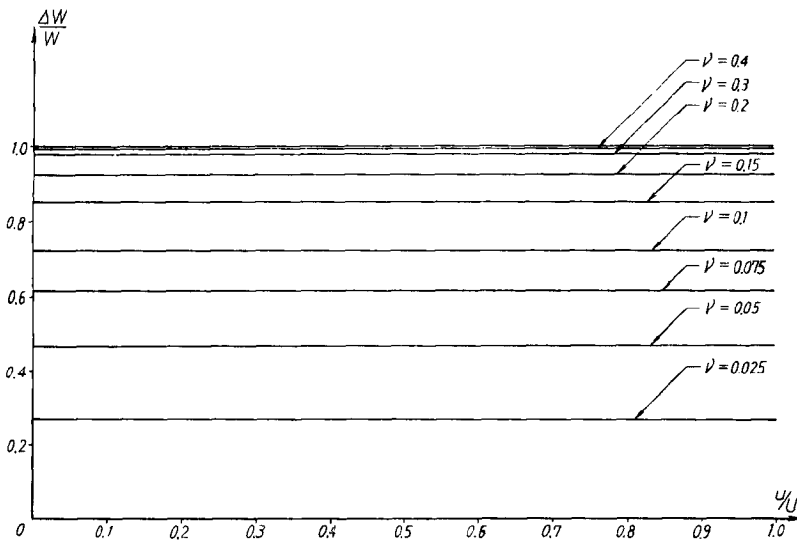


Fig. 12 Specific Damping Capacity of System with Viscous Damping.

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\Delta W}{W} = \frac{U_1^2 - U_2^2}{U_1^2} = \frac{U_1^2 - U_1^2 e^{-2\delta}}{U_1^2} \\ &= 1 - e^{-2\delta} = 1 - e^{-\frac{4\pi\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}} \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

となる。Fig. 11 は $\Delta W/W$ を ν をパラメーターとして表わしたものであつて、これより粘性摩擦系をもつ specific damping capacity は最大変形 U の値には無関係であることがわかる。よつて ν の種々の値に対応する specific damping capacity の値を Fig. 12 に示す。

(C) 速度の2次に比例する減衰

方程式(8)で記述される系の自由振動の1サイクル当りの specific damping capacity の値は von Mises の方法によつて S の種々の値と系の最大変形量とに対して求められた。その計算結果がFig. 13 に示される。この場合には specific damping capacity は S と最大変形 U の両方に関係することがわかる。

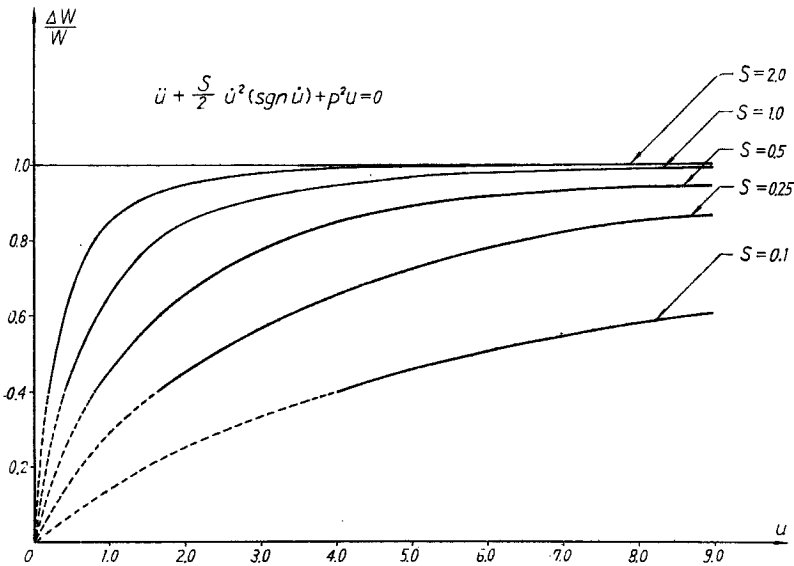


Fig. 13 Specific Damping Capacity of a System with Quadratic Velocity Damping.

4. Specific Damping Capacity の図式表示の実験結果への応用

木造、鉄骨造、鉄筋コンクリート造などの実際の材料によつて構成せられる建造物に交番荷重を加えてその挙動を解析する実験結果は一般に非常に複雑な様相を呈示する。この静的試験で記録された荷重—変形特性曲線は通常非線型、2 面の履歴特性を有するもので、変形の大きさ、荷重の増分、載荷の前歴などが供試体の荷重—変形履歴ループを特性づける極めて重要な因子であることが知られる⁴⁾。

かかる特性をもつ構造物をもし 1 自由度振動系に抽象せられるならば、その場合の復元力と減衰力の組合せ $G(u, \dot{u}; t)$ は非線型、2 面の履歴性をもつたものとなる。そして $G(u, \dot{u}; t)$ の特性が知らればその系が任意の動的載荷を受ける場合の系の応答は phase-plane-delta 法⁵⁾によつて満足すべき精度で求めることができ、あるいは $G(u, \dot{u}; t)$ をさらに bi-linear, hysteretic な系に抽象することにより analog

computer や digital computer の適用も可能である⁹⁾。しかし解析の簡単化のためにはかかる複雑な復元一減衰力 $G(u, \dot{u}; t)$ をもつた系をそれに等価な粘性減衰を伴う等価線型復元力系に置き換えることも実用上望ましい場合が著るしく多いのである。

その場合には実験的に得られた荷重一変形曲線は直線または曲線の“skeleton”と粘性摩擦の成分によって近似しなければならないが、しかし比較的簡単な場合を除けば一般に $\pm U$ の値がかなり小さくない限り十分満足すべき近似は得られない。

5. 結 論

1. 本研究の目的は実際の構造物の振動のように運動方程式中で復元力と減衰力の成分が明確に区別できない振動系の減衰性を評価する一方法について論ずることにあつた。すなわち通常の振動理論では運動方程式の一般的な表示には慣性項、減衰項および復元力の項が各々独立に含まれるが、我々の取り扱かう系では後の2項は単に $G(u, \dot{u}; t)$ で表現され、そしてこれは非線型、2 価の履歴特性をもつ。

2. 我々は議論を簡単な1自由度振動系に限ることとし、まづこれが線型の復元力特性と Coulomb 摩擦、粘性摩擦、あるいは系の振動速度の2次の幂に比例する減衰力を有する場合の減衰量を specific damping capacity で表わした。そして各々の場合に強制力によつて系に導入せられるエネルギー量と減衰によつて吸収されるエネルギー量、および系に貯えられるポテンシャル・エネルギー量の間の相互関係が論じられた。

3. 減衰力が系の振動速度の n 乗に比例する場合の specific damping capacity が系の最大変位と外力の振動数の関数として解析的な表現で与えられることが示され、そして $n=2$ なる場合には von Mises や Klotter の方法が適切な解析手段であることが明らかにされた。特に $n=2$ で系の復元力が任意の非線型特性を示す系の自由振動の解析には Klotter の方法は有用である。

4. 次に限界減衰係数あるいはその概念に基づいて任意の1自由度振動系の specific damping capacity が種々のパラメーターと対比せしめて図示された。そして現実の構造物のように複雑な動的特性を示す振動系に対しても実用的な観点から等価な粘性減衰系に抽象されることが多いが、その際にも系の specific damping capacity を図式表示する方法は実験結果を解析する上に役立つものである。しかし実験から得られた系の荷重一変形曲線を直線の“skeleton”と粘性摩擦の成分によつて近似することは系の定常振幅の小さい場合に限り適切であるが、さもないときは更に厳密な仮定を設けて解析すべきことが結論される。

参 考 文 献

- 1) Kimball, A. L. “Vibration Damping, Including the Case of Solid Friction”, Transactions of American Society of Mechanical Engineers, Vol. 51, Sept.~Dec., 1927.
- 2) R. von Mises, “Elemente der Technische Hydrodynamik I”, Leipzig and Berlin, Germany, 1914, p. 188.
- 3) Klotter, K. “Free Oscillations of Systems Having Quadratic Damping and Arbitrary Restoring Forces”, Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, No. 4, December 1955, pp. 1~7.
- 4) 金多 潔「釘接合部の構造減衰並びに剛性に関する研究」, 京都大学防災研究所年報第3号, 昭和34年12月, 111~126頁.
- 5) Jacobsen, L. S. “On a General Method of Solving Second-Order Ordinary Differential Equations by Phase-Plane-Displacements”, Journal of Applied Mechanics, Vol. 19, No. 4, December 1952, pp. 543~553.
- 6) 小堀鐸二, 金多潔, 南井良一郎, 水畑耕治「構造物の耐震解析とアナログ・コンピュータ(アナログ・コンピュータによる非線型過渡振動解析)」日本建築学会論文報告集第63号, 昭和34年10月, 297—304頁