局所細密化節点による低気圧を模した渦の再現性
Reproducibility of Vortex Roll-up using Locally Refined Nodes

○小笠原宏司・榎本剛
○Koji OGASAWARA, Takeshi ENOMOTO

Accuracy of advection on the sphere with refined nodes was investigated in a test case with a known exact solution, in which two vortices at the North and South poles roll-up. Flyer and Lehto (2010) investigated the accuracy with refined nodes and showed that the node refinement improves accuracy in the test case. They made refined nodes from minimum energy (ME) nodes using electrostatic repulsion, but this algorithm is not useful because generation of refined nodes is difficult and takes long time. Thus, we use another node refinement algorithm, the Schmidt transformation from ME nodes. We obtained more accurate results with refined nodes than those with quasi-uniform nodes. At the number of nodes $N = 4096$, the normalized mean absolute error (ℓ_1) with refined nodes is approximately one third of the error with quasi-uniform nodes, the normalized root mean square error (ℓ_2) is approximately a half of the error with quasi-uniform nodes

1　はじめに

Radial Basis Function(RBF)は距離のみに依存する基底関数である。元来与えられた点とその点での値から未知の曲面を内挿により得るために作られたものであるが、いまでは様々な分野で大小さまざまなスケールでの計算に使われている。RBF は距離のみに依存するので次元の増加による複雑さの増加がしにくい特徴を持っている。

RBF を用いた全球の移流演算子において、両極は特異点にはならず、また格子に沿って点を置く必要もないので均等に近い節点を使うことができる。また先行研究[1]において RBF を用いた輸送スキームでは高い空間的な安定性とスペクトル的な収束性が示されている。

しかし RBF を用いた計算では節点数の増加につれて内挿行列が悪条件になることが知られている。これは節点数の増加により浮動小数点数の精度の範囲では節点間距離が区別できなくなるため、列の値がほぼ等しい列が複数でき、内挿行列が正則でなくなるためである。

そこで節点数を増やさずに精度を上げる方法として局所的な細密化を施す先行研究［２]がある。局所的細密化は領域において局所的に変化の大きい領域がある場合に有効な手段で、節点数の増加による内挿行列の悪条件化の緩和にもつながる。

先行研究では ME 節点を元に静電反発法を用いて細密化していたが、これの手法では節点数が増加した際に細密化した節点を得ることが難しくなり、また時間がかかると考えられる。

２目的と手法

本研究の目的は、より節点数の多い場合に対処しやすいように数値的最適化を用いない局所的な細密化を用い、精度の向上させることである。局所的な細密化には Schmidt 変換を用いて両極に節点を集中させた（Fig.1）。RBF はガウシアン RBF を用い、任意の形状パラメーターは最短節点間距離を元にした変動するパラメーター[2]を用いた。精度実験は先行研究［２]の静止した両極にある２つの渦の巻き上げ実験を行った。

３結果

今回のテストケースにおいて、Schmidt 変換を用いた細密化を用いることにより、用いない場合よりも良い精度が得られることが分かった(Fig.2,Fig.3)。節点数 4096 において局所的な細密化を施すことにより正規化平均誤差ℓ_1はおおよそ２倍の精度(Fig.2)になり、正規化二乗平均平方根誤差ℓ_2は３倍の精度(Fig.3)を得ることができた。

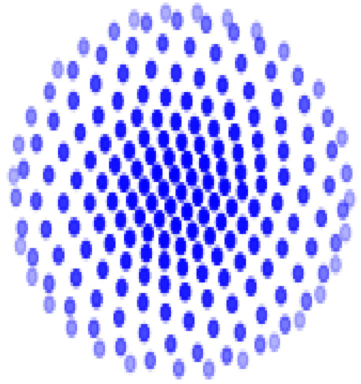

Fig.1: Distribution of nodes refined from quasi-uniform ME nodes.

The number of nodes N≒ 400

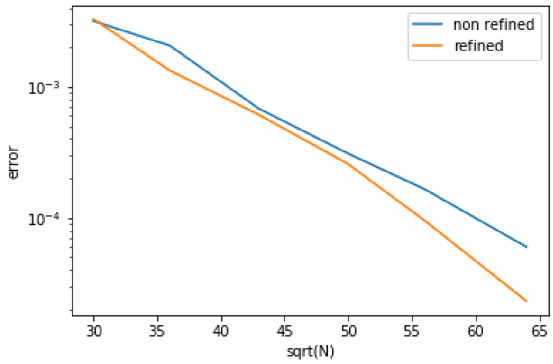

Fig.2 Convergence ℓ_1 in the vortex roll-up experiment using refined nodes (orange) and uniform nodes (blue)

NB. The horizontal axis is $\sqrt{N}$, where N is the number of the nodes

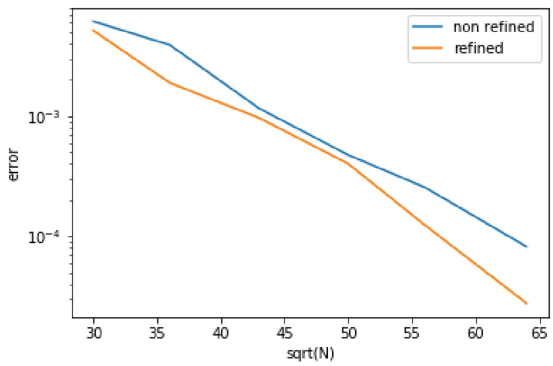

Fig. 3: Convergence of ℓ_2 in the vortex roll-up experiment using refined nodes (orange) and uniform nodes (blue)

NB. The horizontal axis is $\sqrt{N}$, where N is the number of the nodes

参考文献

[1] Flyer, N., G.B. Wright, Transport schemes on a sphere using radial basis functions, J. Comput. Phys. 226 (2007) 1059-1084.

[2] Flyer, N. and E. Lehto, Rotational transport on a sphere: Local node refinement with radial basis functions, J. Comput. Phys 229 (2010) 1954-1969