

境界積分方程式法による動的破壊の計算に用いる二つの時間発展法の比較
Comparison of Two Time-Marching Schemes Used in Boundary Integral Equation Method
for Simulation of Dynamic Rupture

○野田博之・栗原悠宇希・佐藤大祐

○Hiroyuki NODA, Yuuki KURIHARA, Dye SK SATO

We numerically studied stability and convergence of two time-marching schemes in the boundary integral equation method (BIEM) for dynamic rupture simulations in Mode I, II, and III conditions. One was a conventional method based on piecewise-constant distribution of the rate of displacement gap (CM), and the other was a second-order predictor-corrector method previously applied to a spectral BIEM (NL). In the stability analysis, we simulated a traction-free fault under random distributions of initial traction. CM has two numerical parameters, and the stability regime is quite restricted. In contrast, NL has one parameter and yields a wide parameter regime of stability, conceivably allowing more flexible meshing on the fault. In the convergence analysis, CM resulted in convergence rate of Δx^1 while NL shows convergence of Δx^2 typically or of $\Delta x^{1.5}$ under certain conditions. NL requires negligible additional computational costs relative to CM. Therefore, we conclude that NL is a useful time-marching scheme.

1. はじめに

境界積分方程式法 (BIEM) は、媒質の離散化が不要な省メモリー性とグリーン関数を利用する事による高精度といった利点のため、動的破壊進展の計算の重要な手法である。しかし、空間領域におけるグリーン関数を用いた BIEM によく使用される 1 次の時間発展法 (CM) [e.g., Cochard & Madariaga, 1994] は数値安定性に難があり [e.g., Tada & Madariaga, 2001], しばしば数値的な粘性を加えて数値計算の安定化が図られる [e.g., Yamashita & Fukuyama, 1996]。一方、滑り速度の離散化にフーリエ基底を用いたスペクトル境界積分方程式法 (SBIEM) では、2 次の精度を持つ予測子・修正子法が提唱されている (NL) [e.g., Noda & Lapusta, 2010]。CM には無次元化した時間ステップの長さ h_T 、時間ステップ中の応力の定義点のタイミング e_t の二つの数値パラメータが存在するが、NL の数値パラメータは h_T のみである。

本研究では、矩形関数を基底関数として相対変位速度 V の時空間分布を離散化した 2 次元 BIEM に関して、上述の 2 つの時間発展手法の安定性解析、収束解析を行いその結果を比較した。

2. 手法

本研究では断層構成則に起因する複雑性を避けるため、強度がゼロ (自由表面) の断層面を扱

った。媒質の Poisson 比は $1/4$ とし、Mode I, II, III すべての場合について数値実験を行った。

安定性解析

同一サイズ Δx の要素 64 個を用いて平らな断層を離散化、ゼロを中心とした正規乱数を用いて初期の載荷 τ^{ini} (相対運動を禁じた場合のトラクション) を与えた。強度がゼロの断層であろうとも、載荷を与えないと断層変位は発生しない。本数値実験はこの様な解析解に数値誤差が加わった場合の、誤差の時間発展のシミュレーションにあたる。計算開始後、 V の L_2 ノルムが時間 t の増加に伴い変動するが、 $160 \leq c_p t / \Delta x \leq 320$ の範囲で両対数プロットに直線の包絡線をフィッティングして数値誤差の増加率を定義した。 $0 \leq e_t \leq 1$, $0.1 \leq h_T \leq 1.5$ のパラメータ範囲に関して、各パラメータの値を 0.01 ずつ変化させて数値誤差の増加率の分布を求め、数値誤差の増加率が負の領域を安定領域とした。

収束解析

強度がゼロの平らな断層に、無限回連続微分可能ななめらかな初期載荷分布を与えた。

$$\tau^{\text{ini}} = \begin{cases} \frac{\Delta \tau}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{\lambda}{|x| - \lambda} + \frac{\lambda}{|x|} \right) \right) & |x| < \lambda \\ 0 & \lambda \leq |x| \end{cases}$$

異なる要素サイズ ($1/256 \leq \Delta x/\lambda \leq 1$) を用いて断層挙動を解き、 $tc_s/\lambda = 2$ における V を求めた。加えて、基準となる解として、SBIEM [Noda and Lapusta, 2010] を用いた高解像度 ($\Delta x/\lambda = 1/1024$, $h_T = 0.5$) の解を計算した。基準の解との差の L_2 ノルムを数値誤差とし、 h_T および e_t を固定した場合の Δx に対するスケーリングを調べた。

3. 結果

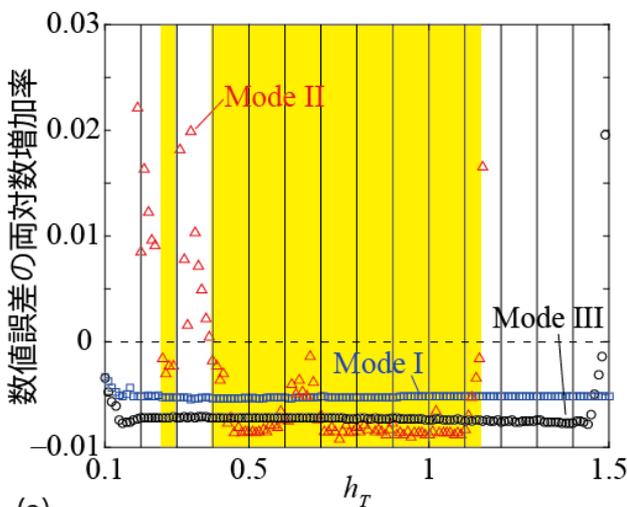
安定性解析の結果、CM については Tada & Madariaga [2001] が自己相似破壊の計算を元に報告した安定性と同様の結果が得られた。これまで報告された数値不安定は、破壊先端ではなく背後の自由表面的な領域での振動の増大が原因であることが明らかとなった。NL については、Mode I については調べたパラメータ範囲の全域で、Mode II では $0.26 \leq h_T \leq 0.29$ および $0.40 \leq h_T \leq 1.14$ 、Mode III では $0.1 \leq h_T \leq 1.48$ の範囲で安定となった (図 1a)。全 Mode 共通の安定領域は Mode II のものと一致する。混合モード破壊を計算する際、要素サイズを 2.85 倍フレキシブルに取

ることが示唆される。

収束解析の結果、CM は 1 次の精度を示したのに対し、NL は概ね 2 次の精度を示した (図 1b-d)。Mode II の $h_T = 0.4, 0.5$ のケースのみ、収束の精度は 1.5 次となった。これは積分核の特異性に起因している可能性があるが、それでも CM の 1 次精度よりは高い数値精度が出ている。

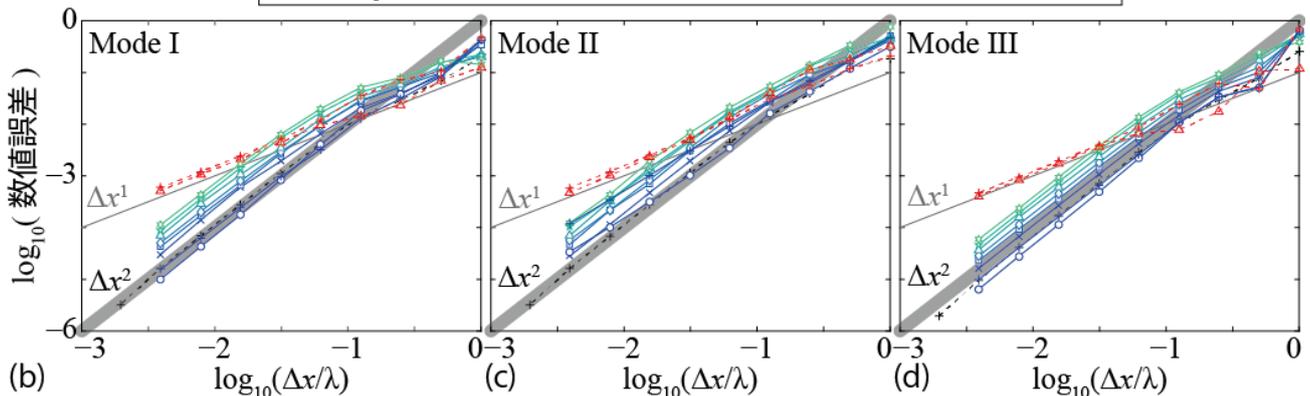
4. 考察・まとめ

今回調べた NL は、滑らかな積分核に対して 2 次の精度の解法であるが、数値計算コストの主要な部分を占める時空間畳み込みの積分の回数が実質 CM と同じ 1 回で済む特徴がある。即ち CM に替えて NL を用いた場合、追加で必要となる数値資源が無視できる量であるにもかかわらず、数値安定性と数値精度が向上する事が示された。さらに、積分核には CM と同じものを用いており、CM を用いたコードから大幅な変更は必要ない。NL は既存のコードに実装が容易な実用的な時間発展手法であると言える。



(a)

--+ SBIEM, $h_T = 0.5$, + CM, $(h_T, e_t) = (0.5, 0.4)$, -△ CM, $(h_T, e_t) = (0.9, 0.55)$
 ○ NL, $h_T = 0.4$, + 0.5, * 0.6, □ 0.7, ◇ 0.8, △ 0.9, + 1.0, + 1.1



(b)

(c)

(d)

図 1 (a) NL の安定性解析の結果。全 Mode で数値誤差の増加率が負の領域を安定領域とし、黄色で示している。(b-d) 収束解析の結果。CM (赤) に関しては Δx^1 、NL (寒色) に関しては概ね Δx^2 のスケーリングが確認できる。Mode II の $h_T = 0.4, 0.5$ のケースのみは $\Delta x^{1.5}$ のスケーリングを示す。黒の+記号は SBIEM の収束解析結果。