

線形化したリチャーズ式から得られる新たなフラックス式  
New flux equations derived by linearized Richards' equation

○菅原快斗・佐山敬洋

○Yoshito SUGAWARA, Takahiro SAYAMA

Infiltration rate at soil surface and vertical distribution of water content have been estimated based on the analytical solutions of Richards' equation. On the other hand, recharge rate to ground water or subsurface flow, which is important variable in distributed rainfall-runoff models, typically computed by the numerical simulations of Richards' equation. To the best knowledge of the authors, there is no analytical solution of the Richards' equation for estimating water flux at arbitrary depth. This study derived new flux equations in a soil layer from analytical solutions of linearized Richards' equation. These flux equations can estimate the flux based on the upper boundary conditions representing rainfall input or ponding. Since the vertical discretization is not necessary for the computation, it can save computation time and memory significantly. The result suggested that the analytical solution corresponds to the original equation (139 words).

## 1. 背景

鉛直一次元の浸透現象は、農業の灌漑分野などを中心に、Richards 式<sup>(1)</sup>を基礎式とした解析が進められてきた。特に、これまで土壌内の水分量や湛水時の地表面における浸透能について数多くの解析解が求められている。一方で流出解析においては、浸透能や水分量だけでなく、鉛直不飽和浸透を経て雨水がどれだけ地下水や飽和側方流を涵養するかも重要な関心となる。そのため、地下水や飽和側方流への涵養量を求められるフラックスの解析解が必要とされている。

分布型流出モデルにおいて、例えば GSSHA モデル<sup>(2)</sup>は地表面から地下水面までを複数の層へと分割し、Richards'式を数値的に解いている。しかし、細かい計算格子の下で Richards'式を数値的に解くことは計算量の増大といった問題を引き起こす可能性がある。一方で、分布型流出モデルには、Richards'式を数値的に解かず、浸透現象を概念的に計算するものも存在する。例えば、SWAT モデル<sup>(3)</sup>は、降雨に対する土壌の浸透能と地表面流の関係を陽的に記述する SCS-CN 法<sup>(4)</sup>を用いている。このような概念的なモデルは Richards'式の数値計算に比べて計算量が少ないものの、その物理性が問題視されることがある。そこで、Richards'式の解析解を用いて、概念モデルの物理性を示すことが試みられている。例えば、Hooshyar は Richards'式を線形拡散方程式へと帰着させ解析解を求める

ことで、上記の SCS-CN 法の物理的根拠を示している<sup>(5)</sup>。ただし、浸透の概念モデルの中でも地下水や飽和側方流への涵養量については解析解が求められていない。そのため、本研究は、物理的な分布型モデリングに適用しやすい形式で、地下水や飽和側方流への涵養量を求めるための Richards'式の解析解を導出することを目的とする。

## 2. 手法

土中の水分移動を記述するリチャーズ式は次式のようにかける。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial \psi}{\partial z} - K \right) \quad (1)$$

$t$  は時間、 $z$  は地表面からの深さ、 $\theta$  は体積含水率、 $K$  は不飽和透水係数、 $\psi$  は圧力水頭である。土壌の有効飽和度を次式で定義する。

$$S = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (2)$$

$\theta_s$  は飽和体積含水率、 $\theta_r$  は残留体積含水率である。相対透水係数が有効飽和度に等しいという仮定とガードナー式<sup>(6)</sup>を用いると、リチャーズ式は次の移流拡散方程式へと帰着される。

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - V \frac{\partial S}{\partial z} \quad (3)$$

$$D = \frac{k_s}{\alpha(\theta_s - \theta_r)}, \quad V = \frac{k_s}{(\theta_s - \theta_r)} \quad (4)$$

$k_s$  は飽和透水係数、 $\alpha$  はガードナー式の水分

特性パラメータである。初期条件は土層全体で  $\theta_r$  であり、下側境界条件は初期水分量が無限に続くものとする。

土層の飽和透水係数が十分に大きいとき、地面に到達した降雨は全て土層へと浸透し、上側境界条件はフラックス境界条件となる。時刻 0 から  $t_0$  の間に降雨強度  $r$  の雨が降ったときの土中のフラックス  $q$  は次のように求められる。

$$q = \begin{cases} r \cdot R_q(z, t) & (0 < t \leq t_0) \\ r (R_q(z, t) - R_q(z, t - t_0)) & (t > t_0) \end{cases} \quad (5)$$

$$R_q = \frac{1}{2} \left( \operatorname{erfc} \left( \frac{z - Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) + \exp \left( \frac{V}{D} z \right) \operatorname{erfc} \left( \frac{z + Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) \quad (6)$$

実際に観測される降雨強度に対する変化は、この基本解を重ね合わせることで得られる。

土層の飽和透水係数が降雨強度より小さいとき湛水が発生し、上側境界条件は飽和境界となる。時刻 0 から  $t_0$  の間に湛水が発生したときの土中のフラックス  $q$  は次式となる。

$$q = \begin{cases} k_s \cdot R_q(z, t) & (0 < t \leq t_0) \\ k_s (R_q(z, t) - R_q(z, t - t_0)) & (t > t_0) \end{cases} \quad (7)$$

$$R_q = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{z - Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) + \frac{\exp \left( - \left( \frac{z - Vt}{2\sqrt{Dt}} \right)^2 \right)}{\alpha \sqrt{\pi Dt}} \quad (8)$$

特に  $z = 0$  かつ  $0 < t < t_0$  であるときの浸透能  $i$  は次式となる。

$$i = k_s \left( \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( - \frac{Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) + \frac{\exp \left( - \frac{V^2}{4D} t \right)}{\alpha \sqrt{\pi Dt}} \right) \quad (9)$$

### 3. 結果

滋賀県桐生水文試験地で観測された降雨を入力としたときの、各深さにおけるフラックス変化を図-1に示す。図で示した数値解は、同じ入力の下で(3)式を数値的に解いたものである。解析解と数値解はほとんど一致しており、解の導出に誤りがなかったことが確認できる。土層の浅い地点では降雨に対応したフラックスの波形となるが、深くなるにつれて拡散した緩やかな波形へと変化する。湛水を入力としたときの各深さにおけるフラックス変化を図-2に示す。地表面に近い地点では、浸透能式に見られるような飽和透水係数を超えた急激な変化が起きるが、深い地点では緩やかに飽和透水係数へと上昇していく。

### 4. 結論

本研究で得られた解析解は、雨量計で観測される降雨データや湛水を入力として、各深さにおけるフラックスを計算可能である。各境界条件を用いた計算の結果は、想定される物理現象を反映したものとなった。今後は、このフラックス式を分布型流出モデルへと適用させる予定である。

### 参考文献

- (1) Richards, L. A. (1931). Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1(5), 318-333.
- (2) Downer, C. W. and Ogden, F. L. (2004). GSSHA: Model to simulate diverse stream flow producing processes. *Journal of Hydrologic Engineering*, 9(3), 161-174.
- (3) Arnold, J. G., Srinivasan, R., Muttiah, R. S., and Williams, J. R. (1998). Large area hydrologic modeling and assessment part I: Model development. *Journal of the American Water Resources Association*, 34(1), 73-89.
- (4) U.S. Department of Agriculture, Soil Conservation Service, 1972. *National Engineering Handbook, Hydrology Section 4*, Chapters 4-10.
- (5) Hooshyar, M. and Wang, D. (2016). An analytical solution of Richards' equation providing the physical basis of SCS curve number method and its proportionality relationship. *Water Resources Research*, 52(8), 6611-6620.
- (6) Gardner, W. R. (1958). Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil science*, 85(4), 228-232.

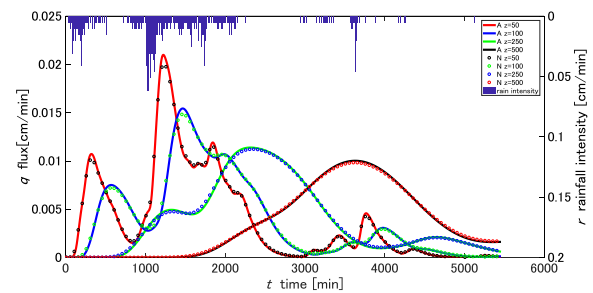


図-1 観測降雨強度を入力としたときの、各深さにおけるフラックス変化。Aは解析解でNは数値解。

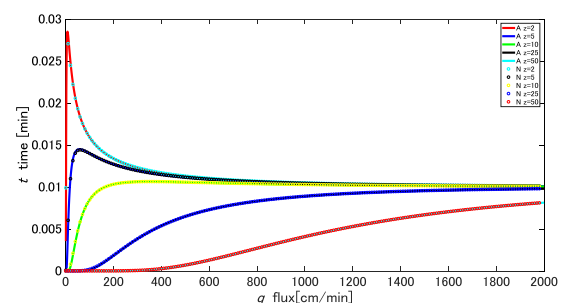


図-2 湛水発生時の各深さにおけるフラックス変化。Aは解析解でNは数値解。