

高次高階ルジャンドル陪函数の高精度計算手法 Computational Methods of Associated Legendre Functions of High Order and Degree

○榎本 剛

○Takeshi ENOMOTO

Spherical harmonics are used in geophysics and in other disciplines in science that deal with phenomena on the spherical surface. In meteorology, spherical harmonics are used to expand the prognostic variables of the atmosphere to compute the dynamical process in an atmospheric general circulation model or to analyze the energy spectrum. Spherical harmonics are composed of Fourier series and associated Legendre functions. Recent increase in computing power allows us to use a large truncation wave number to achieve a horizontally high resolution. However, the values of associated Legendre functions of high order and degree cannot be computed accurately in double precision using the traditionally-used three-point recurrence. The present study compares two alternative methods to overcome the difficulty in terms of accuracy and of speed.

1. はじめに

ルジャンドル陪函数は、フーリエ級数と共に球面調和函数を構成する。球面調和函数を基底函数とする球面変換は、球面上の函数を展開するために地球物理学はもちろん様々な分野で用いられている。大気大循環モデルの力学過程において、球面変換は水平離散化に用いることができる。

ルジャンドル陪函数の値の計算には、これまで3点漸化式が用いられてきたが、切断波数が大きくなるとアンダーフローが原因で倍精度の範囲では正確な計算が行えなくなる。4倍精度を用いる方法は、問題の先送りで根本的な解決にはならない上、計算速度が桁違いに遅くなる。

そこで本研究では、倍精度の範囲で高次高階でのルジャンドル陪函数の値が計算できることが知られている4点漸化式を用いた方法(フーリエ法, Swarztrauber, 2002)と拡張浮動小数点数を用いた3点漸化式(X数法, Fukushima 2011)とを精度と速度について比較した(Enomoto 2015)。

2. 計算手法

フーリエ法では、 $P_n^0(x)$ ($x = \sin \phi$, ϕ は緯度)をフーリエ展開で正確に求める。 $P_n^1(x)$ は $P_n^0(x)$ から直ちに求まる。これらの値から4点漸化式を用いて高階高次の値を計算する。もし低次の値 $P_{n-2}^m(x)$ がアンダーフローで表現されなくても、二つ下の階における二つの値 $P_{n-2}^{m-2}(x)$, $P_n^{m-2}(x)$ も用

いるため、 $P_n^m(x)$ の値が正しく計算できる。

拡張浮動小数点数は、浮動小数点数を倍精度実数と整数の組で表現し、倍精度の範囲で表現できない数をスケールリングして整数の値を増減することにより表現する。X数法を用いるとアンダーフローが回避されるため、3点漸化式をそのまま用いることができる。

3. 結果

Swartztrauber (2002)のフーリエ法には切断波数2000を超えると誤差が急増する問題があることが判明した。計算方法を検討したところ、 $P_n^0(x)$ のフーリエ展開の係数の計算で桁落ちが生じていることを突き止めた。この誤差は表式を工夫することにより、回避することができる。

改良されたフーリエ法とX数法とを比較すると、フーリエ法は精度の点で有利でX数法は速度の点で有利であることが分った。

謝辞

本研究にはJSPS 科研費 15K13417の助成を受けた。

参考文献

- Enomoto, T., 2015: *SOLA*, **11**, 144–149.
Fukushima, T. 2011: *J. Geodesy*, **86**, 271–285.
Swartztrauber, P. N., 2002: *SIAM J. Sci. Comput.*, **24**, 945–954.