

ABIC を用いたインバージョン解析：先験的拘束条件がフルランクでない場合の取り扱い
Treatment of non-full rank prior information in inversion analyses with ABIC

○深畑幸俊

○Yukitoshi Fukahata

A non-full rank matrix for prior constraints is allowed in the formulation of Yabuki and Matsu'ura (1992), while Fukuda and Johnson claimed that the matrix must be full rank. This problem depends on consideration about the value of "zero" of zero eigenvalues of the prior constraint matrix. In actual inversion analyses, we must have some prior information about model parameters, even if it is not explicitly expressed. Therefore, the "zero" of zero eigenvalues is considered to be not zero exactly. Based on this consideration, we can obtain the same expression for ABIC as in Yabuki and Matsu'ura (1992).

ABIC(Akaike's Bayesian Information Criterion, 赤池のベイズ情報量規準)を用いたインバージョン解析は、Yabuki & Matsu'ura (1992)以来多くの研究で使用され、その有効性が実証されてきた。ところで、Yabuki & Matsu'ura (1992)では、先験的拘束条件を表す確率密度関数として以下の式が用いられている：

$$p(\mathbf{a}; \rho^2) = (2\pi\rho^2)^{-P/2} |\Lambda_P|^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\rho^2} \mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{a}\right] \quad (1)$$

ここで、 ρ^2 は先験的拘束条件の重みを規定するパラメタ、 P は行列 \mathbf{G} のランクで、この式からは彼らが先験的拘束条件として、フルランクでない行列 \mathbf{G} を許容していることが読み取れる。

一方、Fukuda & Johnson (2008)は、拘束条件を表す行列はフルランクでなければならないこと、つまりゼロ固有値を持つてはならないことを明確に主張した。実際、(1)式を全モデルパラメタ領域で積分すると、ゼロ固有値を持つ場合には、全確率が1に収束せず無限大に発散してしまう。

それでは、Fukuda & Johnson (2008)が主張するように、先験的拘束条件はフルランクの場合のみに限られるのだろうか。もしもそうだとすると、先験的拘束条件として採用可能な範囲が限定され厄介である。また、完全な形ではないにせよ多少なりとも先験的拘束条件があった方がより良いインバージョン解析ができるように思われるが、そういった直感にも反している。

この問題の取り扱いは、ゼロ固有値のゼロをど

のように考えるかにかかっている。ゼロ固有値が厳密にゼロである場合には、確かに(1)式の積分は発散する。しかし、現実のデータ解析では、たとえ数式として明示的に表現されていなくとも、先験的拘束条件が真に全くないということは通常あり得ない。それは、スムージングのような間接的拘束条件だけでなく、直接的拘束条件(Matsu'ura et al., 2007)も併せて考えるとよりはっきりする。そこで、通常データ解析では、先験的拘束条件がランク落ちをしてゼロ固有値を持つ場合でも、そのゼロは厳密にはゼロでなく十分に小さいなんらかの値を持っていると考えるのが妥当であろう。つまり、簡単のため先験的拘束条件を表す行列 \mathbf{G} を対角行列とすると、その対角成分が、

$$\rho^2 \mathbf{G} = (\rho^2 \lambda_1 \quad \cdots \quad \rho^2 \lambda_P \quad 0 \quad \cdots \quad 0) \quad (2)$$

ではなく、

$$\rho^2 \mathbf{G} = (\rho^2 \lambda_1 \quad \cdots \quad \rho^2 \lambda_P \quad \varepsilon_{P+1}^2 \quad \cdots \quad \varepsilon_M^2) \quad (3)$$

と考えるということである。このとき、ABICを定義に従って計算すると、結局

$$\text{ABIC}(\alpha^2) = (N + P - M) \log s(\mathbf{a}) - P \log \alpha^2 + \log |\mathbf{H}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{H} + \alpha^2 \mathbf{G}| - \sum_{i=P+1}^M \log \varepsilon_i + C \quad (4)$$

となり、 ε_i が定数であるとするれば、Yabuki & Matsu'ura (1992)と同じ表現を得る。「地震」のレビュー論文(深畑, 2009)の脚注で、「半正値二次形式の場合、実際には(14)式以下でより複雑な数学的操作を必要とするが、同じ結果を得ることができる」と書いたのは、このような意味である。