C23

# 方位異方的地球の自由振動の定式化と地球内部構造への応用可能性

# A Formulation of Free Oscillations of Azimuthally Anisotropic Earth and Its Possible Applications

○川﨑一朗
○Ichiro KAWASAKI

I present an analytical formulation for free oscillations of the Earth having azimuthal anisotropy. Based on the framework of generalized spherical harmonics by Phinney and Burridge (1973), I obtain the first order differential equations of motion, which are consistent with the so-called y-equations of Takeuchi and Saito (1972). For axial symmetric models of seismic wave velocities, the differential equations have a simple form for modes nS0. This leads to a prediction that their eigenfrequencies have a four-lobed latitudinal dependence, even if the pattern of travel time anomalies for P waves passing through inner core has a two-lobed dependence.

方位異方的地球の自由振動の解析的定式化は，理論地震学の最後の空白ともいえる．この研究では，運動方程式を，Phinney and Burridge (1973)の generalized spherical harmonics の枠組みに書き換え，Takeuchi and Saito (1972) の異方性媒質への拡張形として表現する式を得た．

まず，$\mathbf{s}^0=\mathbf{u}_r$，$\mathbf{s}^{\pm}=(\mp\mathbf{u}_\theta+i\mathbf{u}_\varphi)/\sqrt{2}$ によって球面座標系の変位ベクトル$(\mathbf{u}_r,\mathbf{u}_\theta,\mathbf{u}_\varphi)$から一般化座標の変位ベクトル$\left(\mathbf{s}^0,\mathbf{s}^{\pm}\right)$への座標変換し，次のように一般化球面調和関数$\mathbf{Y}_n^{pm}$とその微分を導入する．なお，特に断らない限り，記号の意味は Takeuchi and Saito (1972)と同じである．

$$\mathbf{s}^{\pm}=\mathbf{U}^{\pm}\Omega_0^n\mathbf{Y}_n^{\pm1m},\ \mathbf{s}^0=\mathbf{U}^0\mathbf{Y}_n^{0m}$$

$$\gamma_n\mathbf{Y}_n^{0m}(\theta,\varphi)=\mathbf{Y}_n^{m}(\theta,\varphi)$$

$$\left(\mp\frac{\partial}{\partial\theta}+i\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\mathbf{Y}_n^{(N)m}(\theta,\varphi)=$$

$$\sqrt{2}\Omega_{\mp N}^{l}\mathbf{Y}_n^{(N\pm1)m}(\theta,\varphi)-N\frac{\cos}{\sin\theta}\mathbf{Y}_n^{(N)m}(\theta,\varphi)$$

これを出発点として, 歪みテンソルの物理成分, 応力テンソルの物理成分，弾性定数を逐次一般化座標に座標変換して, フックの法則を Takeuchi and Saito (1972) の異方性媒質への拡張形である次式に変換できた.

$$C\frac{d}{dr}\mathbf{y1}=-\frac{2F}{r}\mathbf{y1}+\frac{F}{r}n(n+1)\mathbf{y3}+\left[\mathbf{T}^{00}\right]$$

$$\frac{d}{dr}\mathbf{y3}=-\frac{1}{r}\mathbf{y1}+\frac{1}{r}\mathbf{y3}-\frac{1}{2\Omega_0^nL}\left[\mathbf{T}^{P}\right]$$

$$\frac{d}{dr}\mathbf{y5}=+\frac{1}{r}\mathbf{y5}-\frac{1}{2\Omega_0^nL}\left[\mathbf{T}^{T}\right]$$

次に,運動方程式を一般化座標へ座標変換して

$$\frac{d}{dr}\mathbf{y4}=-\rho\omega^2\mathbf{y3}-\frac{3}{r}\mathbf{y4}+\frac{1}{r}\frac{\Omega_2^n}{2\Omega_0^n}\left\langle\mathbf{T}^{Q}\right\rangle+\frac{1}{r}\left\langle\mathbf{T}^{+-}\right\rangle$$

$$\frac{d}{dr}\mathbf{y2}=-\rho\omega^2\mathbf{y1}-\frac{2}{r}\mathbf{y2}+\frac{1}{r}n(n+1)\mathbf{y4}-\frac{2}{r}\left\langle\mathbf{T}^{+-}\right\rangle$$

$$\frac{d}{dr}\mathbf{y6}=-\rho\omega^2\mathbf{y5}-\frac{3}{r}\mathbf{y6}+\frac{1}{r}\frac{\Omega_2^n}{2\Omega_0^n}\left\langle\mathbf{T}^{V}\right\rangle$$

を得た．$\left[\mathbf{T}^{00}\right],\left[\mathbf{T}^{P}\right],\left[\mathbf{T}^{T}\right]$，$\left\langle\mathbf{T}^{Q}\right\rangle,\left\langle\mathbf{T}^{+-}\right\rangle,\left\langle\mathbf{T}^{V}\right\rangle$ が方位異方性の項を含む．ただし，これらの中身をは長い式になるので省略する．transverse isotropy の場合は，上式は Takeuchi and Saito (1972)の表現に一致する．

n=0（0S0, 1S0, 2S0 等）の場合，自転軸に軸対称な異方性が存在すると，方程式は次のように比較的簡単になる．

$$\left(C\cos^2\Theta+A\sin^2\Theta-2(\Delta Rz)(\sin2\Theta)^2\right)\frac{d\mathbf{y1}}{dr}$$

$$=-\frac{2F}{r}\mathbf{y1}+\mathbf{y2}-\frac{2}{r}\left[(\Delta R3)\sin^2\Theta+(\Delta R\mathbf{z})(\sin2\Theta)^2\right]\mathbf{y1}$$

$$\frac{d\mathbf{y2}}{dr}=-\rho\omega^2\mathbf{y1}+\frac{2F}{r}\frac{d\mathbf{y1}}{dr}+\frac{4(A-N)}{r^2}\mathbf{y1}-\frac{2}{r}\mathbf{y2}$$

$$+\frac{2}{r}\left[(\Delta R3)\sin^2\Theta+(\Delta R\mathbf{z})(\sin2\Theta)^2\right]\frac{d\mathbf{y1}}{dr}$$

$$+\frac{4}{r}\left[(\Delta\mathbf{R}1-\Delta R3)\sin^2\Theta-\frac{1}{2}(\Delta R\mathbf{z})(\sin2\Theta)^2\right]\frac{1}{r}\mathbf{y1}$$

ただし、$\Delta\mathbf{R}1,\Delta\mathbf{R}2,\Delta R3,\Delta R\mathbf{z}$ は弾性定数を含む項, $\Theta$ は観測点の余緯度である.

この式の形から，内核に P 波走時残差が極方向で大きく，赤道方向で小さい２象限型緯度依存性をする異方性が存在すると，0S0, 1S0, 2S0 などの固有周期固有周期が４象限型の緯度依存性をしうることが読み取れる.